

Розділ 6

Сигнали та спектри

6.1 Параметри сигналів

Сигнал — це фізичний процес, що змінюється у відповідності із повідомленням, яке передається. В сучасних вимірювальних системах, як правило, використовуються сигнали електричної природи, тобто такі, у яких фізичною величиною, що несе інформацію, яка їх визначає, є електричний струм або напруга.

Сигнали завжди є функціями часу. Якщо сигнал представляє собою функцію $s(t)$, що приймає лише певні дискретні значення s_n (наприклад, 0 і 1), то його називають *дискретним* або, точніше, дискретним по станам. Так само і повідомлення, елементи яких приймають тільки деякі певні значення, називаються дискретними. Якщо сигнал (або елементи повідомлення) може приймати будь-які значення в певному інтервалі, то він називається *неперервним* по станам або *аналоговим*.

У більшості випадків сигнали задаються не на всій вісі часу, а лише у певні моменти t_n . Такі сигнали називають дискретними по часу, на відміну від неперервних по часу — заданих на всій вісі t . Наприклад, сигнал мовлення є повідомленням неперервним як по станам, так і по часу (рис. 6.1, а), а

сенсор температури, який видає її значення через кожну хвилину, служить джерелом повідомлень, які неперевні по станам, але дискретні по часу (рис. 6.1, б). Якщо сигнал одночасно є дискретним як по часу, так і по рівню, то його називають *цифровим* (рис. 6.1, в). Якщо сигнал наперед відомий з повною достовірністю, то він називається *детермінованим*.

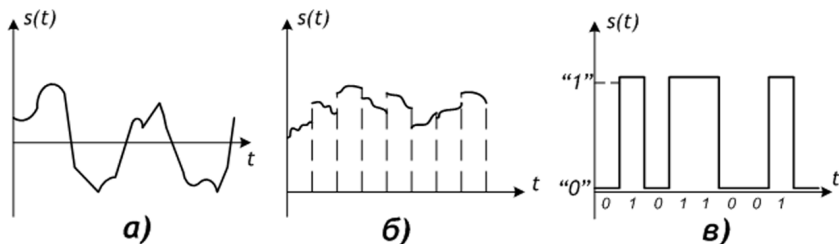


Рис. 6.1 – Приклади аналогового, дискретного по часу та цифрового сигналів

Основними параметрами електричних сигналів є амплітуда (розмах), частота (або спектр частот), фаза, динамічний діапазон, тривалість і параметри форми сигналів (скважність, час наростання і час спаду, тривалість плоскої частини). Розглянемо їх детальніше.

Амплітуда і розмах. Ці поняття ілюструє рис. 6.2. *Амплітуда* — це максимальне відхилення абсолютної величини сигналу від нуля (позн. A на рис. 6.2). *Розмах* — це різниця між максимальним та мінімальним значенням сигналу (позн. $2A$ на рис. 6.2).

Довжина хвилі та частота. Існують два характерних параметри, які відрізняють хвильовий рух — довжина хвилі та частота. *Довжину хвилі* визначають як відстань між двома найближчими точками, які знаходяться в однаковому стані хвилі будь-якого типу (наприклад, акустичного або електромагнітного коливання). *Частотою* називають кількість

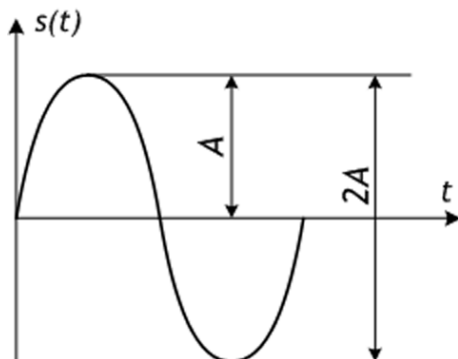


Рис. 6.2 – Амплітуда і розмах сигналу

повторюваних циклів хвилі за 1 секунду. На рис. 6.3 схематично показано поширення хвилі. Символом T позначений *період* коливання (при цьому горизонтальна вісь — це вісь часу), а символом λ — довжина хвилі (при цьому горизонтальна вісь — це вісь відстані). Період коливань пов'язаний з частотою простим співвідношенням:

$$f = \frac{1}{T}, \quad T = \frac{1}{f}.$$

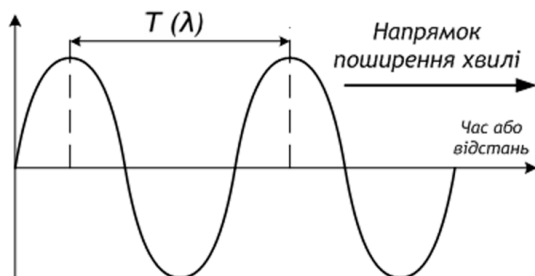


Рис. 6.3 – Період сигналу та довжина хвилі

Тип хвилі та її швидкість визначається середовищем, в якому вона рухається. Наприклад, швидкість звукової хвилі

у повітрі дорівнює 340 м/с, у воді — 1430 м/с, а швидкість електромагнітних хвиль набагато більша, ніж звукових, і дорівнює швидкості світла (приблизно $3 \cdot 10^8$ м/с). Радіо- та світлові хвилі мають електромагнітну природу і для них зв'язок між частотою та довжиною хвилі визначається формулою:

$$\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{f}, \quad f = \frac{3 \cdot 10^8}{\lambda}.$$

Скважність. Ця характеристика прямокутного (імпульсного) сигналу визначається як відношення тривалості імпульсу до періоду сигналу (рис. 6.4):

$$q = \frac{\tau}{T} \cdot 100\%.$$

Скважність — величина безрозмірна, тому її часто виражають у відсотках.

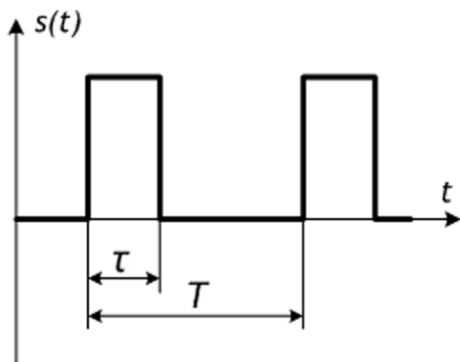


Рис. 6.4 – До визначення скважності сигналу

Тривалості фронту і спаду. Слід пам'ятати, що прямокутний сигнал, подібний до зображеного на рис. 6.4 є ідеалізацією, а на практиці перехід сигналу з низького рівня до високого і навпаки відбувається за деякий (достатньо малий, але все ж

ненульовий) час (див. рис. 6.5). Якщо мова йде про збільшення сигналу, то говорять про фронт, якщо зменшення — то про спад. На рисунку 6.5 за 1 позначений максимальний рівень сигналу (амплітуда імпульсу). Час, протягом якого величина сигналу зростає від 0,1 до 0,9 долі амплітуди, називається *тривалістю фронту* τ_1 , а час, протягом якого відбувається зменшення сигналу від 0,9 до 0,1 долі амплітуди — *тривалістю спаду* τ_3 . Відповідно за тривалість імпульсу приймається величина τ_2 — час, протягом якого сигнал залишається не меншим, ніж 0,9 долей амплітуди. Також іноді сигнал характеризують *швидкістю зростання* U_{\uparrow} та *швидкістю спадання* U_{\downarrow} :

$$U_{\uparrow} = \frac{0,8A}{\tau_1}, \quad U_{\downarrow} = \frac{0,8A}{\tau_3}.$$

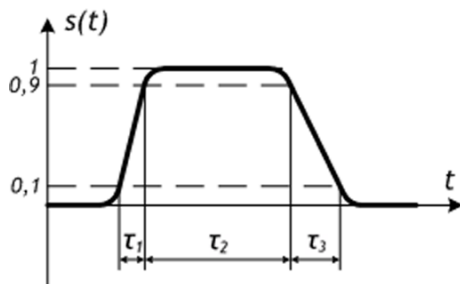


Рис. 6.5 – Фронт та спад сигналу

Енергія сигналу та пов'язані з нею параметри. Якщо електричний сигнал $s(t)$ є періодичним з періодом T , то його *енергія* визначається виразом

$$E_s = \int_0^T s^2(t) dt. \quad (6.1)$$

Середнє значення сигналу визначається як

$$\overline{s(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) dt$$

і за своїм змістом співпадає з математичним сподіванням сигналу (особливо тоді, коли сигнал описує випадковий процес, тобто є не детермінованим, а стохастичним).

