Тема: Системи лінійних рівнянь. Продовження

Серед численних методів розв'язування систем лінійних рівнянь одним з найбільш зручних, як для теоретичних висновків, так і для практичних цілей, є метод послідовного виключення невідомих або метод Гаусса.

3. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса

Повернемось до системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

З коефіцієнтів цієї системи утворимо матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ та } \overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Матриця A, як нам відомо, називається матрицею системи (1), а матриця $\overline{A} = \left(A \middle| B\right)$, яка отримується доповненням матриці A стовпцем вільних членів – ***розширеною матрицею системи*** (1).

Означення 1. Під ***елементарними перетвореннями*** системи лінійних рівнянь будемо розуміти такі операції:

1. Перестановку двох рівнянь системи.

2. Множення довільного рівняння системи на число, відмінне від нуля.

3. Додавання до одного рівняння системи іншого рівняння, помноженого на довільне число.

4. Викреслення з системи рівнянь рівняння вигляду $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$.

Виконуючи елементарні перетворення системи лінійних рівнянь, ми отримуємо нову систему лінійних рівнянь. Кожному елементарному перетворенню системи відповідає аналогічне перетворення рядків розширеної матриці цієї системи і навпаки, кожному елементарному перетворенню рядків розширеної матриці системи відповідає певне елементарне перетворення системи. Отже, **елементарні перетворення системи зводяться до відповідних перетворень над рядками її розширеної матриці**.

Метод Гаусса полягає в тому, що за допомогою елементарних перетворень система (1) зводиться до спеціального вигляду, з якого всі розв'язки знаходяться безпосередньо.

Означення 2. Дві системи лінійних рівнянь називаються ***рівносильними***, якщо кожний розв'язок однієї з них є розв'язком другої і навпаки (або, якщо обидві системи несумісні).

Зауважимо, що число рівнянь в рівносильних системах може бути різним.
Якщо ми маємо дві рівносильні системи, то знайшовши розв'язок однієї з них, ми тим самим будемо знати розв'язок іншої.

Теорема 2. Елементарні перетворення системи рівнянь не змінюють її розв'язків. (Доведення у додатку 1)

Розглянемо алгоритм Гаусса.

За допомогою елементарних перетворень систему (1) зводять до системи простішого ("східчастого") вигляду, яка рівносильна заданій (дивись додаток 2):

$$\begin{cases} \overline{a}_{11}x_1 + \dots + \overline{a}_{1n}x_n = \overline{b}_1 \\ \qquad \overline{a}_{2k}x_k + \dots + \overline{a}_{2n}x_n = \overline{b}_2 \\ \qquad\qquad \overline{a}_{3l}x_l + \dots + \overline{a}_{3n}x_n = \overline{b}_3 \\ \qquad\qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ \qquad\qquad\qquad \overline{a}_{rs}x_s + \dots + \overline{a}_{rn}x_n = \overline{b}_r \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = \overline{b}_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \dots \quad \dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = \overline{b}_m\,. \end{cases} \tag{5}$$

Можливі такі випадки.

1. Якщо система містить хибні рівності виду $0=b_t$ $\left(0\cdot x_1+0\cdot x_2+\ldots+0\cdot x_n=b\right)$, де $b_t\neq 0$, то вона несумісна.

2. Нехай система (5) не містить рівностей виду $0=b_t$ $(b_t\neq 0)$. Тоді вона є сумісною. Тотожності виду $0=0$ відкидаємо. Припустимо, що $r<n$, тобто число рівнянь менше за число невідомих. Назвемо невідомі x_1, x_k, x_l,..., x_s, з яких починаються перше, друге,..., r-те рівняння, ***основними***, а всі інші невідомі – ***вільними***. Основних невідомих за означенням r. Надаючи вільним невідомим довільних значень і підставляючи ці значення в рівняння системи, з r-го рівняння системи знайдемо x_s. Підставляючи це значення в перші $(r-1)$ рівнянь і, піднімаючись вгору по системі, знайдемо всі основні невідомі. Оскільки вільні невідомі можуть набувати будь-яких значень, система має безліч розв'язків.

