Розділ. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

Тема 1. Вектори та дії над ними

Величини можуть бути двох видів. Є величини, які визначаються своїм числовим значенням в тих чи інших одиницях вимірювання, наприклад, довжина, об’єм, маса, температура тощо. Такі величини називаються ***скалярними величинами*** або ***скалярами***.

Разом з тим, є величини, які характеризуються не лише своїми числовими значеннями, а й напрямком, наприклад, швидкість, сила тощо.

Величини, які характеризуються не тільки числовим значенням, а й напрямком, називають ***векторними величинами*** або ***векторами***.

1. Поняття вектора

Означення 1. ***Вектором*** *(геометричним)* називають напрямлений відрізок, тобто відрізок, для якого вказано початок A і кінець B. Позначення вектора: $\overrightarrow{AB}$ або $\vec{a}$.

Означення 2. ***Довжиною*** або *модулем* вектора $\overrightarrow{AB}$ називають довжину відрізка AB. Позначення: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, $|\vec{a}|$.

Означення 3. Вектор $\vec{a}$ називають ***одиничним***, якщо $|\vec{a}|=1$.

Означення 4. Вектор, у якого початок і кінець співпадають, називається ***нульовим*** вектором. Позначення: $\vec{0}$.

Означення 5. Вектори, що лежать на одній прямій або на паралельних прямих, називаються ***колінеарними***. Для позначення колінеарності використовують символ $\|$. Нульовий вектор вважається колінеарним довільному вектору. Два колінеарні вектори можуть бути ***співнапрямленими*** (позначення $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CD}$), або ***протилежнонапрямленими*** (позначення $\overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{CD}$).

Означення 6. $\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_2B_2}, \ldots, \overrightarrow{A_kB_k}$ називаються ***компланарними***, якщо вони або лежать в одній площині, або існує площина, до якої кожен з цих векторів паралельний.

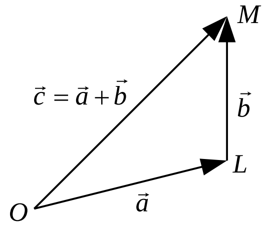
Означення 7. Два ненульових вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються ***рівними*** (позначення $\vec{a}=\vec{b}$), якщо вони співнапрямлені і мають однакову довжину, тобто $|\vec{a}|=|\vec{b}|$.

Звідси слідує, що всі вектори, які отримуємо із заданого вектора шляхом паралельного перенесення, рівні.

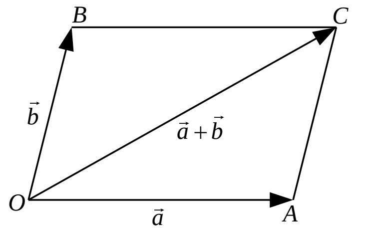
2. Лінійні операції над векторами та їх властивості

2.1. Додавання векторів.

<u>**Означення 8**</u>. ***Сумою векторів*** $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, який напрямлений від початку вектора $\vec{a}$ до кінця вектора $\vec{b}$, за умови, що кінець вектора $\vec{a}$ співпадає з початком вектора $\vec{b}$ (правило трикутника):



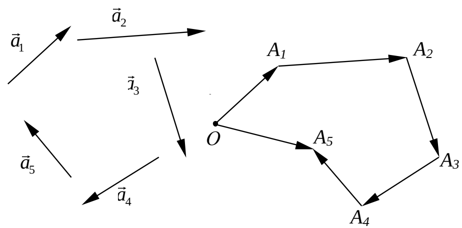
Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні, то суму $\vec{a} + \vec{b}$ можна також знайти за правилом паралелограма, яке ілюструється наступним рисунком:



Для того щоб додати n векторів, потрібно записати їх у довільному порядку $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$, потім прикласти перший вектор до якої-небудь точки O, а кожен наступний вектор – до кінця попереднього, так що $\vec{a}_1 = \overrightarrow{OA_1},\ \vec{a}_2 = \overrightarrow{A_1A_2}, \ldots,\ \vec{a}_n = \overrightarrow{A_{n-1}A_n}$.

