Опір, індуктивність і ємність в колі змінного струму. Векторні діаграми

У колах змінного струму розглядають активні (R) і реактивні (L і C) елементи. Їх називають відповідно активними і реактивними опорами. На відміну від активного, у реактивному навантаження електромагнітної енергії не перетворюється в інші види.

Активний опір (резистор) R

Резистор – це елемент електричного кола, який враховує незворотне перетворення електричної енергії в інші види енергії (теплову, світлову, променисту, механічну тощо).

Він характеризується активним опором *[R] Ом* або активною провідністю $G = \frac{1}{R}$, *См*

Якщо до резистора прикласти синусоїдальну напругу $u(t) = U_m sin(\omega t + \psi_u)$, тоді струм у колі (рис. 1) згідно із законом Ома буде дорівнювати^

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m \sin(\omega t + \psi_u)}{R} = \frac{U_m}{R}\sin(\omega t + \psi_u) = I_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

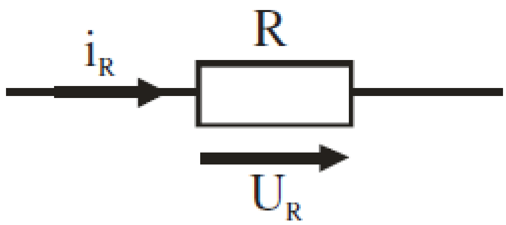

Рис. 1 Резистивний елемент у колі синусоїдного струму

Це співвідношення показує, що струм має ту ж саму початкову фазу, що й напруга, тобто на резисторі напруга U_R і струм i_R збігаються за фазою і зсув фаз φ дорівнює нулю (рис. 2):

$$\psi_u = \psi_i,$$

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = 0.$$

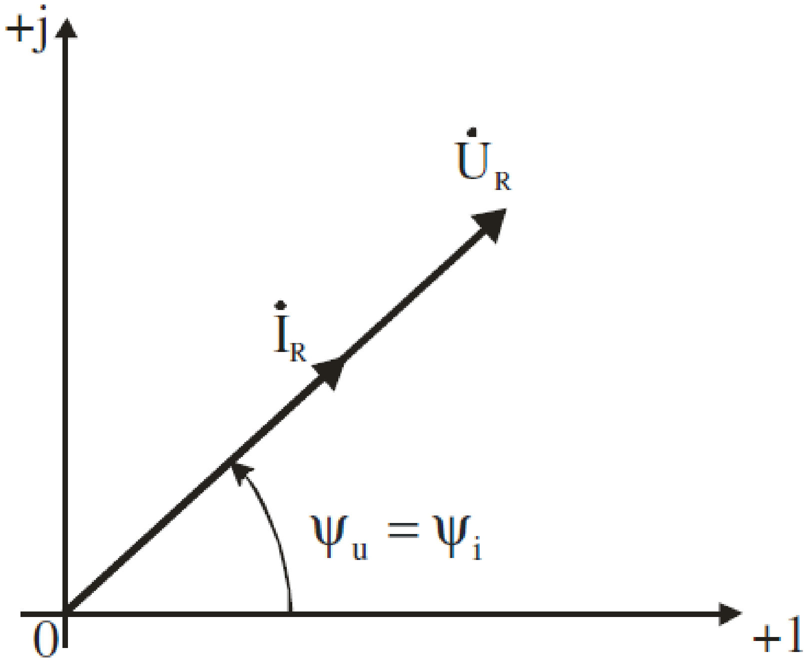

Рис. 1 *Векторна діаграма струмів і напруг у випадку резистивного елементу в колі синусоїдного струму*

Перейдемо від синусоїдальних функцій напруги й струму до комплексів, що їм відповідають:

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u) \quad \Rightarrow \quad \dot{U} = Ue^{j\psi_u},$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_u) \quad \Rightarrow \quad \dot{I} = Ie^{j\psi_u},$$

розділивши перший із них на другий, одержимо закон Ома у випадку резистивного елемента в колі синусоїдного струму в комплексному вигляді:

