Розділ 9

Основи вейвлет-перетворення

Різноманітні математичні перетворення застосовуються до сигналу для того, щоб отримати про нього якусь додаткову інформацію, недоступну в початковому вигляді. У подальшому викладі сигнал в часовій області буде називатися початковим, а перетворений сигнал — трансформантою.

9.1 Обмеження використання перетворення Фур'є

Серед багатьох відомих перетворень сигналів найбільш популярним є перетворення Фурье (ПФ). Більшість сигналів, що зустрічаються на практиці, представлені в часовій області, тобто сигнал є функцією часу. Таким чином, при відображенні сигналу на графіці однєю з координат (незалежною) є вісь часу, а іншою координатою (залежною) — вісь амплітуд. Таким чином ми отримуємо амплітудно-часове представлення сигналу. Для більшості застосувань обробки сигналу це представлення не є найкращим. У багатьох випадках найбільш значуща інформація прихована в частотній області сигналу. Частотний спектр є сукупність частотних (спектральних) компонент, він відображає наявність тих або інших частот в сигналі.

Дуже часто інформація, не помітна в часовому представленні сигналу, виявляється в його частотному представленні. Розглянемо як приклад біологічний сигнал, наприклад електрокардіограму (ЕКГ). Типовий вид ЕКГ добре відомий кардіологам. Будь-яке значне відхилення від нього розглядається як патологія. Ця патологія, однак, не завжди може бути помітна в часовому представленні сигналу. Тому в останніх моделях електрокардіографів для аналізу використовується і частотна область сигналу. Рішення про патологію виноситься тільки з використанням інформації частотної області.

Окрім ПФ існує і багато інших часто вживаних перетворень сигналу. Прикладами є перетворення Гільберта, віконне ПФ, розподіл Вігнера, перетворення Уолша, вейвлет-перетворення та багато інших. Для кожного перетворення можна вказати найбільш відповідну область застосування, переваги та недолікиі, і вейвлет-перетворення (ВП) не є в цьому сенсі винятком.

Для того, що використовувати перетворення Фур'є, сигнал повинен бути *стаціонарним*, тобто всі його частотні складові повинні бути присутні в можен момент часу. На жаль, багато сигналів не задовольняють цій вимозі. Тому на практиці цілком можлива ситуація. коли у двох різних за формою сигналів частотні спектри дуже схожі. Наприклад, на рис. 9.1 представлений детермінований сигнал, заданий виразом

$$\begin{aligned} s(t) = \cos(2\pi \cdot 10t) + \cos(2\pi \cdot 25t) + \\ + \cos(2\pi \cdot 50t) + \cos(2\pi \cdot 100t), \end{aligned} \tag{9.1}$$

і який має чотири частотних компоненти — на частотах 10, 25, 50 та 100 Гц (див. спектр на рис. 9.2).

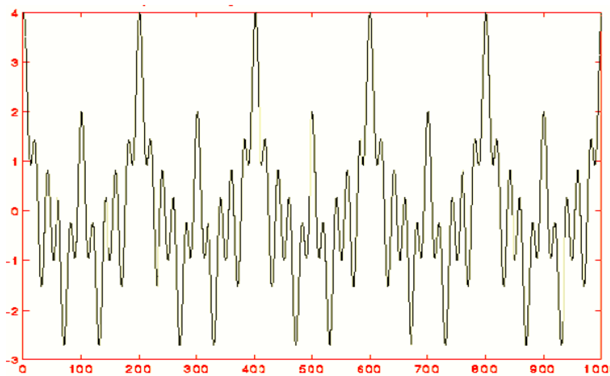


Рис. 9.1 – Детермінований сигнал, заданий виразом (9.1)

