**Лекція 7**

**Складний рух точки**

***7.1. Кінематичні характеристики складного руху точки***

Якщо точка рухається в рухомій системі координат ***Oxyz*** , яка, в свою чергу, рухається відносно нерухомої системи координат, тоді мова йде про складний рух точки ***M***.

Зауважимо, що рухому систему координат завжди незмінно зв’язують з тілом, що рухається.

Рух т. ***M*** в рухомій системі координат називається *відносним* рухом точки ***M***. Відповідно в цьому русі відносними будуть траєкторія, швидкість та прискорення точки. Характеристики цього руху будемо позначати нижнім індексом „ ***r*** ” (relative - відносний), тобто і відповідно відносна швидкість і відносне прискорення точки.



Рух точки в нерухомій системі координат називається *абсолютним*, відповідно абсолютними будуть називатися траєкторія, швидкість та прискорення точки в цьому русі, останні будуть позначатися з нижнім індексом „ ***a*** ” (absolute - абсолютний).

Відносний рух точки буде задаватися наступними кінематичними рівняннями:

 (1)

а абсолютний такими кінематичними рівняннями:

 (2)

Покажемо, як визначити швидкість і прискорення точки як в одному, так і в іншому русі, використовуючи кінематичні рівняння (1) і (2).

Так, відносна швидкість у рухомій системі координат визначиться за формулою

 (3)

де

 (4)

Тоді модуль відносної швидкості знайдемо за формулою

 (5)

а відповідні напрямні косинуси – із виразів:

 (6)

Таким чином, вирази (3) - (6). повністю визначають вектор відносної швидкості ***r*** за величиною та напрямом.

Абсолютна швидкість ***a*** точки в нерухомій системі координат визначиться за формулою

 (7)

Використовуючи вирази (7) знаходимо проекції вектора абсолютної швидкості на осі нерухомої системи координат

 (8)

Модуль абсолютної швидкості знайдемо за формулою

 (9)

а відповідні напрямні косинуси – із виразів:

 (10)

Таким чином, вирази (8)-(10) повністю визначають вектор абсолютної швидкості va за величиною та напрямом.

Для визначення відповідних прискорень можна використовувати формули, подібні до (3)-(6) і (8)-(10), в яких треба замінити перші похідні за часом на другі.

***7.2. Формула Бура***

Розглянемо вираз вектора через його проекції в рухомій системі координат:

і знайдемо абсолютну похідну від нього



Оскільки система координат ***Oxyz*** рухається довільним чином відносно ***Aξης*** , тому її одиничні вектори (орти) , , не є сталими, і вираз абсолютної похідної набуде вигляду

 (11)

У формулі (11) перші три доданки характеризують зміну вектора в рухомій системі координат, тобто їх сума є відносною похідною

 (12)

Останні три доданки у формулі (11) позначимо ***′*** , тобто

 (13)

Домножимо скалярно обидві частини виразу (13) послідовно на орти , ,

 (14)

Отримаємо деякі допоміжні співвідношення

Введемо наступні позначення:

 (15)

тоді формули (14) набудуть вигляду

 (16)

Ці вирази повністю співпадають з проекціями векторного добутку  ***×***  на осі системи координат ***Oxyz*** . Дійсно

Тому має місце вираз

 (17)

з урахуванням якого формула (11) набуває остаточного вигляду

 (18)

і називається ***формулою Бура***.

Таким чином, абсолютна похідна від векторної функції за скалярним аргументом *t* дорівнює сумі відносної похідної тієї ж функції та векторного добутку вектора на .

Наведемо деякі ***окремі випадки*** формули Бура.

1) Припустимо, що система координат Oxyz є нерухомою відносно Aξης , або рухається поступально.

В цьому випадку, оскільки орти є сталими, за формулами (15) маємо , і тоді формула Бура набуває вигляду

2) Припустимо, що вектор не змінюється в рухомій системі координат Oxyz, тоді і отримуємо .

3) Припустимо, що вектор не змінюється в нерухомій системі координат Aξης , тобто . Тоді маємо .

***7.3. Основна задача складного руху точки. Формули перетворення швидкостей точки при її складному русі***

Основна задача кінематики складного руху точки полягає у визначенні залежностей між кінематичними характеристиками точки в її відносному і абсолютному рухах, а також руху рухомої системи координат в нерухомій.

Нехай т. M одночасно рухається як в системі координат Oxyz, так і в Aξης .

Радіус-вектор т. M однозначно визначає її положення в рухомій системі координат Oxyz.

Радіус-вектор визначає положення початку рухомої системи координат Oxyz по відношенню до нерухомої Aξης .

Нарешті радіус-вектор т. M визначає її положення в нерухомій системі координат Aξης .

Ці радіус-вектори зв’язані очевидним співвідношенням:

 (19)

Продиференціюємо вираз (1), використовуючи формулу Бура

 (20)

де - абсолютна швидкість точки, - її відносна швидкість, - швидкість початку рухомої системи координат (т. O).

Таким чином, маємо

 (21)

В цьому виразі (21) член являє собою складову швидкості т. M, яка обумовлена лише рухом рухомої системи координат по відношенню до нерухомої з кінематичними характеристиками , .

Нагадаємо, що

де

Вектор характеризує швидкість зміни орієнтації рухомої системи координат по відношенню до нерухомої.

***7.4. Формули перетворення прискорень при складному русі точки***

Скористаємось визначенням прискорення при векторному способі задання руху точки і формулою для абсолютної швидкості точки, тобто виразами

 і

Тоді матимемо

 (22)

Тут з означень маємо

і тоді вираз (22) можна записати у вигляді

 (23)

У виразі (23) доданок називається прискоренням Коріоліса і позначається . Це прискорення виникає в результаті відносного руху точки і руху рухомої системи координат.

У формулі (23) доданок являє собою складову повного прискорення точки, яка обумовлена рухом рухомої системи координат з кінематичними характеристиками:. Таким чином, маємо

 (24)

формулу для перетворень прискорень точки при її складному русі.