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Ue^{j\psi_u}}{Ie^{j\psi_u}} = \frac{U}{I} = R,$$

$$\dot{U} = R \cdot \dot{I}.$$

Миттєва потужність кола дорівнює добутку миттєвих значень напруги й струму:

$$p = ui = U_m \sin(\omega t) I_m \sin(\omega t) = U_m I_m \sin^2(\omega t) = P_m \sin^2(\omega t) = \frac{1}{2} P_m (1 - \cos(2\omega t)).$$

Із отриманого результату та графіку миттєвої потужності (рис. 3) витікає, що потужність змінюється від нуля до амплітудного значення $P_m = U_m i_m$ і є додатною. Це означає, що в електричному колі з активним опором *R* енергія увесь час надходить від джерела електричної енергії до приймача та незворотно перетворюється в ньому в інші види енергії.

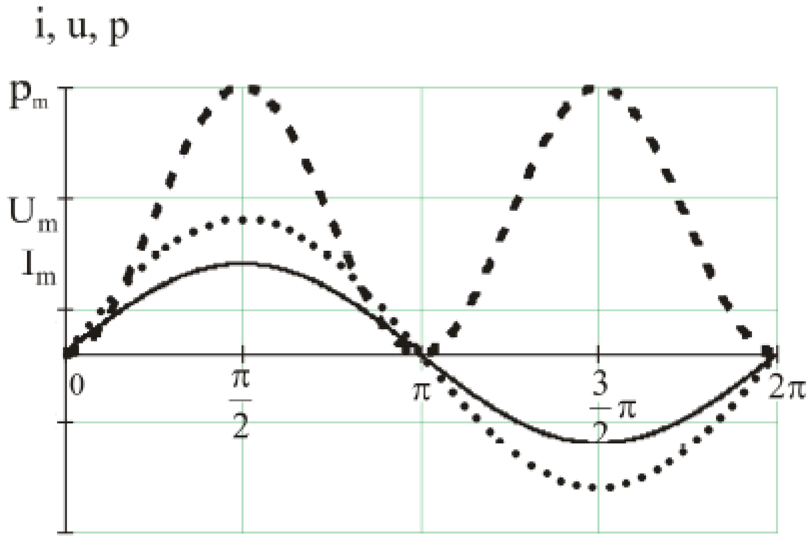

Рис. 3 Графік миттєвих значень струму, напруги й потужності

Середнє значення потужності за період дорівнює:

$$P_{cp} = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T U_m I_m \sin^2(\omega t)dt = \frac{U_m I_m}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t)dt =$$

$$= \frac{U_m I_m}{T}\int_0^T \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2}dt = \frac{U_m I_m}{2}.$$

Якщо замінити амплітудні значення напруги та струму на їх діючі значення, то одержимо:

$$P_{cp} = \frac{U_m I_m}{2} = \frac{\sqrt{2}U \cdot \sqrt{2}I}{2} = UI = I^2 R = P.$$

Таким чином, середнім значенням потужності є електрична потужність, яка необоротно перетвориться на активному опорі в інші види енергії й носить назву активної потужності.

Активна потужність вимірюється за допомогою ватметра, відповідним чином включеним у електричне коло змінного току. Одиниця вимірювання активної потужності P, *Ом.*

Ємність С (конденсатор)

Ідеальний ємнісний елемент із ємністю C, Ф не має ні активного опору, ні індуктивності й ураховує енергію електричного поля. Він характеризується лише реактивним ємнісним опором X_C, Ом або реактивною ємнісною провідністю

$$b_c = \frac{1}{X_c} = C\text{м}.$$

Якщо до ємності прикласти синусоїдальну напругу $u(t) = U_m sin(\omega t + \psi_u)$, то миттєве значення струму у колі буде дорівнювати

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(CU) = C\frac{dU}{dt} = C\frac{d(U_m \sin(\omega t + \psi_u))}{dt} = C\omega U_m \cos(\omega t + \psi_u) =$$

$$= C\omega U_m \sin(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}) = \frac{U_m}{\frac{1}{C\omega}} \sin(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}) = I_m \sin(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}).$$

Отриманий результат показує, що струм через конденсатор випереджає за фазою напругу на ньому на кут π/2, або напруга на конденсаторі відстає за фазою від струму на кут π/2 (рис. 4, *б*).