Постійна складова, або *зміщення* сигналу визначається як

$$\widetilde{s(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt, \quad (6.2)$$

а *змінна складова* —

$$s_{\sim}(t) = s(t) - \widetilde{s(t)}.$$

Постійна складова може бути як додатним, так і від'ємним числом. Якщо постійна складова сигналу не дорівнює нулю, то він ніби «зміщується» вгору (якщо $\widetilde{s(t)} > 0$) або вниз (якщо $\widetilde{s(t)} < 0$).

Змінна складова має свою *потужність*:

$$\overline{s_{\sim}^2(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T s_{\sim}^2(t) dt. \quad (6.3)$$

Часто у виразах (6.1), (6.2) і (6.3) ставлять межі інтегрування від $-\frac{T}{2}$ до $+\frac{T}{2}$. На кінцевий результат це не впливає, але у випадку, коли детермінований сигнал описується парною або непарною функцією, це може дещо спростити операцію інтегрування. У будь-якому випадку інтегрування сигналу повинно відбуватися за один період.

6.2 Визначення спектра сигналу

При вивченні складних сигналів довільної форми їх зручно представляти у вигляді деякої комбінації простих сигналів відомої форми. Такий прийом дуже широко використовується в електроніці, радіотехніці та обробці сигналів і полягає в тому, що початковий сигнал — довільна функція від часу — розкладається за різними системами детермінованих базисних функцій. Цей метод називається *узагальненим спектральним аналізом*.

В математиці доводиться, що довільна неперервна функція $s(t)$, для якої виконується умова обмеженості (скінченності енергії)

$$\int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2 dt < \infty$$

може бути абсолютно точно представлена у вигляді нескінченної суми ряду

$$s(t) = a_0\varphi_0(t) + a_1\varphi_1(t) + \dots + a_n\varphi_n(t) + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\varphi_i(t), \quad (6.4)$$

де $\varphi_i(t)$ — система ортогональних неперервних функцій, a_i — коефіцієнти ряду, які визначаються як

$$a_i = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} s(t)\varphi_i(t) dt. \quad (6.5)$$

Розкладення (6.4) називають *узагальненим рядом Фур'є*, а коефіцієнти (6.5) — *узагальненими коефіцієнтами Фур'є*.

Система дійсних функцій $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots$ називається ортогональною на відрізку $[t_1, t_2]$ якщо

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_m(t)\varphi_n(t) dt = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n.$$

При цьому додатковою умовою ортогональності є

$$\int_{t_1}^{t_2} (\varphi_k(t))^2 dt \neq 0 \quad \forall k,$$

тобто жодна з них на цьому інтервалі нулю не дорівнює.

Узагальнений ряд Фур'є володіє дуже цінною практичною властивістю:

При обмеженій кількості складових у сумі (6.4) він забезпечує найкращу апроксимацію даної функції $s(t)$.

Іншими словами, якщо нескінченна сума (6.4) дає можливість точно відновити довільну функцію $s(t)$ за набором коефіцієнтів ряду Фур'є, то при обмеженні кількості членів ряду ніякий інший спосіб розкладення не може дати кращого наближення суми (6.4) до функції $s(t)$.

Однією з найбільш зручних систем ортогональних функцій, які можуть використовуватися при розкладенні довільних сигналів, є тригонометричні функції — синуси та косинуси:

$$\varphi_{ck} = \cos(\omega_k t), \quad \varphi_{sk} = \sin(\omega_k t),$$

де $\omega_k = 2\pi f_k$ — кругова частота.

Вибір в якості базису розкладення саме гармонічних функцій обумовлений двома причинами:

1. гармонічне коливання є найпростішою функцією, яка не піддається подальшому розкладанню та визначена при всіх значеннях t ;
2. гармонічне коливання є єдиною функцією часу, яка не змінює своєї форми при проходженні через лінійні кола з постійними в часі параметрами (може змінюватися лише амплітуда і фаза коливання).