Тоді сумою $\vec{a}_1 + \vec{a} + \ldots + \vec{a}_n$ буде вектор $\overrightarrow{OA_n}$, який замикає послідовність векторів-доданків.

Вказане правило додавання декількох векторів називається “правилом многокутника”.



2.2. Множення вектора на число

<u>Означення 9</u>. ***Добутком вектора*** $\vec{a}$ ***на число*** α називається такий вектор $\vec{b}$, для якого виконуються умови:

1) $|\vec{b}| = |\alpha| \, |\vec{a}|$;
2) вектор $\vec{b}$ колінеарний вектору $\vec{a}$;
3) $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$, якщо $\alpha > 0$ та $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$, якщо $\alpha < 0$.

Безпосередньо з означення випливає, що $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$; $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$; $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$; $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$.

Добуток вектора $\vec{a}$ на число α будемо позначати $\alpha\vec{a}$ або $\vec{a}\alpha$.

Теорема 1. Для того щоб два вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ були колінеарними, необхідно і достатньо, щоб існувало таке число λ, для якого виконується рівність

$$\vec{b} = \lambda\vec{a} \tag{1}$$

Доведення теореми 1 у Додатку 2.

2.3. Віднімання векторів

<u>Означення 10</u>. ***Різницею векторів*** $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають суму векторів $\vec{a}$ та $(-1)\vec{b}$, тобто $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\vec{b}$. Вектор $-\vec{b} = (-1) \cdot \vec{b}$ називають ***протилежним*** до вектора $\vec{b}$.

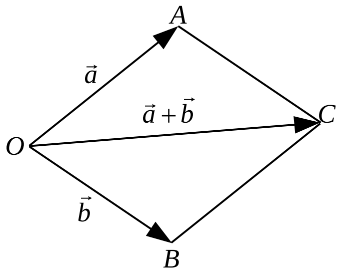
Властивості дій над векторами розглянути самостійно (Додаток 3)

Приклади.

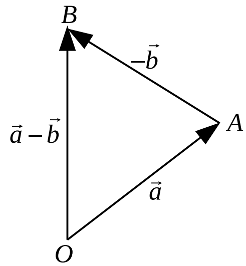
1. За даними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ побудувати вектори: а) $\vec{a}+\vec{b}$;

б) $\vec{a}-\vec{b}$.

а) Зведемо вектори до спільного початку і застосуємо правило паралелограма:



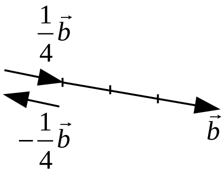
б) Запишемо вектор $\vec{a}-\vec{b}$ як $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$ і застосуємо правило трикутника:



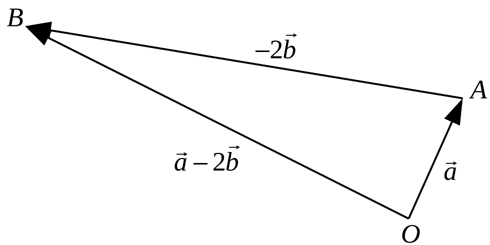
2. За даними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ побудувати вектори: а) $-\dfrac{1}{4}\vec{b}$;

б) $\vec{a}-2\vec{b}$.

а) Напрям вектора $-\dfrac{1}{4}\vec{b}$ протилежний напряму вектора $\vec{b}$, а модуль – у 4 рази менший за модуль вектора $\vec{b}$:



б) Вектор $\vec{a}-2\vec{b}$ запишемо як $\vec{a}+\left(-2\vec{b}\right)$. За правилом трикутника:



3. Лінійна залежність векторів. Базис

<u>Означення 11</u>. Вираз $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n$, де $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ - довільні дійсні числа називається ***лінійною комбінацією векторів*** $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$.

