

Рис. 1.25

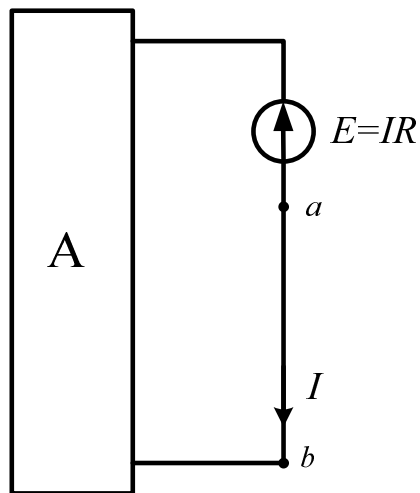


Рис. 1.26

Література: [3], с.70-74.

Лекція 6. Еквівалентні перетворення в електричних колах.

1.2.9. Еквівалентні перетворення в електричних колах.

Заміна однієї частини кола на іншу буде еквівалентною, якщо в неперетворювальній частині кола струми і напруги не змінились. Якщо в перетворенні бере участь пасивна ділянка кола (без джерел енергії), то

сума потужностей віток до і після перетворення залишається незмінною. Якщо ж перетворення відбувається над частиною кола, де є джерела енергії, то сума потужностей віток до і після перетворення може відрізнятись.

1.2.9.1. Перетворення пасивних ділянок електричного кола.

1.2.9.1.1. Послідовне з'єднання. (рис. 1.27,а)

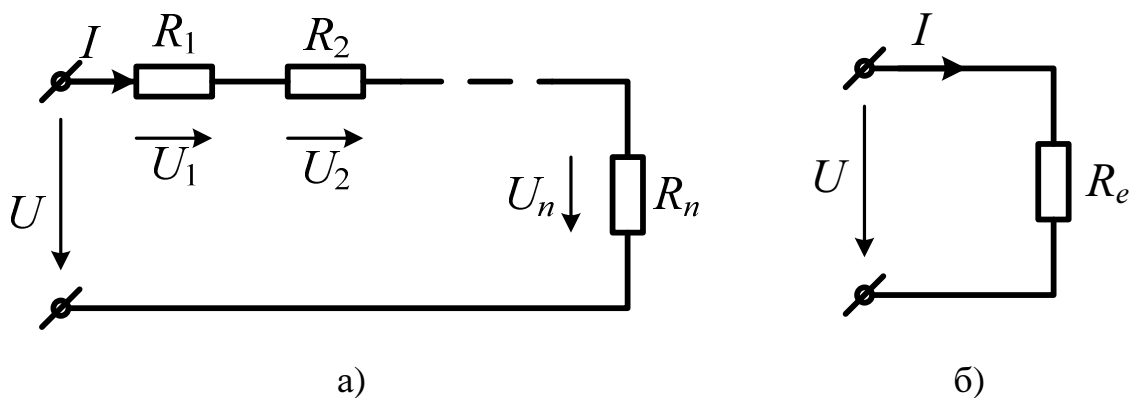


Рис. 1.27

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n = IR_1 + IR_2 + \dots + IR_n = I(R_1 + R_2 + \dots + R_n). \quad (1.38)$$

$$\text{Для рис. 1.27,б : } U = IR_e \quad (1.39)$$

Порівнюючи вирази (1.38) та (1.39) і враховуючи умови еквівалентності (при однакових струмах, однакові напруги), маємо:

$$R_e = R_1 + R_2 + \dots + R_n, \quad R_e = \sum_{k=1}^n R_k.$$

1.2.9.1.2. Паралельне з'єднання (рис. 1.28,а).