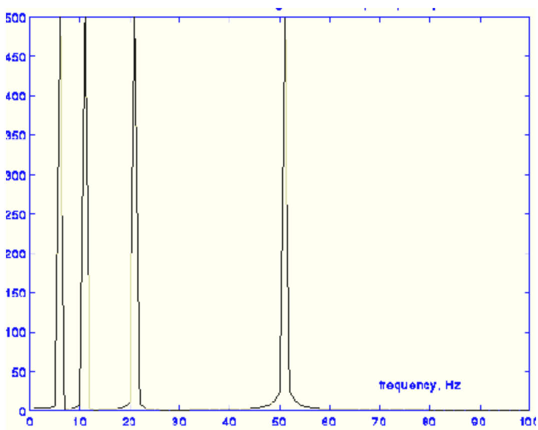


Рис. 9.2 – Спектр сигналу на рис. 9.1

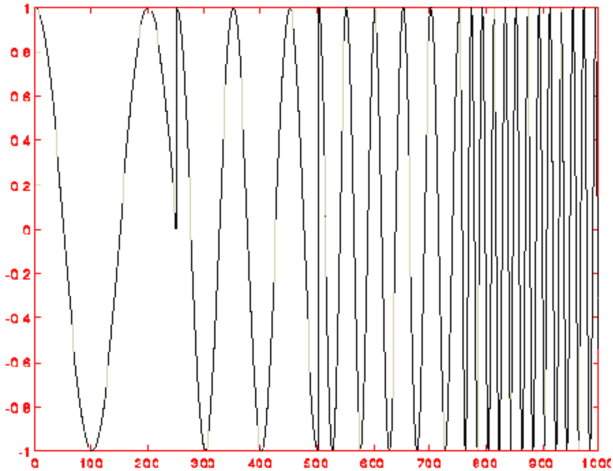


Рис. 9.3 – ЛЧМ-сигнал з частотами 10, 25, 50 та 100 Гц

На рис. 9.3 представлений сигнал з тими ж частотами, але в ньому вони йдуть «по черзі», тобто спочатку в сигналі є частота лише 10 Гц, потім — 25 Гц, потім — 50 Гц, і далі сигнал йде з частотою 100 Гц. Подібні сигнали називають сигналами з лінійною частотною модуляцією (ЛЧМ-сигналами). На рис. 9.4 представлений спектр цього сигналу. Видно, що на ньому присутні ті ж частоти, що і на рис. 9.2, але між ними є також частотні гармоніки. Ці проміжні гармоніки можуть біти легко подіавлені за допомогою фільтрів, і таким чином спектр, зображений на рис. 9.4 легко може бути перетворений на спектр, представдений на рис. 9.2. Але ці спектри відносяться до абсолютно різних сигналів.

Перший сигнал є стаціонарним, другий — ні. З цього прикладу випливає важливий висновок:

Перетворення Фур'є не дає можливості сказати, *коли* у складі сигналу була та чи інша частота.

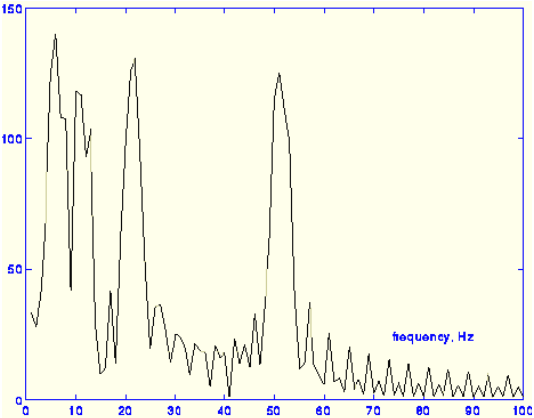


Рис. 9.4 – Спектр ЛЧМ-сигналу на рис. 9.3

Для подолання цього утруднення було придумане так зване *віконне перетворення Фур'є* (ВПФ). Суть його полягає у тому, що нестаціонарний сигнал розбивається на «ділянки стаціонарності». тобто інтервали, протягом яких сигнал залишається стаціонарим. Для кожного інтервалу робиться перетворення Фур'є, після чого отримані спектри додаються.

Першою проблемою ВКФ є визначення ділянок стаціонарності. Ми ще не знаємо, який у сигналу спектр, то звідки ми можемо знати, які в його складі частоти? І чи змінюються вони з часом? Чим коротші інтервали (так звані «вікна») ми використовуємо, тим ширші спектри від них отримуємо. А намагаючись отримати вузький спектр, ми ризикуємо взяти перетворення Фур'є від настільки довгого інтервалу існування сигналу, що на ньому він може бути нестаціонарним.