3. Нехай в системі (5) $r=n$. Тоді вільних невідомих немає. В цьому випадку система (5) має “трикутний” вигляд

$$\begin{cases} \bar{a}_{11}x_1 & + & \ldots & & + & \bar{a}_{1n}x_n & = & \bar{b}_1 \\ & & \bar{a}_{22}x_2 & + & \ldots + & \bar{a}_{2n}x_n & = & \bar{b}_2 \\ & & \ldots & & \ldots. & & & \ldots \\ & & & & & \bar{a}_{nn}x_n & = & \bar{b}_n. \end{cases}$$

З останнього рівняння системи знайдемо x_n і, піднімаючись по системі вгору, знайдемо всі інші невідомі. Отже, в цьому випадку система має єдиний розв'язок.

Зауваження. При розв'язанні систем, в яких число рівнянь не менше трьох, доцільно виписати *розширену матрицю* системи $\bar{A}=\left(A\middle|B\right)$. Елементарні перетворення над рівняннями системи зводяться при цьому до відповідних дій над рядками розширеної матриці. Після зведення матриці $\bar{A}=\left(A\middle|B\right)$ до “східчастого” вигляду виписують систему рівнянь, яка відповідає отриманій матриці.

Таким чином, універсальним методом розв'язання систем лінійних рівнянь є *метод Гаусса*, який ще називають методом *послідовного виключення невідомих*. Розглянемо його на прикладах.

Приклад 1. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7 \\ 2x_1 + 9x_2 - 8x_3 = 16 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

Розв'яжемо задану систему: а) виконуючи елементарні перетворення безпосередньо над рівняннями системи; б) використовуючи поняття розширеної матриці системи.

а) Виключимо невідоме x_1 з 2-го та 3-го рівнянь системи. Для цього виконаємо послідовно такі дії: 1) додамо до 2-го рівняння 1-ше рівняння, помножене на (-2); 2) додамо до 3-го рівняння 1-ше рівняння, помножене на (-4). В результаті дістанемо систему простішого вигляду, яка рівносильна заданій:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7 \\ \quad 3x_2 - 4x_3 = 2 \\ -15x_2 + 9x_3 = -21. \end{cases}$$

Виключимо невідоме x_2 з 3-го рівняння отриманої системи. Для цього додамо до 3-го рівняння 2-ге рівняння, помножене на 5. Дістанемо

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7 \\ \quad 3x_2 - 4x_3 = 2 \\ \quad\quad -11x_3 = -11. \end{cases} \qquad (*)$$

З останнього рівняння отриманої системи знаходимо $x_3 = 1$. Підставляємо це значення в 2-ге рівняння і знаходимо x_2:

$$3x_2 - 4 \cdot 1 = 2, \quad 3x_2 = 6, \quad x_2 = 2.$$

Підставимо знайдені значення x_2 та x_3 в 1-ше рівняння системи ($*$) і знайдемо x_1:

$$x_1 + 3\cdot 2 - 2\cdot 1 = 7\,,\quad x_1 = 7 - 4\,,\quad x_1 = 3\,.$$

Оскільки задана система та система ($*$) рівносильні, то маємо розв’язок заданої системи: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

б) Розв’яжемо систему, використовуючи поняття розширеної матриці. Розширена матриця заданої системи має вигляд

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 7 \\ 2 & 9 & -8 & 16 \\ 4 & -3 & 1 & 7 \end{array}\right).$$

Виключенню невідомого x_1 з 2-го та 3-го рівнянь системи відповідає утворення нулів у першому стовпці розширеної матриці. Для цього виконаємо послідовно такі дії над рядками матриці: 1) додамо до 2-го рядка матриці 1-й рядок, помножений на (-2); 2) додамо до 3-го рядка матриці 1-й рядок, помножений на (-4). Запишемо в умовних позначеннях вказані дії, а також їх результат – нову розширену матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 7 \\ 2 & 9 & -8 & 16 \\ 4 & -3 & 1 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{cc} (-2) & (-4) \\ & \\ & \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -15 & 9 & -21 \end{array}\right).$$

До 3-го рядка отриманої матриці додамо 2-й рядок, помножений на 5 (виключаємо невідоме x_2 з 3-го рівняння системи):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -15 & 9 & -21 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ 5 \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & -11 \end{array}\right).$$

Зауважимо, що у квадратній таблиці чисел, які записані ліворуч від риски, під діагоналлю стоять нулі.