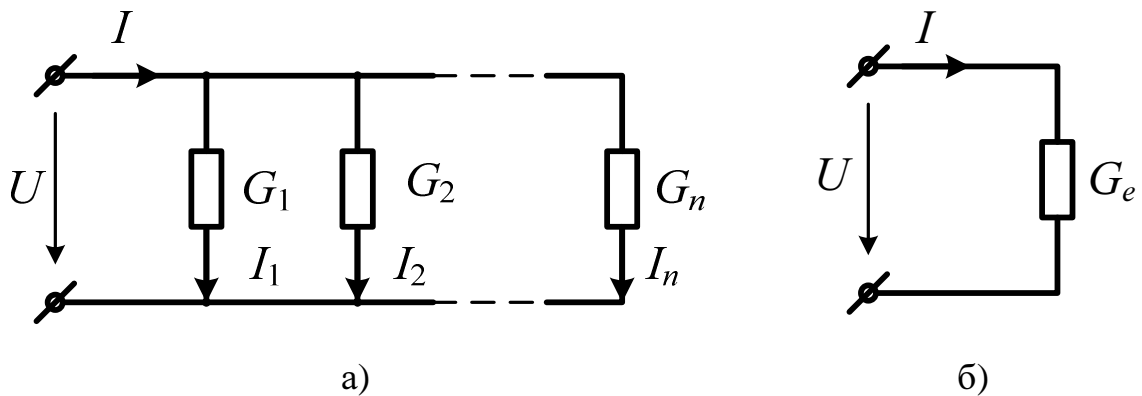


Рис. 1.28

G_1, G_2, \dots, G_n - провідності віток.

Для рис. 1.28,а: $I = I_1 + I_2 + \dots + I_n$;

$$I_1 = G_1 \cdot U;$$

$$I_2 = G_2 \cdot U;$$

$$I_n = G_n \cdot U;$$

$$I = (G_1 + G_2 + \dots + G_n) \cdot U. \quad (1.40)$$

Для рис. 1.28,б: $I = G_e \cdot U$; (1.41)

Порівнюючи (1.40) і (1.41) і враховуючи умови еквівалентності, маємо (1.42):

$$G_e = \sum_{k=1}^n G_k. \quad (1.42)$$

Еквівалентний опір паралельного з'єднання визначається співвідношенням (1.43):

$$R_e = \frac{1}{G_e}. \quad (1.43)$$

Якщо маємо паралельне з'єднання двох віток (рис. 1.29), то можна скористатися відомим співвідношенням для визначення еквівалентного

опору цього з'єднання: $R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

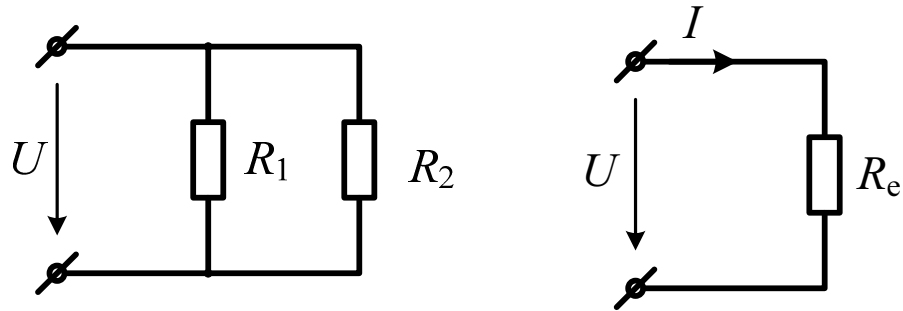


Рис. 1.29

1.2.9.1.3. З'єднання трикутником і зіркою. Перетворення трикутника і зірки опорів.

З'єднання опорів трикутником і зіркою зображено на рис. 1.30,а,б.