Таким чином, зсув фаз між напругою та струмом дорівнює -π/2:

$$\varphi_C = \psi_u - \psi_i = \psi_u - (\psi_u + \frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}.$$

Необхідно зазначити, що в електротехніці відлік кутів зсуву фаз здійснюється від вектора струму (Рис. 4, б)

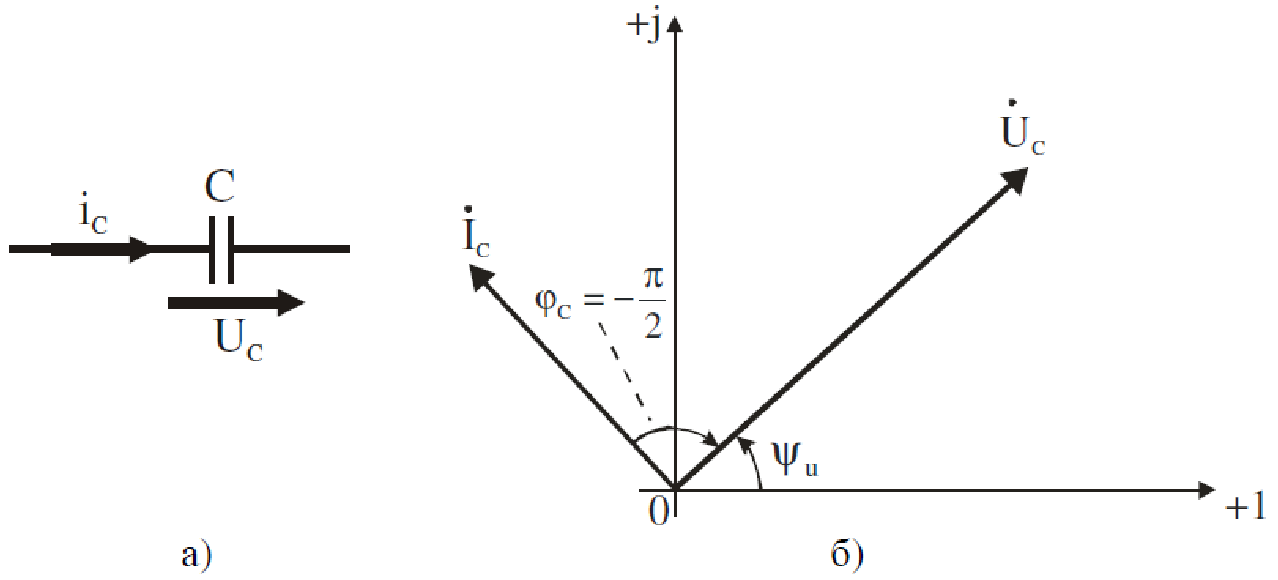

Рис. 4 Ідеальний ємнісний елемент у колі синусоїдного струму

Закон Ома для електричного кола синусоїдного струму з ємнісним елементом для амплітудних і діючих значень має вигляд:

$$U_m = \frac{1}{\omega C} I_m = X_C I_m, \qquad U = \frac{1}{\omega C} I = X_C I.$$

Реактивний ємнісний опір $X_c = \frac{1}{\omega C}$ на відміну від активного опору R є функцією частоти (ω = 2πf). При f = 0 конденсатор становить розрив для струму ($X_c = \infty$), а при $f = \infty$його опір дорівнює нулю ($X_c = 0$), Рис. 5