Випишемо систему рівнянь, яка відповідає знайденій розширеній матриці:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7 \\ \quad 3x_2 - 4x_3 = 2 \\ \qquad -11x_3 = -11. \end{cases}$$

Отримали систему ($*$). Її розв'язок $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

Зауваження. Як бачимо з останнього прикладу, для розв'язування системи рівнянь зручно виписати розширену матрицю системи і виконати потрібні перетворення над рядками матриці для утворення нулів на місці певних елементів (це відповідає виключенню відповідних невідомих з рівнянь системи).

Приклад 2. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 13 \\ x_1 - 10x_2 - 6x_3 = 5. \end{cases}$$

Запишемо розширену матрицю системи і поміняємо місцями її перший та третій рядки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -2 & -1 \\ 5 & 6 & 2 & 13 \\ 1 & -10 & -6 & 5 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -10 & -6 & 5 \\ 5 & 6 & 2 & 13 \\ 3 & -2 & -2 & -1 \end{array}\right).$$

Виконаємо наступні дії над рядками нової матриці: 1) додамо до 2-го рядка 1-й рядок, помножений на (-5); 2) додамо до 3-го рядка 1-й рядок, помножений на (-3). Запишемо схематично ці дії, а також їх результат – нову розширену матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -10 & -6 & 5 \\ 5 & 6 & 2 & 13 \\ 3 & -2 & -2 & -1 \end{array}\right) (-5) \quad (-3) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -10 & -6 & 5 \\ 0 & 56 & 32 & -12 \\ 0 & 28 & 16 & -16 \end{array}\right).$$

Третій рядок помножимо на (-2) і додамо до нього 2-й рядок:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -10 & -6 & 5 \\ 0 & 56 & 32 & -12 \\ 0 & 28 & 16 & -16 \end{array}\right)(-2) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -10 & -6 & 5 \\ 0 & 56 & 32 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{array}\right).$$

Запишемо систему рівнянь, яка відповідає знайденій розширеній матриці:

$$\begin{cases} x_1 - 10x_2 - 6x_3 = 5 \\ 56x_2 + 32x_3 = -12 \\ 0 = 20. \end{cases}$$

Остання рівність в цій системі є хибною. Звідси випливає несумісність заданої системи. Таким чином, задана система не має розв'язків.

Приклад 3. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса.

$$\begin{cases} 13x_1 + 14x_2 + 8x_3 = -3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7 \\ 7x_1 - 16x_2 + 23x_3 = -30 \\ 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}13&14&8&-3\\3&-2&6&-7\\7&-16&23&-30\\5&8&1&2\end{array}\right)\longrightarrow\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c}3&-2&6&-7\\13&14&8&-3\\7&-16&23&-30\\5&8&1&2\end{array}\right)\end{array}\begin{array}{l}(-4)\ (-2)\ 2\\ \\ \\(-1)\end{array}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}3&-2&6&-7\\1&22&-16&25\\1&-12&11&-16\\1&-12&11&-16\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\(-1)\\ \\ \end{array}\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}3&-2&6&-7\\1&22&-16&25\\1&-12&11&-16\\0&0&0&0\end{array}\right)\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-12&11&-16\\1&22&-16&25\\3&-2&6&-7\\0&0&0&0\end{array}\right)\begin{array}{l}(-1)\ (-3)\\ \\ \\ \\ \end{array}\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-12&11&-16\\0&34&-27&41\\0&34&-27&41\\0&0&0&0\end{array}\right)\begin{array}{l}\\(-1)\\ \\ \\ \end{array}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-12&11&-16\\0&34&-27&41\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right).$$

Знайденій матриці відповідає система рівнянь

$$\begin{cases}x_1-12x_2+11x_3=-16\\ \quad\;\; 34x_2-27x_3=41.\end{cases}$$

Надамо невідомому x_3 довільного значення c. Починаючи з другого рівняння і переходячи до першого, знаходимо

$$x_2=\frac{1}{34}\left(41+27c\right);$$

$$x_1=\frac{12}{34}\cdot\left(41+27c\right)-11c-16=\frac{1}{17}\left(246+162c-17\cdot 11c-17\cdot 16\right)=$$

$$=-\frac{1}{17}\left(26+25c\right).$$

Отже, $x_1=-\dfrac{1}{17}\left(26+25c\right)$, $x_2=\dfrac{1}{34}\left(41+27c\right)$, $x_3=c$, $c\in R$.