Ця проблема носить назву ***принципу невизначеності Гейзенберга***. Цей принцип в застосуванні до ПФ свідчить що неможливо отримати частотно-часове представлення сигналу з скільки завгодно великою точністю, тобто не можна визначити для довільного моменту часу, які спектральні компоненти присутні в сигналі. Єдине що ми можемо знати, так це часові інтервали, протягом яких в сигналі існують смуги частот. Ця проблема називається *проблемою роздільної здатності.*

Проблема роздільної здатності ПФ пов'язана з шириною віконної функції, що використовується. Ця ширина називається ще носієм функції. Якщо вікно достатнє вузьке, то говорять про *компактний носій.* Як ми побачимо надалі, ця термінологія особливо широко використовується в теорії вейвлет-перетворення

9.2 Основна ідея крупномасштабного аналізу

. Не дивлячись на те, що проблема роздільної здатності має фізичний характер і не може бути подолана, існує можливість аналізу сигналу за допомогою альтернативного підходу, який називається ***кратномасштабним аналізом*** (КМА). КМА, як видно з назви, аналізує сигнал на різних частотах і з різною роздільною здатністю одночасно. Кожна спектральна складова не аналізується окремо, як це було у випадку з ВПФ. КМА дозволяє отримати хорошу роздільну здатність за часом (погану по частоті) на високих частотах і хорошу роздільну здатність по частоті (погану за часом) на низьких частотах. Цей підхід стає особливо ефективним, коли сигнал має високочастотні компоненти короткої тривалості і протяжні нізкочастотні до омпоненти. На щастя, саме такі сигнали і зустрічаються найчастіше на практиці. Наприклад, такий сигнал показаний на рис.9.5. Він має порівняно низькочастотну компоненту впродовж всього сигналу і відносно високу — на коротких інтервалах всередині сигналу.

Одним з найпоширеніх видів КМА є *вейвлет-перетворення*, яке непогано вирішує проблему балансу роздільних здатностей як по часу, так і по частоті.

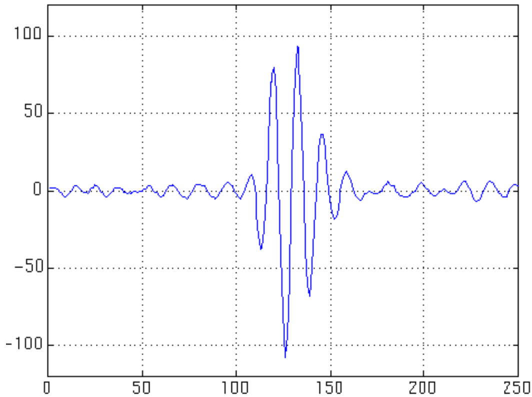


Рис. 9.5 – Приклад сигналу з тривалою низькочастотною компонентою та короткими високочастотними

9.3 Неперервне вейвлет-перетворення

9.3.1 Визначення НВП

Неперервне вейвлет-перетворення (НВП) виконується аналогічно ВПФ, в тому сенсі то сигнал перемножується з функцією (вейвлетом), так як і з віконною функцією при ВПФ, і перетворення виконується окремо для різних ділянок часу сигналу. Проте існує дві істотні різниці між ВПФ і НВП:

1. Не виконується ПФ зваженого з вейвлетом сигналу. Тому одиничний пік відповідає синусоїді, тобто від'ємні частоти не обчислюються.
2. Ширина вікна змінюється, так що перетворення обчислюється для кожної спектральної компоненти, що є найбільш важливою властивістю вейвлет-преобразования.

Неперервне вейвлет-преобразование визначається таким чином:

$$CWT_x^{\psi}(\tau, s) = \Psi_x(\tau, s) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \int x(t)\psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) dt, \qquad (9.2)$$

де $\psi(t)$ — функція перетворення, яка називається *материнським вейвлетом.* Слово *вейвлет* означає «маленька хвиля». Під маленькою розуміється те, що ця функція (вікно) має кінцеву ширину (компактний носій). Слово «хвиля» відображає той факт, що вейвлет-функция осцилює. Термін «материнський» означає, що функції з різною шириною носія, що використовуються у перетворенні, породжуються однією базовою функцією — материнським вейвлетом. Тобто материнський вейвлет є прототипом для всіх віконних функцій.