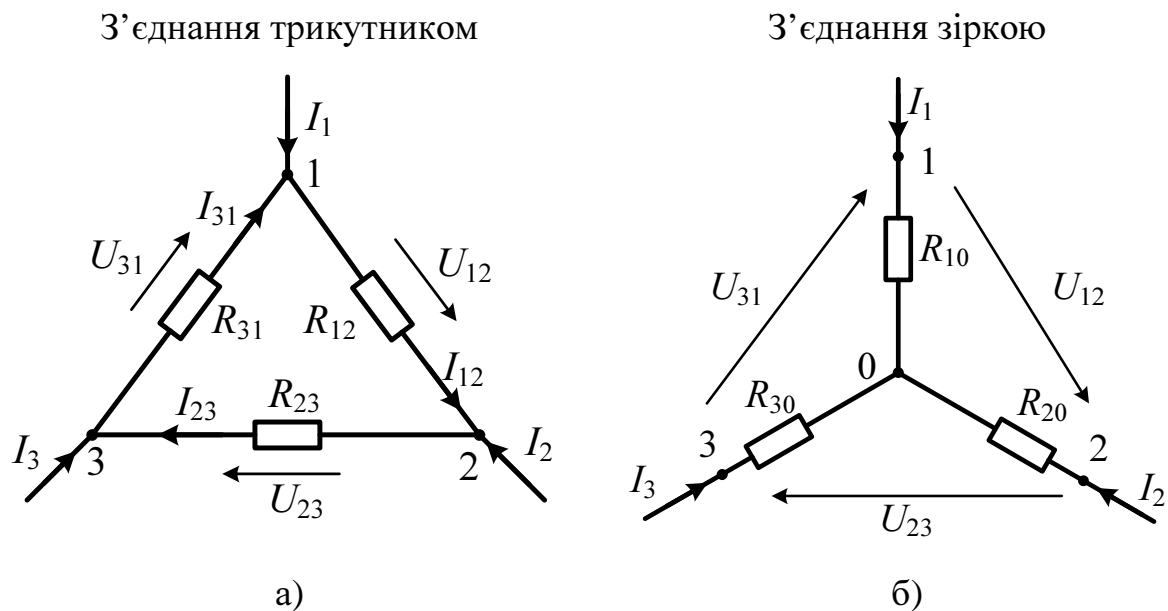


Рис. 1.30

Перетворення трикутника в еквівалентну зірку приводить до спрощення всієї схеми, бо зменшується кількість контурів схеми і відповідно при знаходженні струмів в новій схемі необхідно буде скласти меншу кількість рівнянь. Перетворення зірки в трикутник не зменшує кількості контурів в новій схемі, але може дати можливість подальшого спрощення схеми з використанням формул паралельного з'єднання і тому теж використовується при еквівалентних перетвореннях.

Схеми з'єднань трикутника і зірки будуть еквівалентні, якщо при однакових струмах I_1, I_2, I_3 на вході трикутника і зірки будуть однакові напруги U_{12}, U_{23}, U_{31} . Це матиме місце, якщо опори між парами вузлів 1-2, 2-3, 3-1, в трикутнику і в зірці будуть однакові. Тоді можна буде записати такі співвідношення:

Пари вузлів	з'єднання “трикутник”	з'єднання “зірка”	
1-2	$\frac{R_{12}(R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} =$	$R_{10} + R_{20}$	}
2-3	$\frac{R_{23}(R_{12} + R_{31})}{R_{23} + R_{12} + R_{31}} =$	$R_{20} + R_{30}$	
3-1	$\frac{R_{31}(R_{12} + R_{23})}{R_{31} + R_{12} + R_{23}} =$	$R_{30} + R_{10}$	
			(1.44)

Незалежно від того, що перетворюється (трикутник опорів в зірку чи навпаки), необхідно розв'язати систему (1.44). Якщо перетворюється трикутник в зірку, то відомими необхідно вважати опори трикутника, а знайти необхідно опори зірки. Тоді, розв'язавши систему рівнянь відносно опорів зірки, отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} R_{10} &= \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_{20} &= \frac{R_{23} \cdot R_{12}}{R_{23} + R_{12} + R_{31}} \\ R_{30} &= \frac{R_{31} \cdot R_{23}}{R_{31} + R_{12} + R_{23}} \end{aligned} \right\} \quad (1.45)$$