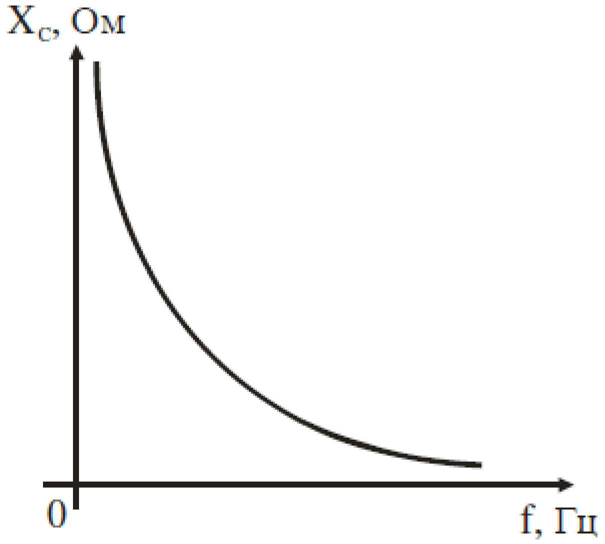

Рис. 5 Залежність реактивного ємнісного опору від частоти

Якщо перейти від синусоїдальних функцій напруги й струму до відповідних їм комплексам, одержимо:

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u) \quad \Rightarrow \quad \dot{U} = Ue^{j\psi_u},$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}) \quad \Rightarrow \quad \dot{I} = Ie^{j(\psi_u + \frac{\pi}{2})},$$

Розділимо перший з них на другий:

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Ue^{j\psi_u}}{Ie^{j(\psi_u+\frac{\pi}{2})}} = \frac{Ue^{j\psi_u}}{Ie^{j\psi_u}e^{j\frac{\pi}{2}}} = X_C e^{-j\frac{\pi}{2}} = -jX_C = \dot{Z}_C,$$

де $-Z_C$ – комплексний опір конденсатора. Одиниця вимірювання Z_C, Ом.

Закон Ома в комплексному вигляді для амплітудних і діючих значень у випадку ємнісного елемента в колі синусоїдного струму має вигляд:

$$\dot{U} = -jX_C\dot{I} = \dot{Z}_C\dot{I}, \qquad \dot{U}_m = -jX_C\dot{I}_m = \dot{Z}_C\dot{I}_m.$$

Миттєва потужність кола (рис. 6) дорівнює добутку миттєвих значень напруги й струму:

$$p = ui = U_m \sin(\omega t) I_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \frac{U_m I_m}{2} \sin(2\omega t) = UI \sin(2\omega t) = P_m \sin(2\omega t)$$

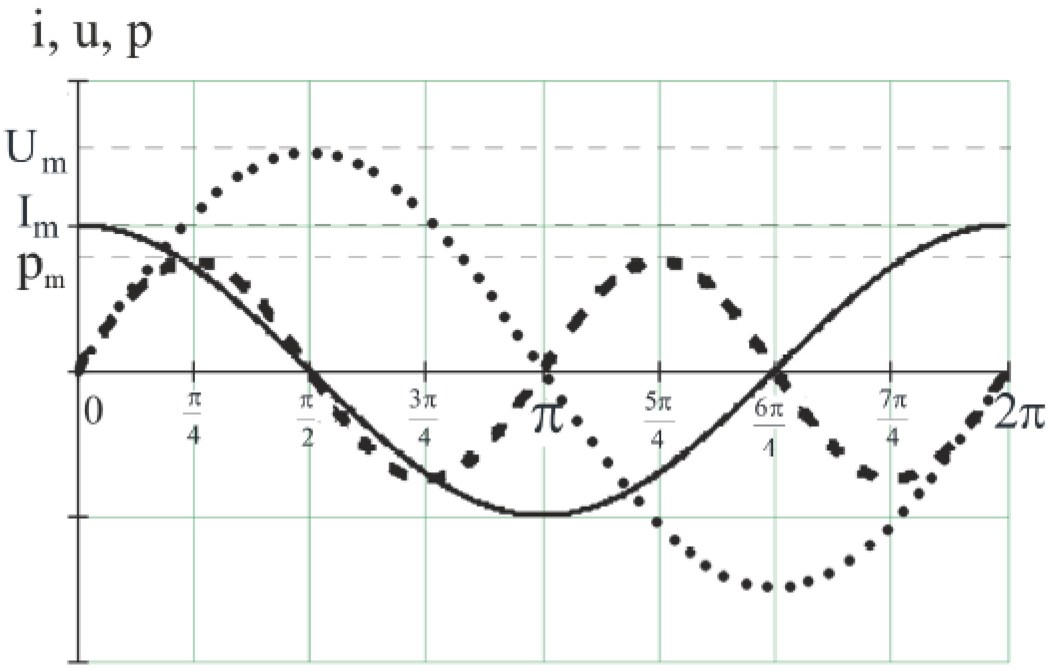

Рис. 6 Графіки миттєвих значень u, i, p

Таким чином, миттєва потужність змінюється з частотою у 2 рази більшою, ніж частота струму, а її амплітудне значення дорівнює добутку діючих значень напруги і струму:

$$P_m = U \cdot I$$

Середнє значення потужності за період дорівнює нулю:

$$P_{cp} = \frac{1}{T}\int_0^T uidt = \frac{1}{T}\int_0^T UI\sin(2\omega t)dt = 0\,.$$

У першу чверть періоду напруга на конденсаторі зростає, відбувається зарядження конденсатора: електрична енергія джерела накопичується в конденсаторі у вигляді енергії електричного поля. У наступну чверть періоду струм змінює свій напрямок на протилежний, а напруга на конденсаторі зменшується. Відбувається розряд конденсатора: накопичена їм електрична енергія повністю повертається джерелу. У другу половину періоду полярність напруги на обкладинках конденсатора змінюється на протилежну, і процес зарядження-розрядки конденсатора повторюється.

Таким чином, у колі з ідеальною ємністю відбувається безперервний періодичний процес обміну енергією між джерелом електричної енергії та конденсатором.

Індуктивність (котушка індуктивності)

Ідеальний індуктивний елемент (ідеальна індуктивна котушка) з індуктивністю L ([L] = Гн) не має ні активного опору, ні ємності і враховує енергію магнітного поля та явище самоіндукції. Він характеризується лише реактивним індуктивним X_L ([X_L] = Ом) або реактивною індуктивною провідністю

$$b_L = \frac{1}{X_L} = C\text{м}$$

Припустимо, що через нього протікає синусоїдний струм (рис. 7, *а*):

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)\,.$$

Тоді для напруги на затискачах котушки індуктивності можна записати:

$$u = L\frac{di}{dt} = L\frac{d(I_m \sin(\omega t + \psi_i))}{dt} = LI_m\omega\cos(\omega t + \psi_i) = LI_m\omega\sin(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}).$$

Отриманий результат показує, що напруга на котушці індуктивності випереджає струм на кут π/2 (рис. 7, *б*).

Таким чином, зсув фаз між напругою та струмом дорівнює π/2:

$$\varphi_L = \psi_u - \psi_i = (\psi_i + \frac{\pi}{2}) - \psi_i = \frac{\pi}{2}.$$

