Диференціал функції

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в точці $x \in [a;b]$, тобто

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Тоді $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, $\alpha \to 0$, $\Delta x \to 0$ і $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x$.

Означення. ***Диференціалом*** dy ***функції*** $y = f(x)$ в точці x називається головна, лінійна відносно Δx частина приросту функції:

$$dy = f'(x)\Delta x \text{ або } dy = f'(x)dx$$

Оскільки $\Delta y \approx dy$, то при малих Δx

$$\boxed{f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x}.$$

Приклад. Обчислити наближено $\operatorname{arctg} 1,05$.

$$\operatorname{arctg}(1 + 0,05) \approx \operatorname{arctg} 1 + \left(\operatorname{arctg} x\right)'\Big|_{x=1} \cdot 0,05$$

$$\approx \frac{\pi}{4} + \left(\frac{1}{1 + x^2}\right)\Bigg|_{x=1} \cdot 0,05 \approx 0,811.$$

Правило Лопіталя

Правило Лопіталя використовують для знаходження границь диференційовних функцій, якщо є невизначеності типу $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$.

Нехай виконується співвідношення

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

або

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right),$$

Тоді

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f'(x)}{\lim\limits_{x\to a} g'(x)}$$

Приклад 1.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2\ln x}.$$

$$\left(\frac{0}{0}\right) \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^2-1)'}{(2\ln x)'} = \lim_{x\to 1} \frac{2x}{2\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} x^2 = 1.$$

Правило Лопіталя можна застосовувати кілька разів.

Приклад 2.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{e^x}.$$

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{(x^2)'}{(e^x)'} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{(2x)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Загальна схема дослідження функції

Загальне дослідження функцій доцільно виконувати за наступною ***схемою.***

1. Знаходимо область визначення функції і з'ясовуємо, чи має графік точки перетину з координатними осями. Досліджуємо функцію на парність та непарність.

2. Досліджуємо графік функції на наявність асимптот.

3. Знаходимо похідну 1-го порядку і критичні точки 1-го роду (якщо вони існують). Визначаємо знак y' на інтервалах, які дістаємо в результаті розбиття області визначення функції критичними точками 1-го роду.

4. Знаходимо похідну 2-го порядку і критичні точки 2-го роду (якщо вони існують). Визначаємо знак y'' на інтервалах, які дістаємо в результаті розбиття області визначення функції критичними точками 2-го роду.

5. Критичні точки 1-го та 2-го роду вказуємо на координатній прямій. В результаті область визначення буде розбита на інтервали. Будуємо таблицю, в якій у першому рядку записуємо ці інтервали та критичні точки.

Інтервали та критичні точки (x)	
y'	
y''	
y	

а) Використовуючи y' з'ясовуємо, на яких інтервалах функція зростає або спадає, та досліджуємо критичні точки 1-го роду на екстремуми.

б) Використовуючи y'', досліджуємо на інтервалах графік функції на опуклість та угнутість.

Результати досліджень в пунктах а) і б) заносимо до останнього рядка таблиці. Обчислюємо значення функції в точках екстремуму і знаходимо точки перегину.

6. Будуємо графік функції.

<u>Приклад 1.</u> Виконати загальне дослідження функції $y = 2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ а) Область визначення функції – $D = (-\infty; +\infty)$.

б) Для знаходження точки перетину графіка функції з віссю Oy обчислимо значення функції у точці $x = 0$:

$$y(0) = 2 \cdot 0 - \frac{3}{4} \cdot 0^2 - \frac{1}{6} \cdot 0^3 = 0.$$

Отже, графік функції перетинає вісь Oy у точці $y = 0$, тобто проходить через початок координат – точку $O(0;0)$.

в) Для знаходження точок перетину графіка функції з віссю Ox слід розв'язати рівняння $y(x) = 0$:

$$2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3 = 0, \quad x\left(2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{6}x^2\right) = 0, \text{ звідки}$$

$$x = 0 \text{ або } 2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{6}x^2 = 0 .$$

Корені квадратного рівняння:

$$x_1 = \frac{-9 - \sqrt{273}}{4} \approx -6,4 ; \quad x_2 = \frac{-9 + \sqrt{273}}{4} \approx 1,9 .$$

Отже, графік функції перетинає вісь Ox у точках $x_1 \approx -6,4$, $x_2 \approx 1,9$ та у точці $x = 0$ (початок координат).