Якщо в якості базису розкладення вибрані тригонометричні функції, то говорять не про узагальнений ряд Фур'є, а просто — про розкладення сигналу в ряд Фур'є.

$$s(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)), \quad (6.6)$$

де c_0 — постійна складова сигналу,

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt,$$

і коефіцієнти ряду a_k та b_k обчислюються за формулами:

$$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) \cos(k\omega t) dt, \quad b_k = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) \sin(k\omega t) dt. \quad (6.7)$$

Набір коефіцієнтів ряду Фур'є називається *спектром* сигналу. Розкладення функції у ряд Фур'є називають її гармонічним або *спектральним* аналізом, а складові цього ряду — *спектральними складовими* або *гармоніками*. Таким чином, спектр сигналу показує, скільки і яких за величиною гармонік міститься у даному сигналі.

Особливо слід відзначити ряди Фур'є для парних та непарних функцій. Якщо періодичний сигнал $s(t)$ являє собою на одному періоді парну функцію, то її ряд Фур'є має вигляд

$$s(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t), \quad (6.8)$$

де

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt, \quad a_k = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) \cos(kt) dt. \quad (6.9)$$

Якщо періодичний сигнал $s(t)$ являє собою на одному періоді непарну функцію, то її ряд Фур'є має вигляд

$$s(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega t), \quad (6.10)$$

де

$$b_k = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} s(t) \sin(kt) dt. \quad (6.11)$$

6.2.1 Приклад 1: спектр меандра

Розглянемо класичний приклад розкладення в ряд Фур'є періодичної послідовності прямокутних імпульсів виду, як на рис. 6.6 — так званого *меандра*.

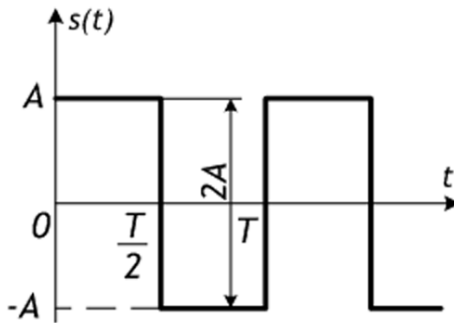


Рис. 6.6 – Меандр

Знайдемо для цього сигналу коефіцієнти ряду Фур'є. Меандр можна задати аналітичним виразом

$$s(t) = \begin{cases} A, & \text{якщо } t < \frac{T}{2}; \\ -A, & \text{якщо } \frac{T}{2} < t < T. \end{cases}$$

Для простоти припустимо, що $A = 1$, $T = 2\pi$. Тоді

$$s(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } t < \pi; \\ -1, & \text{якщо } \pi < t < 2\pi. \end{cases}$$

Якщо такий сигнал розкласти у ряд Фур'є, то, внаслідок того, що він є непарною функцією, в ньому будуть присутні лише синусні (непарні) складові, і згідно (6.10) відповідний ряд Фур'є буде мати наступний вигляд:

$$s(t) = b_1 \sin(\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) + b_3 \sin(3\omega t) + b_4 \sin(4\omega t) + \dots,$$

а його коефіцієнти будуть визначатися за формулою (6.11):

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(kt) dt = -\frac{2}{\pi k} \cos(kt) \Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi k} ((-1)^k - 1).$$

Тоді відповідні коефіцієнти ряду будуть такі:

$$b_1 = -\frac{2}{\pi} \cdot (-2) = \frac{4}{\pi},$$

$$b_2 = -\frac{2}{\pi}(1 - 1) = 0,$$

$$b_3 = -\frac{2}{3\pi} \cdot (-2) = \frac{4}{3\pi},$$

$$b_4 = 0,$$

$$b_5 = -\frac{2}{5\pi} \cdot (-2) = \frac{4}{5\pi},$$

і т.д. Коефіцієнти з парними індексами дорівнюють нулю внаслідок того, що -1 у парному степені дорівнює 1 . Таким чином, якщо винести за дужки спільний множник $\frac{4}{\pi}$, отримаємо

$$s(t) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin(t)}{1} + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \frac{\sin(7t)}{7} + \dots \right).$$

Фур'є-спектр меандра (значення частот і амплітуд складових гармонік) буде мати вигляд як на рис. 6.7, а процес додавання сигналу з окремих гармонік ілюструє рисунок 6.8.