Приклад 4. Розв’язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса.

$$\begin{cases}2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6\\3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4\\9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2.\end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}2&7&3&1&6\\3&5&2&2&4\\9&4&1&7&2\end{array}\right)\begin{array}{c}\\2\\2\end{array}\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}2&7&3&1&6\\6&10&4&4&8\\18&8&2&14&4\end{array}\right)\begin{array}{c}(-3)\quad(-9)\\ \\ \\ \end{array}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}2&7&3&1&6\\0&-11&-5&1&-10\\0&-55&-25&5&-50\end{array}\right)\begin{array}{c}\\(-5)\\ \\ \end{array}\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}2&7&3&1&6\\0&-11&-5&1&-10\\0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

Маємо систему рівнянь

$$\begin{cases}2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6\\ \qquad -11x_2-5x_3+x_4=-10.\end{cases}$$

У цій системі x_3 та x_4 – вільні невідомі. Надамо їм довільних значень: $x_4 = c_1$, $x_3 = c_2$, $c_1, c_2 \in R$. Тоді з другого рівняння

$$x_2 = \frac{1}{11}\left(10 + c_1 - 5c_2\right).$$

Підставляючи це значення в перше рівняння, отримаємо

$$2x_1 + \frac{7}{11}\left(10 + c_1 - 5c_2\right) + 3c_2 + c_1 = 6,$$

$$2x_1 = 6 - c_1 - 3c_2 - \frac{7}{11}\left(10 + c_1 - 5c_2\right) = \frac{2}{11}\left(c_2 - 9c_1 - 2\right),$$

$$x_1 = \frac{1}{11}\left(c_2 - 9c_1 - 2\right).$$

Таким чином, $x_1 = \frac{1}{11}\left(c_2 - 9c_1 - 2\right)$, $x_2 = \frac{1}{11}\left(10 + c_1 - 5c_2\right)$, $x_3 = c_2$, $x_4 = c_1$, $c_1, c_2 \in R$.

Додаток 1. Доведення Теореми 2.

<u>*Доведення.*</u> ***1°***. Помножимо i -тий рядок розширеної матриці $\overline{A}$ на число $c \neq 0$. Це рівносильно множенню i -го рівняння системи (1) $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$ на число $c \neq 0$. В результаті отримуємо систему лінійних рівнянь, яка відрізняється від системи (1) лише i -тим рівнянням.

Нехай $x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$ – розв'язок системи (1). Ці значення невідомих будуть задовольняти всі рівняння системи (1), зокрема i -те рівняння $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \ldots + a_{in}\alpha_n = b_i$. Помножимо обидві частини цього рівняння на c: $ca_{i1}\alpha_1 + ca_{i2}\alpha_2 + \ldots + ca_{in}\alpha_n = cb_i$.

Значення $\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ невідомих $x_1,\ x_2, \ldots, x_n$ задовольняють i -те рівняння перетвореної системи. Оскільки в перетвореній системі всі інші рівняння ті ж, що й у вихідній системі (1), то ці значення невідомих задовольняють і решту рівнянь перетвореної системи.

Отже, довільний розв'язок системи (1) є розв'язком перетвореної системи.

Піддамо перетворену систему лінійних рівнянь елементарному перетворенню того ж типу, помноживши обидві частини i -го рівняння на число $\frac{1}{c}$. В результаті прийдемо до системи (1). Аналогічно попередньому отримуємо, що всякий розв'язок перетвореної системи є розв'язком системи (1). Отже, для елементарного перетворення **1** теорему доведено.

2°. Додамо до i -го рядка розширеної матриці B її j -тий рядок, помножений на деяке число α. Це означає, що до i -го рівняння $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$ системи (1) додається j -те рівняння цієї системи, помножене на число α:

$$\alpha a_{j1}x_1 + \alpha a_{j2}x_2 + \ldots + \alpha a_{jn}x_n = \alpha b_j .$$

У перетвореній системі всі рівняння, крім i -го, будуть такими ж, що й в системі (1), а i -те рівняння приймає вигляд

$$\left(a_{i1} + \alpha a_{j1}\right)x_1 + \left(a_{i2} + \alpha a_{j2}\right)x_2 + \ldots + \left(a_{in} + \alpha a_{jn}\right)x_n = b_i + \alpha b_j .$$