г) Функція ні парна, ні непарна, оскільки $y(-x) \neq y(x)$ та $y(-x) \neq -y(x)$.

$\boxed{2}$ Дослідимо графік функції на наявність асимптот.

а) Рівняння *похилих асимптот*

$$y = kx + b , \tag{1}$$

де

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y(x)}{x} , \qquad b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(y(x) - kx \right) , \tag{2}$$

якщо границі існують і скінченні.

Оскільки для заданої функції

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{6}x^2 \right) = \infty ,$$

то похилих асимптот графік функції не має.

б) Пряма $x = x_0$ є *вертикальною асимптотою* графіка функції $y(x)$, якщо

$$\lim_{x \to x_0} y(x) = \infty . \tag{3}$$

Оскільки функція елементарна і областю визначення функції є вся числова пряма, то вертикальних асимптот немає.

$\boxed{3}$ Знайдемо похідну 1-го порядку:

$$y' = \left(2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3\right)' = 2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2 .$$

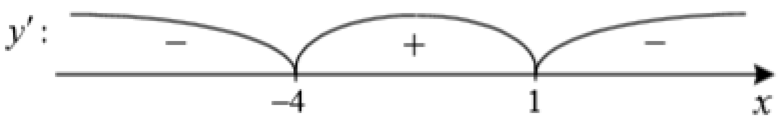
Критичні точки 1-го роду слід шукати серед точок, в яких: а) $y' = 0$; б) y' не існує.

а) $y' = 0$: $\quad 2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2 = 0$, або $\quad x^2 + 3x - 4 = 0$, звідки $x = -4$ та $x = 1$.

б) y' не існує: таких точок немає, оскільки похідна визначена при будь-якому $x \in D$.

Отже, маємо дві критичні точки 1-го роду $x = -4$, $x = 1$.

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак y' на отриманих інтервалах:



(наприклад, $y'(-6) = -25 < 0$, $y'(0) = 2 > 0$, $y'(2) = -3 < 0$).

$\boxed{4}$ Знайдемо похідну 2-го порядку:

$$y'' = \left(2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2\right)' = -\frac{3}{2} - x .$$

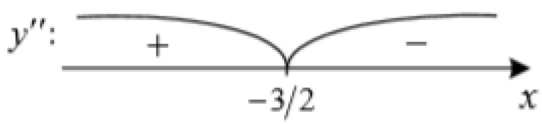
Критичні точки 2-го роду слід шукати серед точок, в яких: а) $y'' = 0$; б) y'' не існує.

а) $y''=0$: $-\frac{3}{2}-x=0$, $x=-\frac{3}{2}$.

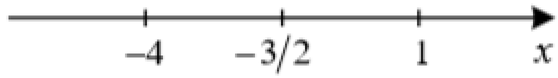
б) y'' не існує: таких точок немає.

Отже, маємо одну критичну точку 2-го роду $x=-\frac{3}{2}$.

Вказуємо критичну точку на координатній прямій і визначаємо знак y'' на отриманих інтервалах:



$\boxed{5}$ Вкажемо критичні точки 1-го та 2-го роду на координатній прямій:



Отже, маємо чотири інтервали: $(-\infty;-4)$, $(-4;-1,5)$, $(-1,5;\ 1)$, $(1;+\infty)$.

Заповнимо таблицю. Заповнюючи рядки, що відповідають y' та y'', використовуємо результати досліджень у пунктах $\boxed{3}$ та $\boxed{4}$.

x	$(-\infty;-4)$	-4	$(-4;-1,5)$	$-1,5$	$(-1,5;1)$	1	$(1;+\infty)$
y'	−	0	+		+	0	−
y''	+		+	0	−		−
y	$\cup$	min $y(-4)=$ $=-9\frac{1}{3}$	$\cup$	т. п. $y(-1,5)=$ $=-4\frac{1}{8}$	$\cap$	max $y(1)=1\frac{1}{12}$	$\cap$

$\boxed{6}$ Будуємо графік функції, використовуючи результати пунктів $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{5}$.