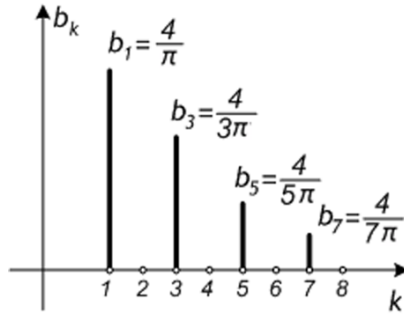


Рис. 6.7 – Спектр меандра (перші 7 гармонік)

Наведений приклад розкладення функції у ряд Фур'є відноситься до періодичних сигналів з періодом T . В цьому випадку

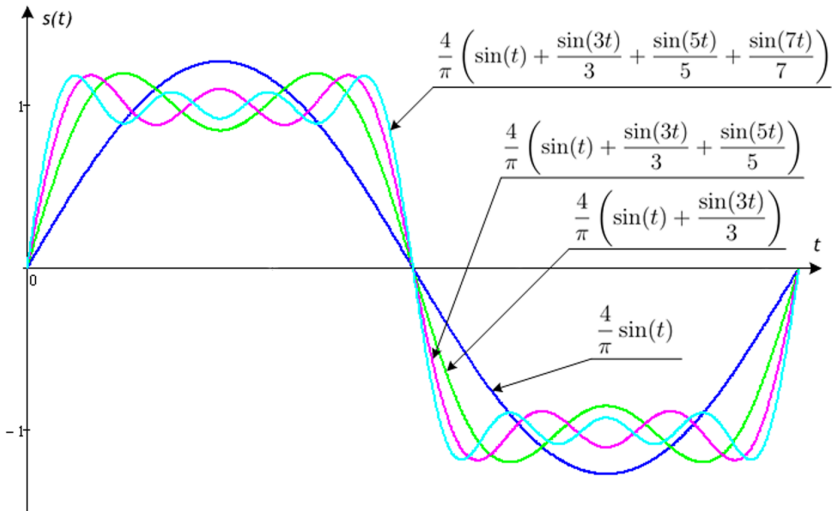


Рис. 6.8 – Утворення меандра шляхом додавання гармонік

спектр має дискретний або лінійчастий характер з періодом (дискретністю) $\frac{1}{T}$.

6.2.2 Властивості перетворення Фур'є

Для більш складних сигналів, ніж меандр, на практиці замість ряду Фур'є використовують *перетворення Фур'є*, яке по суті є тим же рядом, але записується більш компактно:

$$s(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{S}(\omega) \quad \text{або} \quad \widehat{S}(\omega) = \mathcal{F}[s(t)].$$

Прямим перетворенням Фур'є називається вираз

$$\widehat{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-2\pi it\omega} dt,$$

а оберненим перетворенням Фур'є — вираз

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{S}(\omega)e^{2\pi it\omega} d\omega.$$

В останніх виразах t — час, ω — колова частота, $i = \sqrt{-1}$ — уявна одиниця, а $\widehat{S}(\omega)$ — спектр сигналу. У загальному випадку перетворення Фур'є робиться над функцією *комплексної* змінної, запис e^{ix} означає комплексне число виду

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x).$$

Перетворення Фур'є має наступні властивості, які широко використовуються на практиці:

1. **Лінійність:** якщо взяти будь-яку лінійну комбінацію функцій, то її перетворення Фур'є буде такою ж лінійною комбінацією від Фур'є-образів цих функцій:

$$\mathcal{F}[\alpha s(t) + \beta q(t)] = \alpha \widehat{S}(\omega) + \beta \widehat{Q}(\omega).$$

Ця властивість дозволяє зводити складні функції та їх Фур'є-образи до простіших.

2. Незалежність амплітудного спектру від зсуву сигналу в часі — якщо ми посунемо функцію ліворуч або праворуч по вісі t , то поміняється лише її фазовий спектр, амплітудний не зміниться. Математично це записується так:

$$\mathcal{F} [s(t - \tau)] = e^{2\pi i \tau \omega} \widehat{S}(\omega).$$

3. Розтягування або стиснення початкової функції по осі часу (t) пропорційно стискає або розтягує її Фур'є-образ за шкалою частот (ω). Зокрема, спектр сигналу кінцевої тривалості завжди нескінченно широкий і навпаки, спектр кінцевої ширини завжди відповідає сигналу необмеженої тривалості.

$$\mathcal{F} [s(at)] = \frac{1}{|a|} \widehat{S}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