Якщо опори віток трикутника однакові, то опори віток еквівалентної зірки теж будуть однакові.

$$R_{\text{ЗІРКИ}} = \frac{1}{3} R_{\text{ТРИКУТНИКА}} ; \quad R_{\text{ТРИКУТНИКА}} = 3 \cdot R_{\text{ЗІРКИ}} .$$

Якщо виконується перетворення зірки в трикутник, то відомими є опори R_{10} , R_{20} , R_{30} . Тоді для опорів трикутника маємо:

$$\left. \begin{aligned} R_{12} &= R_{10} + R_{20} + \frac{R_{10} R_{20}}{R_{30}} \\ R_{23} &= R_{20} + R_{30} + \frac{R_{20} R_{30}}{R_{10}} \\ R_{31} &= R_{30} + R_{10} + \frac{R_{30} R_{10}}{R_{20}} \end{aligned} \right\} \quad (1.46)$$

Якщо відбувалось перетворення трикутника в зірку і виконаний розрахунок нової схеми з зіркою, тобто знайдені струми і напруги в новій схемі, а необхідно повернутись до вихідної схеми з трикутником, можна рекомендувати наступне: знаючи струми I_1 , I_2 , I_3 в схемі із зіркою розрахуємо напруги U_{12} , U_{23} , U_{31} для цієї схеми. Для прийнятих на рис. 1.30,б додатних напрямків відповідно матимемо:

$$\left. \begin{aligned} U_{12} &= I_1 R_{10} - I_2 R_{20} \\ U_{23} &= I_2 R_{20} - I_3 R_{30} \\ U_{31} &= I_3 R_{30} - I_1 R_{10} \end{aligned} \right\} \quad (1.47)$$

Визначивши напруги U_{12} , U_{23} , U_{31} для схеми із зіркою і, приймаючи до уваги, що ці ж напруги в трикутнику повинні мати такі ж значення, далі легко знаходимо струми I_{12} , I_{23} , I_{31} в схемі трикутника:

$$I_{12} = \frac{U_{12}}{R_{12}}, \quad I_{23} = \frac{U_{23}}{R_{23}}, \quad I_{31} = \frac{U_{31}}{R_{31}}.$$

Якщо ж виконувалось перетворення зірки в трикутник і струми в вітках трикутника визначені, то струми I_1 , I_2 , I_3 знаходимо із рівнянь для вузлів 1,2,3:

$$I_1 = I_{12} - I_{31}, \quad I_2 = I_{23} - I_{12}, \quad I_3 = I_{31} - I_{23}.$$

1.2.9.2. Перетворення активних ділянок кола.

1.2.9.2.1. Послідовне з'єднання.

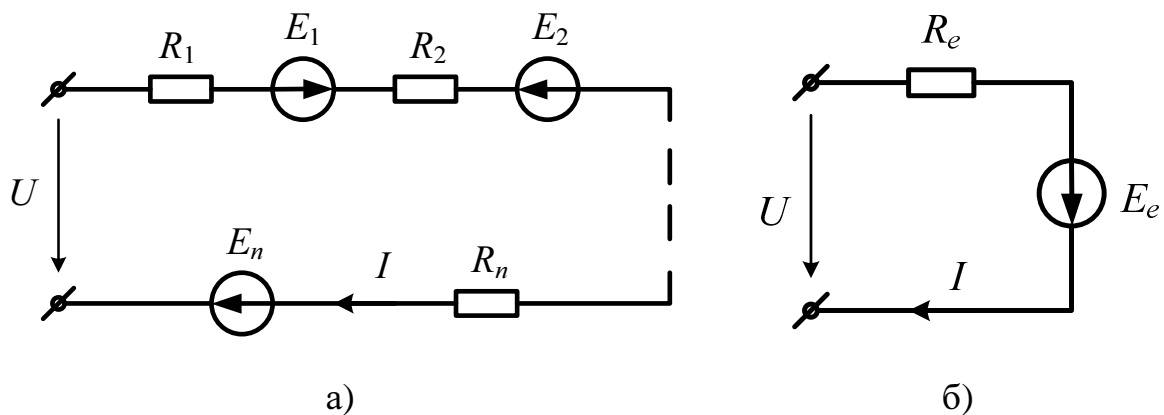


Рис. 1.31

Для рис. 1.31,а маємо:

$$U = -E_1 + E_2 - \dots - E_n + I(R_1 + R_2 + \dots + R_n). \quad (1.48)$$

Для рис. 1.31,б:

$$U = -E_e + IR_e. \quad (1.49)$$

Порівнюючи рівняння (1.48) та (1.49) і виходячи з умов еквівалентності схем рис. 1.31,а і 1.31,б маємо:

$$E_e = +E_1 - E_2 + \dots + E_n, \quad E_e = \sum_{k=1}^n E_k, \quad (1.50)$$

$$R_e = R_1 + R_2 + \dots + R_n, \quad R_e = \sum_{k=1}^n R_k.$$

Вираз (1.50) – сума ЕРС – це алгебраїчна сума. ЕРС E_k враховується із знаком «+», якщо напрямок дії ЕРС E_k співпадає з прийнятим напрямком ЕРС E_e .

1.2.9.2.2. Паралельне з'єднання віток з джерелами струму.

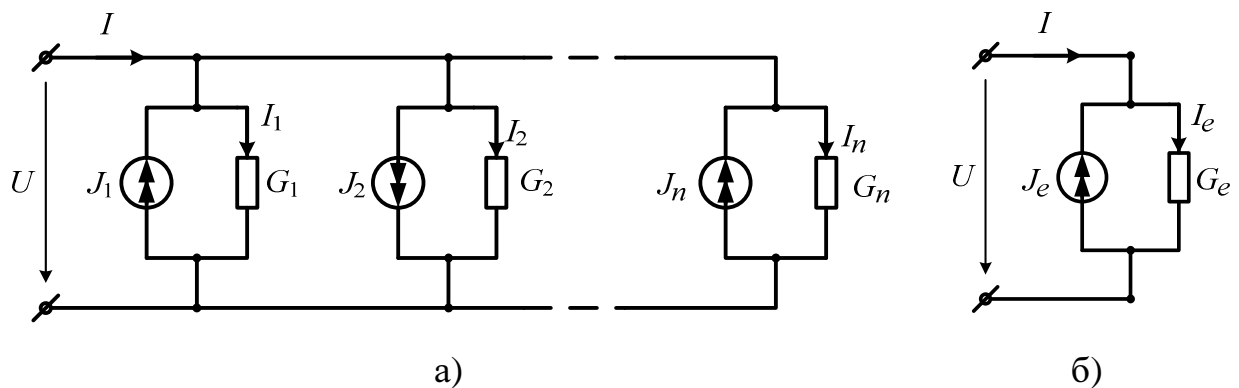


Рис. 1.32

Для рис.: 1.32.а

$$I = -J_1 + J_2 - \dots - J_n + U(G_1 + G_2 + \dots + G_n). \quad (1.51)$$

Для рис. 1.32,б

$$I = -J_e + UG_e. \quad (1.52)$$

Порівнюючи рівняння (1.51) і (1.52) і враховуючи умови еквівалентності схем а і б, відповідно матимемо:

$$G_e = G_1 + G_2 + \dots + G_n, \quad G_e = \sum_{k=1}^n G_k. \quad (1.53)$$

$$J_e = J_1 - J_2 + \dots + J_n, \quad J_e = \sum_{k=1}^n J_k. \quad (1.54)$$

В правій частині рівняння (1.54) сума J_k це алгебраїчна сума. Струм J_k входить у вираз J_e зі знаком «+», якщо напрямки струмів J_k і J_e однакові.