Як видно з виразу (9.2), перетворений сигнал є функцією двох змінних — τ і s, які називаються параметрами зміщення та масштабу відповідно. Термін «зміщення» тут використовується тому ж сенсі, що і при ПФ: він відноситься до місцеположення вікна, і вікно рухається уздовж сигналу. Цей термін відноситься таким чином, до часової інформації, присутньої в результаті перетворення. Проте при ВП ми не маємо частотного параметра, як це було при ВПФ . Замість нього тут є параметр масштабу, який можна визначити як величину, зворотну частоті. Параметр масштабу у вейвлет-аналізі має аналогію з масштабом географічних карт. Великі значення масштабу відповідають малій кількості деталей, глобальному представленню сигналу, а низькі значення масштабу дозволяють розрізнити деталі. Аналогічно, в термінах частоти, низькі частоти відповідають глобальній інформації про сигнал (яка міститься на всій його протяжності), а високі частоти — детальній інформації, притаманій прихованим особливостям, які мають зазвичай малу протяжність. Масштабування, як математична операція, розширює або стискає сигнал. Великі значення масштабів відповідають розширенню сигналу, а малі — стисненню. Якщо $f(t)$ — початкова функція, то $f(st)$ відповідає стисненій версії $f(t)$, якщо $s > 1$ і розширеній версії, якщо $s < 1$. Проте у визначенні вейвлет-перетворення (вираз (9.2)) коефіцієнт масштабу стоїть у знаменнику. Тому при $s > 1$ сигнал буде розширюватися, а при $s < 1$ — стискатися.

Для відновлення сигналу з вейвлет-образу використовується *обернене вейвлет-перетворення*:

$$f(t) = \int_{0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2} \Psi(s, \tau) \psi \left(\frac{t - \tau}{s} \right) ds d\tau. \qquad (9.3)$$

Знайшовши вейвлет-образ (або його ще називають вейвлет-спектром), можливо визначити повну енергію сигналу:

$$E_f = \int |f(t)|^2 \, dt = \int \int \Psi^2(s, \tau) \frac{1}{s^2} \, ds d\tau$$

та *глобальний спектр енергій* — розподіл повної енергії по масштабах (так звану *скейлограму вейвлет-перетворення*):

$$E_\Psi(s) = \int \Psi^2(s, \tau) \, d\tau.$$

9.3.2 Отримання НВП

Далі приведена інтерпретація виразу (9.2). Нехай $x(t)$ — аналізований сигнал. Вибирається материнський вейвлет, який буде прототипом для всіх функцій (вікон), які виходять з нього шляхом стиснення (розширення). Існує декілька функцій, що застосовуються в якості материнських вейвлетів. Розглядатися буде приклад з так званим вейвлетом Морле .

Після вибору материнської функції обчислення починаються з масштабу $s = 1$. НВП обчислюється для всіх значень s, менших і більших 1. Проте повне перетворення зазвичай не потрібне, оскільки реальні сигнали обмежені по смузі. Тому число масштабів може бути обмежене. У прикладах цього розділу ми також використовуємо обмежену кількість масштабів.

Процедура аналізу стартує з масштабу $s = 1$ і продовжується при значеннях s, що збільшуються, тобто аналіз починається з високих частот і проводиться у бік низьких частот. Перше значення s відповідає найбільш стислому вейвлету. При збільшенні значення s вейвлет розширюється.

Вейвлет поміщається в початок сигналу, в точку, яка відповідає моменту часу $t = 0$. Вейвлет-функция масштабу $s = 1$ перемножується з сигналом та інтегрується на всьому часовому інтервалі. Інтеграл помножується на константу $\frac{1}{\sqrt{|s|}}$ для нормалізації, тобто для того, щоб сигнал на кожному масштабі мав би однакову енергію.

Вейвлет масштабу $s = 1$ потім зрушується праворуч на τ до точки $t = \tau$, і процедура повторюється. Отримуємо ще одне значення, яке відповідає $t = \tau, s = 1$ на частотно-часовій площині.

Ця процедура повторюється доти, доки вейвлет не досягне кінця сигналу. Таким чином отримуємо рядок точокна масштабно-часовій площині для масштабу $s = 1$.

Тепер збільшимо s на деяке значення. Взагалі кажучи, оскільки перетворення неперервне, то τ і s повинні змінуватися неперервно. При виконанні перетворення в комп'ютері ми обчислюємо апроксимацію, збільшуючи обидва параметри на деяке мале значення. Тим самим ми здійснюємо дискретизацію масштабно-часової площини.

Приведена вище процедура повторюється для кожного значення s. При цьому рядок за рядком заповнюється масштабно-часова площина. Нижче рисунки ілюструють процес перетворення крок за кроком.