4. Симетрія: у Фур'є-образі функції дійсної змінної (тобто будь-якого реального сигналу) амплітудний спектр завжди є парною функцією, а фазовий спектр (якщо його привести до діапазону $-\pi \dots \pi$) — непарною. Саме з цієї причини на графіках спектрів практично ніколи не малюють від'ємну частину спектру — для дійснозначних сигналів вона не дає ніякої нової інформації (але нульовою при цьому не є):

$$\mathcal{F} [\overline{s(at)}] = \overline{\widehat{S}(-\omega)}.$$

5. Перетворення Фур'є зберігає енергію сигналу. Воно має сенс тільки для сигналів кінцевої тривалості, енергія яких кінцева. Це означає, що спектр подібних сигналів на нескінченності швидко наближається до нуля. Саме через цю властивість на графіках спектрів, як правило, зображують тільки “основну” частину сигналу, тобто ту, що

переносить більшу частку енергії, а решта частини графіка просто прямує до нуля (але, знову ж таки, нулем не є).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{S}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt.$$

6.2.3 Приклад 2: усунення на ЕЕГ-сигналі артефактів від ЕКГ

Хорошим прикладом використання спектрів може бути усунення з ЕЕГ-сигналу артефактів від ЕКГ [21]. На рис. 6.9 зверху показаний ЕЕГ сигнал, а знизу — синхронний з ним ЕКГ-сигнал тієї ж людини. Оскільки рівень ЕКГ-сигналу майже на порядок вищий, на ЕЕГ-сигналі чітко проступають артефакти від QRS-комплексу (позначені стрілками). Як з ЕЕГ-сигналу прибрати ці артефакти?

Відповідь на це питання може дати спектральна обробка обох сигналів. Алгоритм вирішення цієї задачі наступний:

1. Отримати спектри обох сигналів (тобто застосувати до обох сигналів пряме перетворення Фур'є).
2. Від спектра ЕЕГ-сигналу відняти спектр ЕКГ-сигналу.
3. Відновити отриманий ЕЕГ-сигнал (тобто застосувати до результату обернене перетворення Фур'є). Отриманий сигнал буде позбавлений артефактів.

Перелічені дії ілюструє рис. 6.10, на якому показані спектри сигналів спектри ЕЕГ- та ЕКГ-сигналів з рис. 6.9 та їх різниця.

Відновлені сигнали показані на рис. 6.11. Добре видно різниця між другим (нефільтрованим, з артефактами) та третім (відфільтрованим, без артефактів) сигналами.

Важливо відзначити, що задача, проілюстрована в даному прикладі, вирішується за допомогою *дискретного* перетворення Фур'є, яке буде розглянуте в наступному розділі. Це є причи-