<u>Означення 12</u>. Якщо виконується рівність $\vec{a} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n$, де $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ - деякі дійсні числа, то кажуть, що вектор $\vec{a}$ ***розкладено*** за векторами $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ називають ***коефіцієнтами*** цього ***розкладу***.

<u>Означення 13</u>. Систему векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ називають ***лінійно залежною***, якщо знайдуться числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, хоча б одне з яких відмінне від нуля, такі що $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n = 0$. В іншому випадку, систему називають ***лінійно незалежною***.

Іншими словами скінченна система векторів називається лінійно залежною, якщо існує вектор системи, який є лінійною комбінацією решти векторів системи. Якщо такого вектора не існує, то система називається лінійно незалежною. Нескінченна система векторів у лінійному просторі називається лінійно незалежною, якщо довільна її скінченна множина векторів лінійно незалежна.

<u>Означення 14.</u>

Базисом на прямій називають довільний ненульовий вектор цієї прямої.

Базисом на площині називають довільну впорядкована пару неколінеарних векторів цієї площини.

Базисом у просторі називають довільну упорядковану трійку некомпланарних векторів.

<u>Означення 15</u>. Базис називається ***ортонормованим*** (***декартовим прямокутним***), якщо базисні вектори взаємно перпендикулярні і їх довжини дорівнюють одиниці.

Теорема 2. Будь-який вектор, паралельний деякій прямій, можна розкласти за базисом на цій прямій.

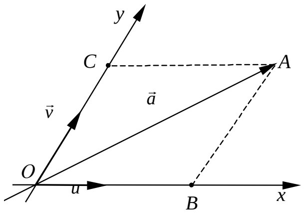
Будь-який вектор, паралельний деякій площині, можна розкласти за базисом на цій площині.

Будь-який вектор простору можна розкласти за базисом у просторі.

Коефіцієнти розкладу у кожному випадку визначаються однозначно.

Доведення (для випадку площини).

Доведемо, що існує розклад вектора $\vec{a}$ площини за базисом $\{\vec{u};\ \vec{v}\}$.Перенесемо всі три вектори $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$ в одну точку O площини . Через кінець A вектора $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ проведемо пряму



паралельно вектору $\vec{v}$ до її перетину з прямою, на якій лежать вектор $\vec{u}$. Оскільки $\vec{u} \not\uparrow\uparrow \vec{v}$, то ці прямі перетинаються. Позначимо точку їх перетину через B.

Тоді

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} \qquad \text{(I)}$$

Оскільки $\overrightarrow{OB} \parallel \vec{u}$, то існує таке число α, що

$$\overrightarrow{OB} = \alpha\vec{u}\ . \qquad \text{(II)}$$

Вектор $\overrightarrow{BA} \parallel \vec{v}$, тому існує таке число β, що

$$\overrightarrow{BA} = \beta\vec{v}\ . \qquad \text{(III)}$$

Підставляючи (II) і (III) в рівність (I), отримуємо

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}\ . \qquad \text{(IV)}$$

Отже, кожному вектору $\vec{a}$ відповідає пара чисел $\alpha,\ \beta$, для яких виконується рівність (IV).

Рівність (IV) називається розкладом вектора $\vec{a}$ у базисі $\{\vec{u};\ \vec{v}\}$.

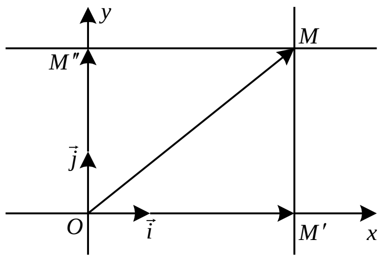
<u>Означення 16.</u> Коефіцієнти розкладу вектора $\vec{a}$ за базисом називають *координатами вектора* $\vec{a}$ *в цьому базисі.*

Наприклад, якщо $\vec{a} = X_1\vec{e}_1 + X_2\vec{e}_2 + X_3\vec{e}_3$, то числа $X_1,\ X_2,\ X_3$ називаються *координатами вектора* $\vec{a}$ *в базисі* $\{\vec{e}_1;\ \vec{e}_2;\ \vec{e}_3\}$.