На рис.9.6 показані сигнал і вейвлет-функция для чотирьох різних значень τ . Як сигнал використовуємо обмежену версію сигналу, показаного на рис. 9.5. Значення масштабу $s = 1$, відповідає найменшому значенню, або найбільшій частоті. На рисунку видно, наскільки компактний носій. Він повинен бути

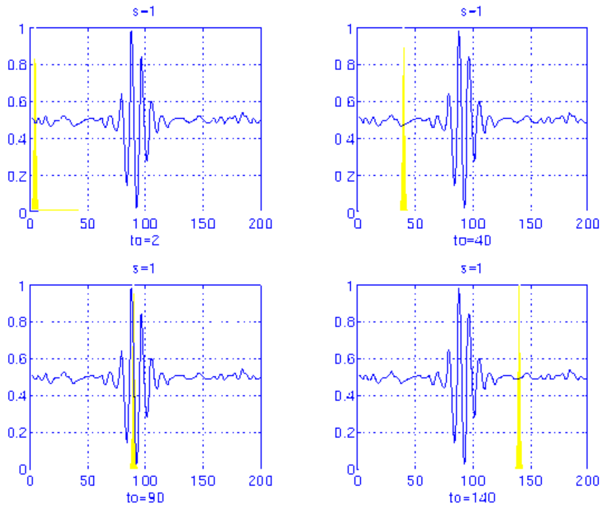


Рис. 9.6 – Приклад ВП сигналу при $s = 1$

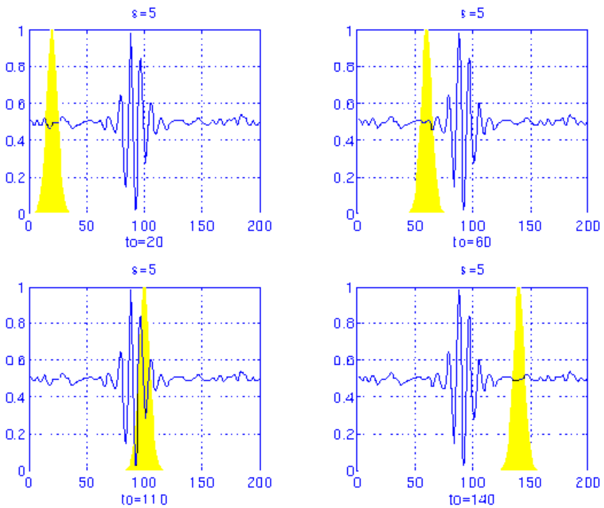


Рис. 9.7 – Приклад ВП сигналу при $s = 5$

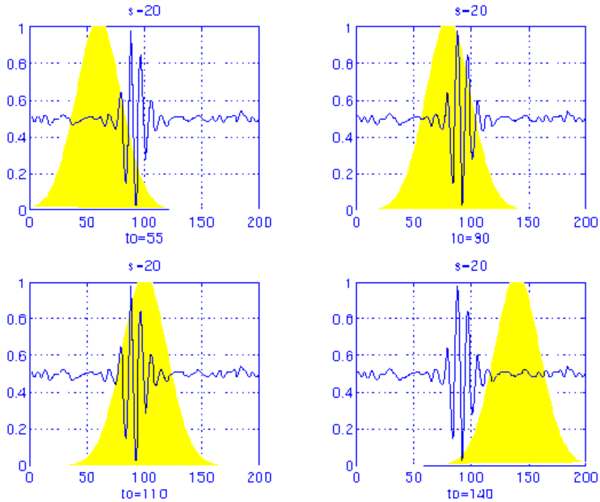


Рис. 9.8 – Приклад ВП сигналу при $s = 20$

таким же вузьким, як і тривалість найвищої частоти сигналу. На рисунку показані чотири різні позиції вейвлет-функции в точках $t_0 = 2, t_0 = 40, t_0 = 90$ і $t_0 = 140$. У кожній позиції вона перемножується із сигналом. Добуток буде ненульовим лише тоді, коли сигнал перетинається з носієм вейвлета, і нульовим — в решті випадків. Зміщення вейвлета за часом відповідає часовій локалізації сигналу, а зміщення по масштабу — масштабна (частотна) локалізація.