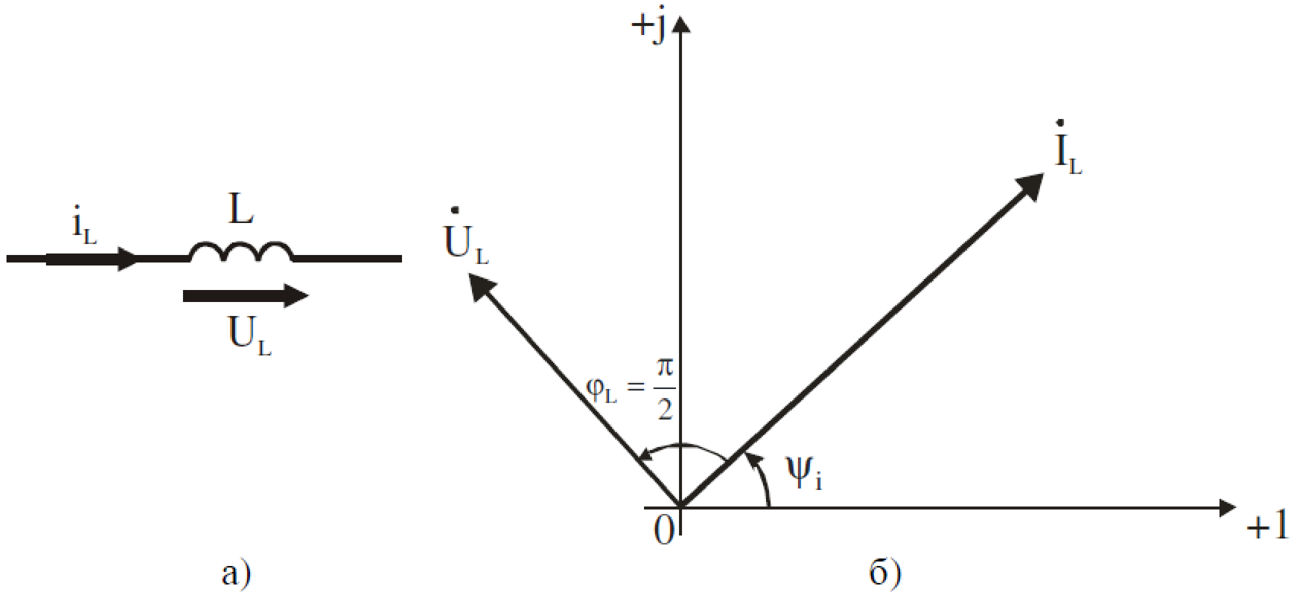

Рис. 7 *Ідеальний індуктивний елемент у колі синусоїдного струму*

Закон Ома для електричного кола синусоїдного струму з індуктивним елементом для амплітудних і діючих значень має вигляд:

$$U_m = \omega LI_m = X_L I_m, \qquad U = \omega LI = X_L I,$$

де $X_L = \omega L = 2\pi L$

Як і в випадку ємнісного елемента цей параметр є функцією частоти. Однак у цьому разі ця залежність має лінійний характер. З рисунка 8 випливає, що при f = 0 котушка індуктивності не чинить опору електричному струму (X_L = 0 Ом), а при ($f = \infty$), $X_L = \infty$), Ом.

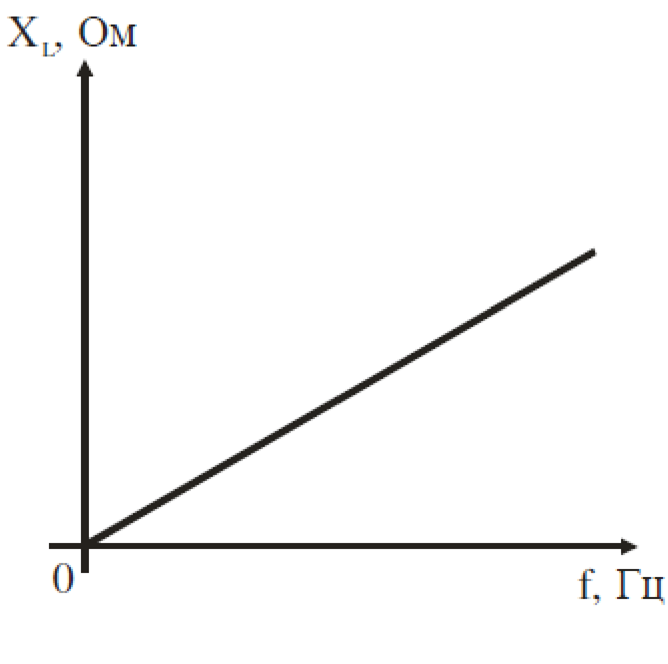

Рис. 8 Залежність реактивного індуктивного опору від частоти

Якщо перейти від синусоїдальних функцій напруги й струму до комплексів, що їм відповідають, одержимо:

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}) \quad \Rightarrow \quad \dot{U} = Ue^{j(\psi_i + \frac{\pi}{2})},$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \quad \Rightarrow \quad \dot{I} = Ie^{j\psi_i},$$

Поділимо перший з них на другий

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Ue^{j(\psi_i + \frac{\pi}{2})}}{Ie^{j\psi_i}} = \frac{Ue^{j\psi_i}e^{j\frac{\pi}{2}}}{Ie^{j\psi_i}} = X_L e^{j\frac{\pi}{2}} = jX_L = \dot{Z}_L,$$

або закон Ома у комплексному вигляді.

$$\dot{U} = jX_L\dot{I} = \dot{Z}_L\dot{I},$$

де $Z_L = jX_L$ – комплексний опір котушки індуктивності. Одиниця вимірювання Z_L: $[Z_L]$ = Ом.