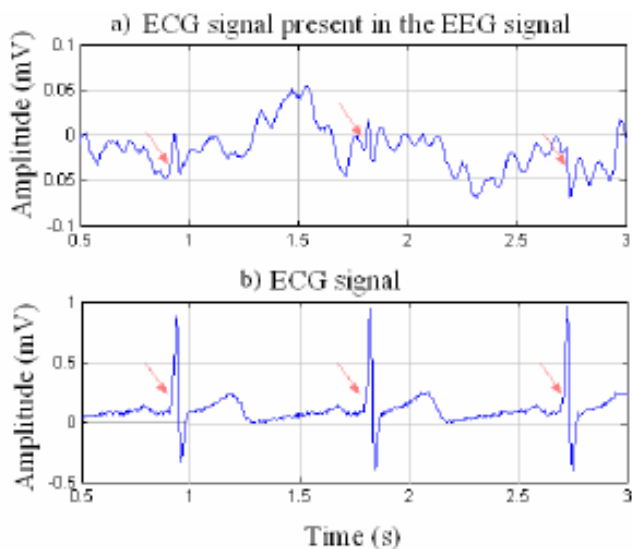


Рис. 6.9 – ЕЕГ-сигнал з артефактами від ЕКГ

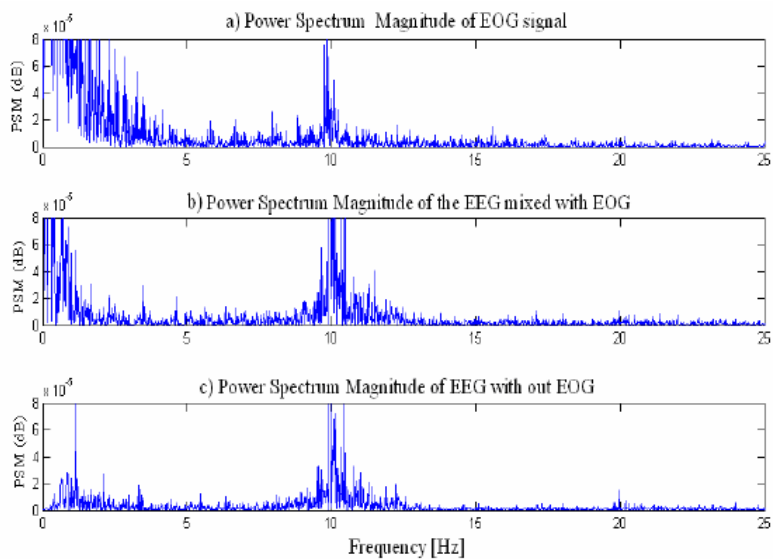


Рис. 6.10 – Спектри ЕЕГ- та ЕКГ-сигналів та їх різниця

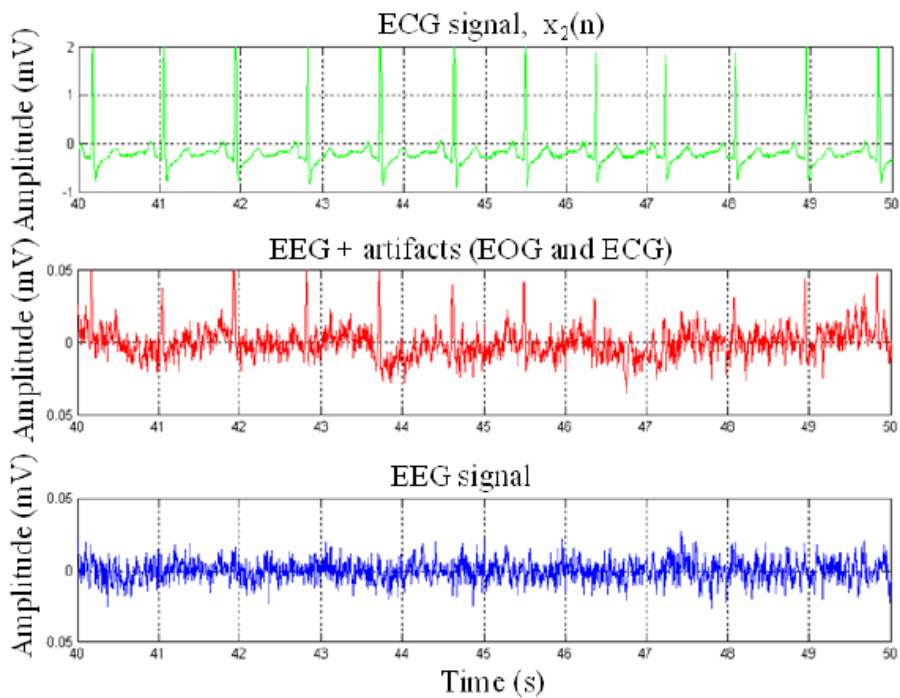


Рис. 6.11 – Відновлені зі спектрів EEG- та EKG-сигнали

ною того, що для реальний сигнал (а особливо стохастичний біосигнал) дуже важко записати у вигляді функції $s(t)$, щоб потім від неї знайти Фур'є-образ. Тому такі задачі вирішуються за допомогою *дискретизації* аналогового сигналу, тобто представлення його у цифровій формі (у вигляді масиву чисел). До цього масиву застосовується дискретне перетворення Фур'є, в результаті якого отримується Фур'є-образ (спектр) теж у вигляді масиву чисел. Всі подальші операції відбуваються з такими масивами. Обернене перетворення Фур'є також існує в дискретному вигляді, і в результаті його отримується масив чисел, який, будучи пропущений через цифро-аналоговий перетворювач, може бути відтворений як аналоговий сигнал.

Обробка сигналів спектральними методами називається обробкою в *частотній області* і є важливою частиною цифрової обробки сигналів.