4. Системи координат. Вектори в системі координат

Розглянемо на площині взаємно перпендикулярні одиничні вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$ (у просторі – $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) з початком у точці O. Вважатимемо їх напрямленими так, що менший поворот вектора $\vec{i}$ до вектора $\vec{j}$ (у просторі – це менший поворот від $\vec{i}$ до $\vec{j}$, якщо дивитися з кінця вектора $\vec{k}$) здійснюється проти руху годинникової стрілки. У цьому випадку кажуть, що в площині визначено ***прямокутну декартову систему координат*** $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$ (у просторі – ($O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$)), а вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$ (у просторі – $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) утворюють *ортонормований базис*. Прямі, що проходять через точку O паралельно до векторів $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, називаються ***осями координат*** і позначаються Ox, Oy, Oz (відповідно ***вісь абсцис, вісь ординат, вісь аплікат***).

Розглянемо довільну точку M на площині. Через неї проведемо дві прямі, які паралельні осям координат. Точки перетину M' і M'' цих прямих відповідно з осями Ox і Oy називають *проекціями* точки M на осі координат. Очевидно, що $\overrightarrow{OM'} = x\vec{i}$, $\overrightarrow{OM''} = y\vec{j}$. Числа x, y називаються ***декартовими координатами точки*** $M\left(x;y\right)$ і має місце рівність $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.



Вектор $\overrightarrow{OM} = \vec{r}\left(M\right)$ називають ***радіус-вектором*** точки M, а числа x, y – *координатами вектора* $\vec{r}\left(M\right)$. При цьому пишуть $\vec{r}\left(M\right) = \left(x;y\right)$.

Аналогічно у просторі:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},\ \ M\left(x;y;z\right),\ \ \vec{r}\left(M\right) = \left(x;y;z\right).$$

Довільний вектор $\vec{a}$ можна записати у вигляді

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \quad \text{або} \quad \vec{a} = \left(a_x;\ a_y;\ a_z\right).$$

Якщо точка $A\left(x_1;\ y_1;\ z_1\right)$ – початок вектора, а точка $B\left(x_2;\ y_2;\ z_2\right)$ – його кінець, то координати вектора $\overrightarrow{AB}$ знаходять за формулою

$$\overrightarrow{AB} = \left(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1 \right). \qquad (2)$$

Довжину вектора $\vec{a} = \left(a_x;\ a_y;\ a_z \right)$ визначають через його координати за формулою

$$\left| \vec{a} \right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \qquad (3)$$

Два вектори $\vec{a} = \left(a_x;\ a_y;\ a_z \right)$ і $\vec{b} = \left(b_x;\ b_y;\ b_z \right)$ колінеарні тоді і лише тоді, коли їх відповідні координати пропорційні, тобто

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \qquad (4)$$

При додаванні векторів їх відповідні координати додаються:

$$\vec{a} + \vec{b} = \left(a_x + b_x;\ a_y + b_y;\ a_z + b_z \right). \qquad (5.1)$$

При відніманні векторів їх відповідні координати віднімаються:

$$\vec{a} - \vec{b} = \left(a_x - b_x;\ a_y - b_y;\ a_z - b_z \right). \qquad (5.2)$$

При множенні вектора на число всі координати множаться на те ж число:

$$\lambda \vec{a} = \left(\lambda a_x;\ \lambda a_y;\ \lambda a_z \right). \qquad (6)$$

Напрямними косинусами вектора $\vec{a} = \left(a_x;\ a_y;\ a_z \right)$ називають косинуси кутів α, β, γ, які вектор $\vec{a}$ утворює з додатними напрямами осей координат:

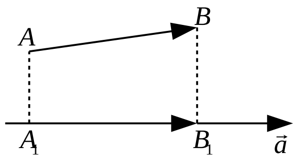
$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}; \quad \cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}};$$
$$\cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}. \qquad (7)$$

З формул (7) випливає, що

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (8)$$

Ортом $\vec{a}_0$ ***вектора*** $\vec{a}$ називають одиничний вектор, координатами якого є напрямні косинуси: $\vec{a}_0 = (\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma)$. На практиці для знаходження орта часто використовують формулу

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}. \qquad (9)$$



Нехай задано вектори $\vec{a}$ і $\overrightarrow{AB}$ (див. рисунок). *Проекцією вектора* $\overrightarrow{AB}$ *на вектор* $\vec{a}$ (позначення $\text{пр}_{\vec{a}}\overrightarrow{AB}$) називають число $\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, якщо напрями векторів $\vec{a}$ та $\overrightarrow{A_1B_1}$ співпадають, і число $-\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, якщо їх напрями протилежні.

Проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\vec{a}$ можна обчислити за формулою

$$\text{пр}_{\vec{a}}\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos\varphi, \qquad (10)$$

де φ – кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\vec{a}$, $\varphi = \angle\left(\overrightarrow{AB},\ \vec{a}\right)$ $(0 \le \varphi \le \pi)$.

Приклади.

1. Дано точки $A(1;\,-3;\,4)$ і $B(3;\,1;\,5)$. Знайти координати вектора $\overrightarrow{AB}$ та його довжину.

За формулою (2) маємо $\overrightarrow{AB}=\left(3-1;\,1-(-3);\,5-4\right)=(2;\,4;\,1)$.

За формулою (3) $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2^2+4^2+1^2}=\sqrt{21}$.

2. Знайти довжину вектора $2\vec{a}-\vec{b}$, якщо $\vec{a}=(3;\,-2;\,1)$, $\vec{b}=(2;\,1;\,-3)$.

Знайдемо координати вектора за формулами (6), (5.2):

$2\vec{a}-\vec{b}=2(3;\,-2;\,1)-(2;\,1;\,-3)=(6;\,-4;\,2)-(2;\,1;\,-3)==(4;\,-5;\,5)$.

За формулою (2) знайдемо довжину вектора:

$$\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{4^2+(-5)^2+5^2}=\sqrt{66}.$$

3. Перевірити колінеарність векторів $\vec{a}=(3;\,2;\,-4)$ і $\vec{b}=(-6;\,-4;\,8)$.

За формулою (4) маємо

$$\frac{3}{-6}=\frac{2}{-4}=\frac{-4}{8},\quad -\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \vec{a}\parallel\vec{b}.$$

Отже, вектори колінеарні.

4. Знайти орт вектора $\vec{a}=(15;\,0;\,8)$.

За формулою (9) знаходимо

$$\vec{a}_0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\left(\frac{15}{\sqrt{15^2+0^2+8^2}};\ \frac{0}{\sqrt{15^2+0^2+8^2}};\ \frac{8}{\sqrt{15^2+0^2+8^2}}\right)==\left(\frac{15}{17};\,0;\,\frac{8}{17}\right).$$

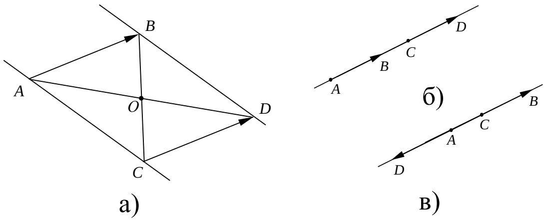
Додаток 1. Означення співнапрямленості векторів.

