Заміна змінної

Обчислення невизначених інтегралів методом заміни змінної ґрунтується на формулі

$$\int f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)\,dx = F\left(\varphi(x)\right)+C,$$

де $F(x)$ – первісна функції $f(x)$; $\varphi'(x)$ – похідна функції $\varphi(x)$.

При застосуванні формули на практиці зручно перейти до нової змінної t, поклавши $t=\varphi(x)$. Розглядаючи t як функцію змінної x, запишемо диференціал $dt=\varphi'(x)\,dx$. В результаті приходимо до інтеграла відносно змінної t: $\int f(t)\,dt = F(t)+C$. Поклавши у правій частині цієї рівності $t=\varphi(x)$, дістаємо остаточно $F\left(\varphi(x)\right)+C$.

Якщо маємо інтеграл $\int p(x)\,dx$, то його обчислення методом заміни змінної зручно оформляти в загальному випадку наступним чином:

$$\int p(x)\,dx = \int f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)\,dx = \left|\begin{matrix} t=\varphi(x) \\ dt=\varphi'(x)\,dx \end{matrix}\right| =$$

$$= \int f(t)\,dt = F(t)+C = F\left(\varphi(x)\right)+C.$$

Приклад 16. $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

⌈ Оскільки $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, то дістанемо

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \left|\begin{matrix} t=\ln x \\ dt=\dfrac{1}{x}\,dx=\dfrac{dx}{x} \end{matrix}\right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}+C = 2\sqrt{\ln x}+C \quad \rfloor$$

Приклад 17. $\int \dfrac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx$.

⌈ Оскільки $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, то дістанемо

$$\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx = \left|\begin{matrix} t=\operatorname{tg} x \\ dt=\dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx \end{matrix}\right| = \int e^t\,dt = e^t+C = e^{\operatorname{tg} x}+C$$

Приклад 18. $\int \frac{x\ dx}{x^2-1}$.

$\ulcorner$ Оскільки $\left(x^2-1\right)'=2x$, то виконавши тотожне перетворення підінтегральної функції, дістанемо

$$\int \frac{x\ dx}{x^2-1}=\int \frac{2x\ dx}{2\left(x^2-1\right)}=\begin{vmatrix} t=x^2-1 \\ dt=2x\ dx \end{vmatrix}=\int \frac{dt}{2t}=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|t|+C=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|+C. \quad \lrcorner$$

Інтегрування частинами

Обчислення невизначених інтегралів методом інтегрування частинами полягає у використанні формули

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du\ ,$$

де u та v – функції змінної x; $du=u'(x)\ dx$, $dv=v'(x)\ dx$.

Якщо потрібно обчислити інтеграл $\int f(x)\ dx$, то підінтегральний вираз $f(x)\ dx$ слід представити у вигляді $u\,dv$ так, щоб інтеграл у правій частині формули був простішим за заданий $\int f(x)\ dx=\int u\ dv$. Зауважимо, що функція v, яка фігурує у правій частині, знаходиться за очевидною формулою $v=\int v'(x)\ dx=\int dv$, яка означає, що функція $v(x)$ є первісною своєї похідної $v'(x)$.

Приклад 19. $\int x\cos 2x\ dx$.

$\ulcorner$ Покладемо $u=x$, $dv=\cos 2x\ dx$. Тоді $du=(x)'\ dx=1\cdot dx=dx$, $v=\int dv=\int \cos 2x\ dx=\frac{\sin 2x}{2}$ (беремо заради простоти $C=0$). Застосовуючи формулу інтегрування частинами, дістанемо

$$\int x\cos 2x\ dx=x\cdot\frac{\sin 2x}{2}-\int \frac{\sin 2x}{2}\ dx=$$

$$=\frac{x\sin x}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{-\cos 2x}{2}\right)+C=\frac{x\sin 2x}{2}+\frac{\cos 2x}{4}+C. \quad \lrcorner$$

Приклад 20. $\int (5x-2)e^x\, dx$.

⌐ Покладемо $u=5x-2$, $dv=e^x\, dx$. Тоді $du=(5x-2)'\, dx=5dx$, $v=\int dv=\int e^x\, dx=e^x$. Застосовуючи формулу інтегрування частинами, дістанемо

$$\int (5x-2)e^x\, dx=(5x-2)e^x-\int e^x 5\, dx=(5x-2)e^x-5\int e^x\, dx=$$

$$=(5x-2)e^x-5e^x+C=e^x(5x-7)+C. \quad \lrcorner$$

Приклад 21. $\int \arcsin x\ dx$.

⌐ Покладемо $u=\arcsin x$, $dv=dx$. Тоді $du=(\arcsin x)'\, dx=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$, $v=\int dx=x$. За формулою інтегрування частинами

$$\int \arcsin x\ dx=\arcsin x\cdot x-\int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx.$$

Обчислимо інтеграл у правій частині методом заміни змінної:

$$\int \frac{x\ dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}\int \frac{-2x\ dx}{\sqrt{1-x^2}}=\left|\begin{matrix} t=1-x^2 \\ dt=-2x\ dx\end{matrix}\right|=-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{t}+C=-\sqrt{1-x^2}+C.$$

Тоді,

$$\int \arcsin x\ dx=\arcsin x\cdot x-\left(-\sqrt{1-x^2}\right)+C=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$$