Нехай $x_1 = \beta_1,\ x_2 = \beta_2, \ldots, x_n = \beta_n$ – розв'язок системи (1). Тоді

$$a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \ldots + a_{in}\beta_n = b_i\,,$$
$$\alpha a_{j1}\beta_1 + \alpha a_{j2}\beta_2 + \ldots + \alpha a_{jn}\beta_n = \alpha b_j\,.$$

Почленно додамо ці рівності
$$\left(a_{i1} + \alpha a_{j1}\right)\beta_1 + \left(a_{i2} + \alpha a_{j2}\right)\beta_2 + \ldots + \left(a_{in} + \alpha a_{jn}\right)\beta_n = b_i + \alpha b_j\,.$$

Звідси випливає, що $x_1 = \beta_1,\ x_2 = \beta_2, \ldots, x_n = \beta_n$ задовольняють i -тому рівнянню перетвореної системи і всім іншим рівнянням цієї системи, оскільки вони такі ж, як і в системі (1). Отже, доведено, що всякий розв’язок системи (1) є розв’язком перетвореної системи. Навпаки, всякий розв’язок перетвореної системи є розв’язком системи (1). Дійсно, якщо ми додамо до i-го рівняння перетвореної системи її j-те рівняння, помножене на $-\alpha$, то будемо мати систему (1). Аналогічно попередньому отримуємо, що всякий розв’язок перетвореної системи є розв’язком системи (1). Отже, ці системи рівносильні.

***3*°**. Поміняємо місцями в розширеній матриці $\overline{A}$ два довільних рядки. Тоді в системі (1) поміняються місцями два відповідних рівняння. Зрозуміло, що таке перетворення приводить до рівносильної системи.

***4*°**. Нехай у розширеній матриці $\overline{A}$ є нульовий рядок. Відкинемо його. Тоді в системі (1) відкидається рівняння $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$, яке задовольняється при довільних значеннях невідомих. Тобто, якщо ми припишемо таке рівняння до деякої системи чи, навпаки, викреслимо його з системи, то отримаємо систему, яка буде рівносильною вихідній.

Зрозуміло також, що у випадку, коли одна з систем (система (1) чи перетворена система) є несумісною, то несумісною буде й інша система, що завершує доведення теореми.

Додаток 2. Алгоритм Гаусса.

Можливі два випадки

<u>*Випадок 1*</u>. Серед рівнянь системи (1) є рівняння вигляду

$$0\cdot x_1+0\cdot x_2+\ldots+0\cdot x_n=b, \qquad (*)$$

де число $b\neq 0$. Жоден набір значень невідомих такому рівнянню задовольнити не може. Тому система, що містить це рівняння, є несумісною.

<u>*Випадок 2*</u>. В системі (1) немає рівнянь вигляду (*) при $b\neq 0$ і в кожному рівнянні системи хоча б один з коефіцієнтів при невідомих відмінний від нуля. Розглянемо цей випадок.

Оскільки хоча б один з коефіцієнтів a_{i1} ($i=1,\ 2,\ldots,m$) відмінний від нуля (у противному разі в систему не входило б невідоме x_1) і рівняння в системі можна міняти місцями, то без будь-яких обмежень загальності можна вважати, що $a_{11}\neq 0$.

Виключимо з усіх рівнянь системи (1), починаючи з другого, невідоме x_1. Для цього до другого рівняння додамо перше, помножене на $-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$, до третього рівняння – перше, помножене на $-\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$ і т.д., до m-го рівняння – перше, помножене на $-\dfrac{a_{m1}}{a_{11}}$. В результаті система (1) перетвориться до вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \boxed{\begin{matrix} a_{22}^{(1)}x_2+\ldots+a_{2n}^{(1)}x_n=b_2^{(1)} \\ \vdots \\ a_{m2}^{(1)}x_2+\ldots+a_{mn}^{(1)}x_n=b_m^{(1)} \end{matrix}} \end{cases}, \qquad (1')$$

де

$$a_{ij}^{(1)}=a_{ij}-\frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}, \quad b_i^{(1)}=b_i-\frac{a_{i1}}{a_{11}}b_1,$$

$$i=2,\ 3,\ldots,m;\ \ j=2,\ 3,\ldots,n.$$

Перший крок методу Гаусса завершено. За допомогою рамки виділено ту частину системи, яка піддаватиметься подальшим перетворенням. Назвемо її залишковою частиною.