Якщо в сигналі присутні спектральні компоненти, відповідні поточному значенню s (яке в даному випадку 1), той добуток вейвлета з сигналом в інтервалі, де ця спектральна компоненту присутня, дає відносно велике значення, інакше — добуток малий або дорівнює нулю. Сигнал, показаний на рис. 9.6, має спектральні компоненти, порівнянні з шириною вікна при $s = 1$ на інтервалі біля $t = 100$ мс.

НВП сигналу, показаного на рис. 9.6, дає великі значення для низьких масштабів близько часу $t = 100$ мс і малі значення

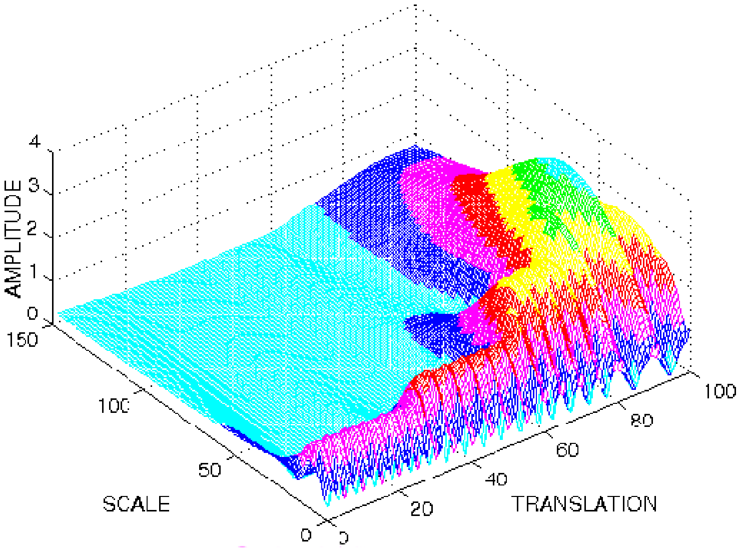


Рис. 9.9 – Вейвлет-образ сигналу з рис. 9.5

в решті інтервалів часу. Для високих масштабів, навпаки, НВП дає великі значення майже на всій тривалості сигналу, оскільки низькі частоти присутні в нім весь час.

На рис. 9.7 та 9.8 показаний той же процес для масштабів $s = 5$ і $s = 20$ відповідно. Відзначимо, що ширина вікна змінюється із збільшенням масштабу. Із збільшенням ширини вікна перетворення виділяє все більш низькі частоти. Кінець кінцем ми отримуємо точку на масштабно-часовій площині для кожного значення масштабу і часу. Обчислення при фіксованому масштабі дають рядок на площині, а обчислення при фіксованому часі — стовпець. Кінцевий результат неведений на рис. 9.9. Малі масштаби відповідають високим частотам. Тому, на рис. 9.9 частина графіка, де масштаби близькі нулю, відповідає високим частотам. Верхня частота аналізованого сигналу 30 Гц і вона з'являється на найменших масштабах при зміщеннях від 0 до 30. Найнижча частота сигналу — 5 Гц з'являється в кінці осі зміщень і на найбільших масштабах, як і очікувалося.

9.3.3 Найбільш часто використовувані вейвлети

При конструюванні базисної аналізуючої функції $\psi(t)$ повинні виконуватися наступні необхідні умови.

1. *Локалізація* — вейвлет повинен бути локалізований поблизу нуля аргументу як в часовому, так і в частотному просторі.
2. *Нульове середнє*:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)\,dt = 0.$$
Як наслідок, вейвлет повинен бути знакозмінною функцією.
3. *Обмеженість*:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2\,dt < \infty.$$
4. Вейвлет повинен бути достатньо швидко затухаючою функцією часової (просторової) змінної.

Вейвлет називається *ортогональним*, якщо сімейство $\{\psi_k\}$ представляє ортонормований базис функціонального простору $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. В цьому випадку будь-яка функція може бути представлена у вигляді ряду

$$f(t) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_{jk}\psi_{jk}(t),$$

де

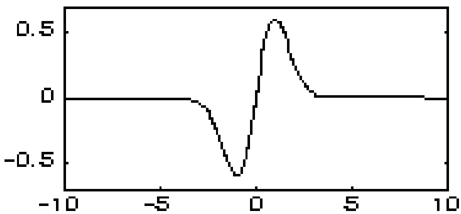
$$c_{jk} = 2^{\frac{j}{2}} \int\limits_{-\infty} +\infty f(t)\psi\left(2^j t - k\right)\, dt.$$

Вейвлети прийнято класифікувати за виглядом та особливостями функції або за іменем вченого, який вперше запропонував той чи інший вейвлет. Відомі вейвлети Хаара, Симлета, Добеши, Коіфлетса, Гауса, Морле, Шенона, Мейера, біортогональний та зворотній біортогональний, частотний B-сплайновий, «мексиканський капелюх», «французький капелюх» та інші.