1.2.9.2.3. Паралельне з'єднання віток з джерелами ЕРС.

Нехай маємо схему рис. 1.33,а, де кілька віток з'єднані паралельно, при чому в деяких з них є джерела ЕРС.

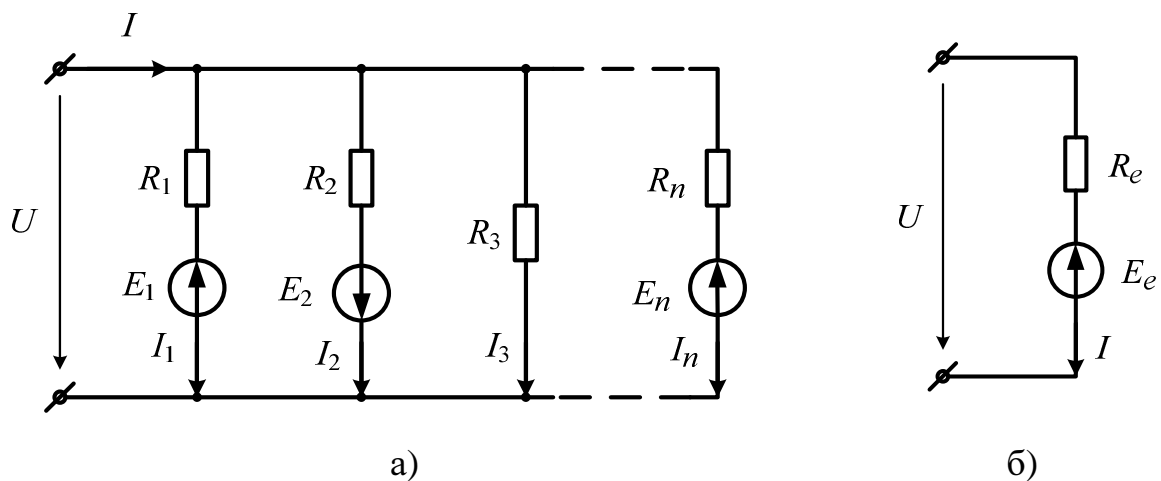


Рис. 1.33

Для рис. 1.33,а за першим законом Кірхгофа

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n; \quad (1.55)$$

За законом Ома:

$$I_1 = UG_1 - E_1G_1, \quad I_2 = UG_2 + E_2G_2, \quad I_3 = UG_3, \quad I_n = UG_n - E_nG_n.$$

Підставимо ці вирази в рівняння (1.55)

$$I = U(G_1 + G_2 + \dots + G_n) - E_1G_1 + E_2G_2 - \dots - E_nG_n. \quad (1.56)$$

Для схеми рис. 1.33,б:

$$I = UG_e - E_eG_e. \quad (1.57)$$

Із рівнянь (1.56) і (1.57) умови еквівалентності схем рис. 1.33,а і рис. 1.33,б будуть виконуватись, коли:

$$G_e = G_1 + G_2 + \dots + G_n, \quad G_e = \sum_{k=1}^n G_k. \quad (1.58)$$

$$E_eG_e = E_1G_1 - E_2G_2 + \dots + E_nG_n. \quad (1.59)$$

$$E_e = \frac{\sum_{k=1}^n E_k G_k}{\sum_{k=1}^n G_k}. \quad (1.60)$$

В чисельнику (1.60) добуток $E_k G_k$ враховується із знаком «+», якщо напрямок ЕРС E_k збігається з напрямком ЕРС E_e . В знаменник (1.60) входить сума провідностей всіх віток схеми і навіть тих, де ЕРС відсутні.

Якщо маємо паралельне з'єднання віток із джерелами струму і джерелами ЕРС, то бажано спочатку джерела ЕРС замінити на джерела струму (див. 1.4). Після цього матимемо вітки з джерелами струму, заміна яких на еквівалентне джерело струму розглянуто раніше.