Довільна точка A, що лежить на прямій l, розбиває цю пряму на два промені l_+ і l_- з початком у точці A. Ці промені називаються такими, що доповнюють один одного. Один з променів визначає додатний напрямок прямої l, а другий промінь – від'ємний напрямок цієї прямої.

<u>Означення</u>. Два вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$, які лежать на одній прямій l, назвемо співнапрямленими, якщо перетин променів AB і CD є променем (див. рис. 1б)), і протилежнонапрямленими, якщо цей перетин не є променем (див. рис. 1в)).

Два колінеарних вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$, які не лежать на одній прямій, назвемо співнапрямленими (позначення $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CD}$), якщо вони лежать в одній півплощині по відношенню до прямої AC (див. рис. 1а)), і протилежнонапрямленими (позначення $\overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{CD}$), якщо – в різних півплощинах по відношенню до цієї прямої.

Отже, говорити про те, що два напрямлених відрізки мають однаковий напрямок чи різні напрямки можна лише в тому випадку, коли вони колінеарні.



а) б) в)

Рис. 1

Додаток 2. Доведення Теореми 1.

<u>*Доведення*</u>. *Необхідність*. Нехай вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ колінеарні. Тоді можливі два випадки:

1) $\vec{a}$ та $\vec{b}$ співнапрямлені. У цьому випадку

$$\vec{b} = \frac{|\vec{b}\,|}{|\vec{a}\,|}\vec{a}\,. \qquad (*)$$

Справедливість рівності (*) випливає з наступних міркувань.

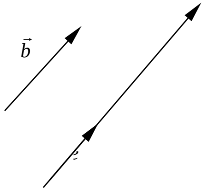


Рис. 1

Вектор $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}\,|} = \vec{e}$ є одиничним вектором (див. рис. 1) і для того щоб отримати вектор $\vec{b}$, слід вектор $\vec{e}$ помножити на довжину вектора $\vec{b}$.

2) $\vec{a}$ та $\vec{b}$ протилежнонапрямлені. У цьому випадку має місце рівність

$$\vec{b} = -\frac{|\vec{b}\,|}{|\vec{a}\,|}\vec{a}\,. \qquad (**)$$

Доведення рівності (**) аналогічне доведенню рівності (*). Ввівши позначення $\dfrac{|\vec{b}\,|}{|\vec{a}\,|} = \lambda$ для випадку 1) та $-\dfrac{|\vec{b}\,|}{|\vec{a}\,|} = \lambda$ для випадку 2), приходимо до рівності (4).

Достатність. Нехай існує таке число λ, для якого справедлива рівність (4). Тоді згідно з означенням добутку вектора на число (див. пункт 2) означення 1) вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ колінеарні, що повністю доводить теорему.

Додаток 3. Властивості дій над векторами.

Теорема 1. Для довільних векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ справедливі співвідношення

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (закон комутативності),
2. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ (закон асоціативності).

Доведення. 1. Для доведення властивості 1 скористаємось правилом паралелограма для додавання двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Нехай задано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. У точці O будуємо зображення векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ так, що $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ (рис. 4).

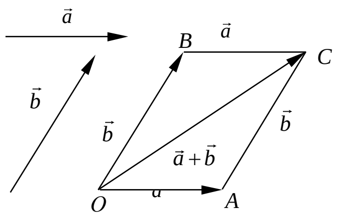


Рис. 4

На цих векторах будуємо паралелограм $OBCA$. Тоді напрямлений відрізок діагоналі паралелограма $\overrightarrow{OC}$ буде визначати вектор $\vec{a}+\vec{b}$. Дійсно, з ΔOAC маємо $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$. З іншого боку, з трикутника ΔOBC отримуємо $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\vec{b}+\vec{a}$, що і доводить співвідношення 1.