Далі наводяться приклади деяких найбільш поширених вейвлетів з аналітичними виразами та графіками.

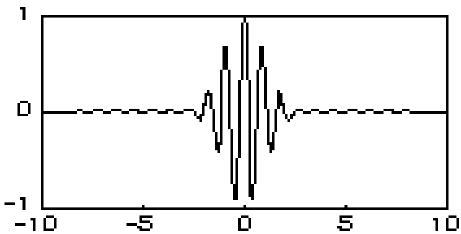
Класичний вейвлет

$\psi(t) = t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$



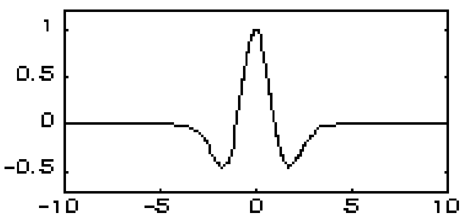
Вейвлет Морле

$\psi(t) = e^{ikt-\frac{t^2}{2}}$

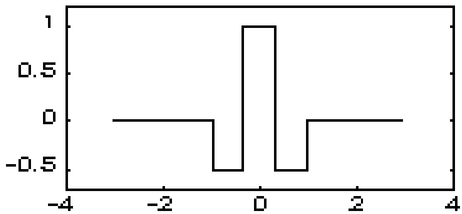


«Мексиканський капелюх»

$\psi(t) = \left(1 - t^2\right) e^{-\frac{t^2}{2}}$

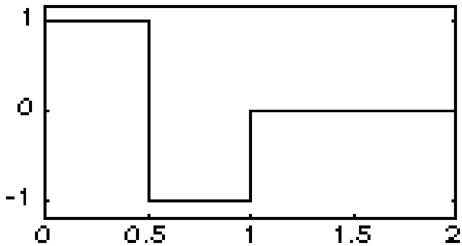


«Французький капелюх»



$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1/3, \\ -1/2, & 1/3 < |t| \geqslant 1, \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

Вейвлет Хаара



$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t < 1/2, \\ -1/2, & 1/2 \leqslant t < 1, \\ 0, & t < 0, t \geqslant 1 \end{cases}$$

9.4 Дискретне вейвлет-перетворення

Неперервне вейвлет-перетворення вимагає великої кількості обчислень. Крім того, в результаті виходить надмірна кількість коефіцієнтів, яка набагато перевершує кількість відліків початкового сигналу. *Дискретне вейвлет-перетворення* (ДВП) забезпечує достатньо інформації як для аналізу сигналу, так і для його синтезу, будучи разом з тим економним, як по числу операцій, так і по необхідній пам'яті.

ДВП оперує з дискретними значеннями параметрів s і τ, які задаються, як правило, у вигляді степеневих функцій:

$$a = a_0^{-m}, \quad b = k \cdot a_0^{-m}, \quad a_0 > 1, \quad m, k \in \mathbb{Z},$$

де $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел, m — параметр масштабу, k — параметр зсуву. Базис простору $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ у дискретному представленні:

$$\psi_{k,m} = |a_0|^{m/2} \psi\left(a_0^m t - k\right), \quad m, k \in \mathbb{Z}, \quad \psi(y) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}).$$

Вейвлет-коефіцієнти прямого перетворення:

$$C_{m,k} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_{m,k}(t)\,dt.$$

У загальному випадку, значення a може бути довільним, але зазвичай приймається рівним 2, при цьому перетворення називається *діадним вейвлет-перетворенням*. Для діадного перетворення розроблений швидкий алгоритм обчислень, аналогічний швидкому перетворенню Фурье, що зумовило його широке використання при аналізі дискретних функцій і масивів цифрових даних. Зворотне дискретне перетворення для безперервних сигналів при нормованому ортогональному вейвлетному базисі простору:

$$s(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_{m,k}\psi_{m,k}(t).$$