Миттєва потужність кола дорівнює добутку миттєвих значень напруги й струму:

$$p = ui = U_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})I_m \sin(\omega t) = \frac{U_m I_m}{2}\sin(2\omega t) = UI\sin(2\omega t) = P_m \sin(2\omega t)$$

Таким чином, миттєва потужність змінюється з частотою, в 2 рази більшою, ніж частота струму (рис. 9), а її амплітудне значення дорівнює добутку діючих значень напруги й струму:

$$P_m = U\,I.$$

Середнє значення потужності за період дорівнює нулю:

$$P_{ср} = \frac{1}{T}\int_0^T uidt = \frac{1}{T}\int_0^T UI\sin(2\omega t)dt = 0.$$

У першу чверть періоду струм, що протікає через котушку індуктивності, зростає, електрична енергія джерела надходить до індуктивності, перетворюється й накопичується в ній у вигляді енергії магнітного поля. У наступну чверть періоду струм у колі зменшується, енергія магнітного поля перетворюється в електричну й повністю повертається джерелу.

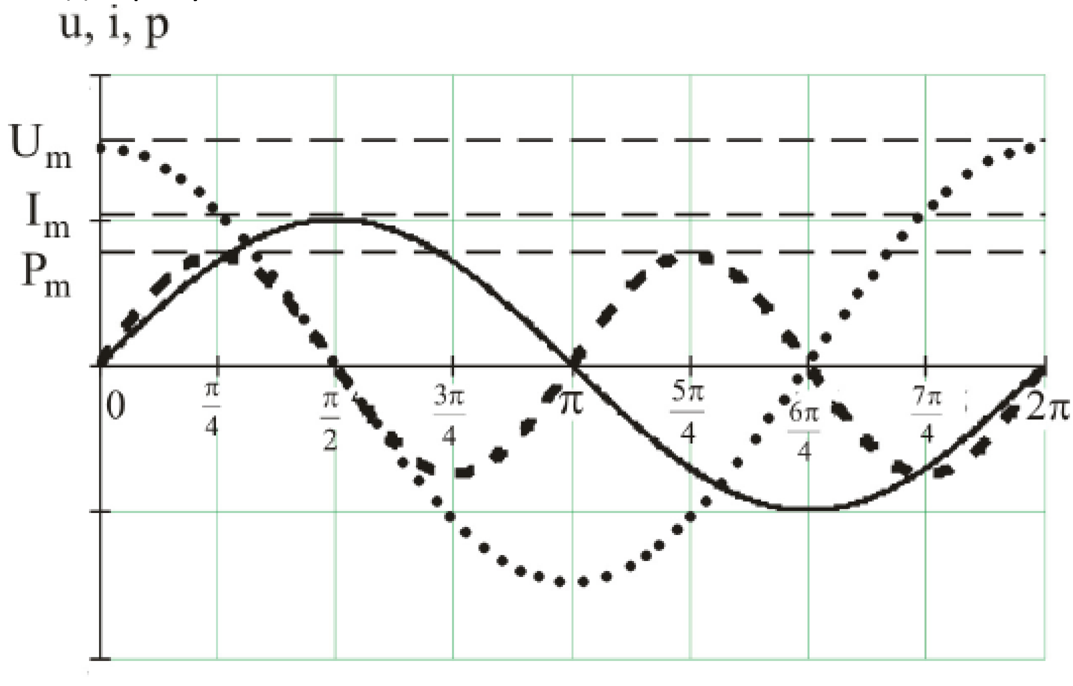

Рис. 8 *Графіки миттєвих значень струму, напруги й потужності*

У другу половину періоду напрямки струму й магнітного потоку змінюються на протилежні і відбувається процес, аналогічний процесу у першій половині періоду.

Таким чином, у колі синусоїдного струму з ідеальною котушкою індуктивності відбувається безперервний періодичний процес обміну енергією між джерелом і індуктивністю.