2. Нехай дано вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Якщо $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{BC}$ (рис. 5),

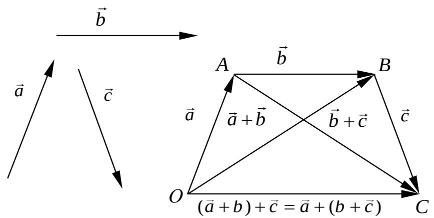


Рис. 5

то $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$ і $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$.

Оскільки

$$\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC},$$

то

$$\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}.$$

Отже, вектори $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$ і $\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ є одним і тим же вектором $\overrightarrow{OC}$, який замикає послідовність трьох векторів $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{c}$.

Теорема 2. Добуток вектора на число має такі властивості:

$$\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}\ ; \qquad (1)$$

$$(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}\ ; \qquad (2)$$

$$\alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}\ . \qquad (3)$$

Доведення. Розглянемо, наприклад, доведення властивості (1).

З означення операції множення вектора на число одразу випливає, що вектори, які стоять в обох частинах співвідношення (1), паралельні вектору $\vec{a}$ і мають одну і ту ж довжину $|\alpha||\beta||\vec{a}|$. Тому залишається лише перевірити, що ці вектори співнапрямлені.

Якщо α та β одного знака, то вектори $\alpha(\beta\vec{a}) \uparrow\uparrow (\alpha\beta\vec{a})$. Якщо ж α та β різних знаків, то $\alpha(\beta\vec{a}) \uparrow\downarrow \vec{a}$ і $(\alpha\beta)\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$, а це означає, що $\alpha(\beta\vec{a}) \uparrow\uparrow (\alpha\beta)\vec{a}$.

Доведення властивостей (2) і (3) провести самостійно.

Додаток4. Полярні координати

Положення точок на площині чи в просторі визначається за допомогою системи чисел. Найчастіше застосовується декартова прямокутна система координат. Проте поряд з нею використовуються й інші системи координат. З однією з таких систем ми фактично мали справу при вивченні комплексних чисел. Було встановлено, що заданням модуля і аргумента однозначно визначається комплексне число, а тому й відповідна йому точка площини. Модуль і аргумент комплексного числа ще називають полярними координатами точки, яка зображає це число.

Оскільки при вивченні комплексних чисел означення полярної системи координат не наводилось, наведемо його. Виберемо на орієнтованій площині деяку точку O і вісь, що проходить через цю точку. Нехай положення осі визначається одиничним вектором $\vec{i}$. Орієнтованість площини означає, що вказано повороти навколо точки O, які вважаються додатними. Зазвичай, додатним поворотом вважається поворот проти руху годинникової стрілки.

<u>**Означення 1**</u>. Точка O, вектор $\vec{i}$ і додатний напрям обходу площини називаються полярною системою координат. Точка O називається полюсом, а вибрана вісь $\vec{i}$ – полярною віссю (рис. 1).

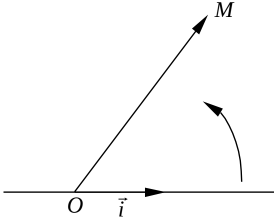


Рис. 1

Нехай M – довільна точка площини, відмінна від полюса O. Положення цієї точки однозначно визначається заданням довжини вектора $\overrightarrow{OM}$ і кута $\varphi = \left(\vec{i}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{OM}\right)$. Позначимо довжину вектора $\overrightarrow{OM}$ через ρ, тобто $\rho = \left|\overrightarrow{OM}\right|$.

<u>**Означення 2**</u>. Числа ρ і φ називаються полярними координатами точки M. При цьому ρ називається полярним радіусом або першою полярною координатою, а φ – полярним кутом або другою полярною координатою.

Для полярних координат ρ і φ точки M у системі $\{O; \vec{i}\}$ введемо позначення $M(\rho; \varphi)_{0,\vec{i}}$. Разом з тим, нижче, якщо це не викликатиме непорозумінь, будемо просто писати $M(\rho; \varphi)$. Наприклад, точки $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5,$ M_6, M_7, M_8 на рис. 2 мають такі полярні координати: $M_1(1; 0)$; $M_2\left(2; \frac{\pi}{4}\right)$; $M_3\left(2; \frac{\pi}{2}\right)$; $M_4\left(2; \frac{3\pi}{4}\right)$; $M_5(1; \pi)$;

$M_6\left(3;\ \frac{5\pi}{4}\right)$; $M_7\left(2;\ \frac{3\pi}{2}\right)$; $M_8\left(3;\ \frac{7\pi}{4}\right)$.

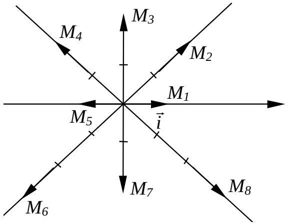


Рис. 2

Зауважимо, що полярний кут точки має нескінченну множину значень. Якщо φ – одне з цих значень, то $\varphi + 2\pi k$, де k – ціле число, також належить до множини значень полярного кута.

Розглянемо одночасно декартову прямокутну і полярну системи координати, які розміщені так, що полюс співпадає з початком координат, а полярна вісь – з додатним напрямком осі Ox (рис. 3).

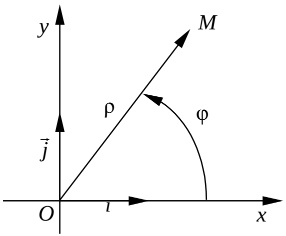


Рис. 3

Розглядаючи питання про зображення комплексного числа у тригонометричній формі, ми встановили зв'язок між декартовими прямокутними координатами x, y точки M та її полярними координатами ρ, φ:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2};\ x = \rho\cos\varphi;\ y = \rho\sin\varphi. \tag{1}$$

Формули (1) отримуються безпосередньо з означення тригонометричних функцій (рис. 3).

Для вираження полярних координат через декартові використовуються формули

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},\ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}, \tag{2}$$

які легко отримати з формул (1).

Головним значенням полярного кута, як і у випадку комплексних чисел, будемо називати кут з проміжку $0 \le \varphi < 2\pi$ або $-\pi < \varphi \le \pi$.

Формули (1) і (2) розв'язують такі дві задачі:

1°. Дано полярні координати ρ і φ деякої точки M. Знайти її декартові прямокутні координати.

2°. Дано декартові прямокутні координати x і y деякої точки M. Знайти її полярні координати.

Розв'язання першої задачі не викликає ніяких ускладнень. Друга задача детально розглянута в §2 гл. 1.

Приклад 1. Побудувати у полярній системі координат точки:

1) $M_1\left(2; \frac{5\pi}{4}\right)$; 2) $M_2\left(-1; -\frac{\pi}{4}\right)$.

Розв'язання. 1) Проведемо через полюс O промінь OP під кутом $\frac{5\pi}{4}$ до полярної осі. Додатний поворот показано стрілкою на рис. 5. Відкладемо від полюса у напрямку OP вектор $\overrightarrow{OM_1}$ довжиною $\left|\overrightarrow{OM_1}\right| = 2$. Кінець вектора $\overrightarrow{OM_1}$ і є шуканою точкою.

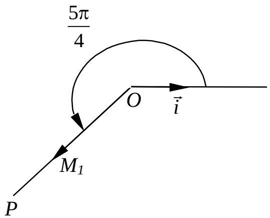


Рис. 5

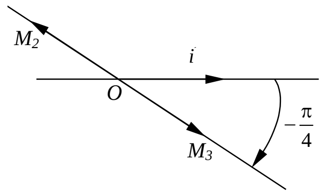


Рис. 6

2) Будуємо точку M_3 з полярними координатами $\left(1; -\frac{\pi}{4}\right)$ аналогічно попередньому випадку. Шукану точку $M_2\left(-1; -\frac{\pi}{4}\right)$ будуємо як точку, симетричну точці M_3 відносно полюса O (рис. 6).