Повторимо попередні міркування стосовно залишкової частини системи. Якщо в залишковій частині системи є рівняння вигляду (2), то система (1) несумісна. Припустимо, що $a_{22}^{(1)} \neq 0$. Якщо це не так, то можна переставити рівняння залишкової частини. Якщо ж всі $a_{i2}^{(1)}$, $i = 2, 3, \ldots, m$ дорівнюють нулю, доведеться зробити додаткову перенумерацію невідомих. Виконаємо наступний крок: виключимо з усіх рівнянь залишкової частини, починаючи з другого, невідоме x_2.

Отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad\qquad \boxed{\begin{array}{c} a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \vdots \\ a_{m3}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{mn}^{(2)}x_n = b_m^{(2)} \end{array}} \end{cases}, \qquad (1'')$$

де

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(1)}} a_{2j}^{(1)}, \quad b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(1)}} b_2^{(1)},$$

$$i = 3, 4, \ldots, m; \quad j = 3, 4, \ldots, n.$$

Другий крок завершено. Нова залишкова частина системи містить на одне рівняння менше, ніж залишкова частина системи після першого кроку.

Продовжимо цей процес. Якщо залишкова частина системи (1″) містить рівняння вигляду (*), то система (1) несумісна.

Якщо ж $a_{33}^{(2)} \neq 0$ (можливо, для цього доведеться здійснити додаткову перенумерацію невідомих), наступний крок полягає у виключенні змінної x_3 в залишковій частині системи (4).

Оскільки число кроків не може перевищувати n, то ми прийдемо до системи без залишкової частини, тобто до системи вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2r}^{(1)}x_r + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad a_{rr}^{(r-1)}x_r + \ldots + a_{rn}^{(r-1)}x_n = b_r^{(r-1)}, \end{cases} \tag{5}$$

де коефіцієнти $a_{11}, a_{22}^{(1)}, \ldots, a_{rr}^{(r-1)}$ відмінні від нуля.

Можлива зміна числа рівнянь $\left(r \le m\right)$ пов’язана з тим, що в процесі перетворень відкидаються рівняння вигляду 0 = 0.

Перейдемо до розв’язування системи (5). Можливі два випадки: $r = n$ та $r < n$.

1) $r = n$. З останнього рівняння системи (5) знайдемо єдине значення x_n. Підставляючи це єдине значення у попереднє рівняння і враховуючи, що $a_{n-1\,n-1}^{(n-2)} \ne 0$, знайдемо єдине значення x_{n-1}. Підставляючи знайдені єдині значення x_n, x_{n-1} у попереднє рівняння, знайдемо єдине значення x_{n-2} і так далі. Отже, у випадку $r = n$ система (5) має єдиний розв’язок.

2) $r < n$. З останнього рівняння системи (5), враховуючи, що $a_{rr}^{(r-1)} \ne 0$, знаходимо

$$x_r = \frac{1}{a_{rr}^{(r-1)}}\left(b_r^{(r-1)} - a_{r\,r+1}^{(r-1)}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}^{(r-1)}x_n\right) = c_r + c_{r\,r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{rn}x_n,$$

де $c_r = \dfrac{b_r^{r-1}}{a_{rr}^{(r-1)}}$, $\quad c_{rj} = -\dfrac{a_{rj}^{(r-1)}}{a_{rr}^{(r-1)}}$, $\quad j = r+1, \ldots, n$.

Підставляючи отриманий вираз для x_r в передостаннє рівняння і враховуючи, що $a_{r-1\,r-1}^{(r-2)} \ne 0$, знайдемо таким же чином x_{r-1}:

$$x_{r-1} = c_{r-1} + c_{r-1r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{r-1n}x_n$$

і т.д. Підставляючи знайдені вирази для $x_r, x_{r-1}, \ldots, x_2$ в перше рівняння системи (5), знайдемо вираз для x_1

$$x_1 = c_1 + c_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{1n}x_n .$$

Отже, система (5), а з нею і вихідна система (1) зводиться до вигляду

$$\begin{cases} x_1 = c_1 + c_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{1n}x_n \\ x_2 = c_2 + c_{2r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{2n}x_n \\ \quad \vdots \\ x_r = c_r + c_{rr+1}x_{r+1} + \ldots + c_{rn}x_n \end{cases} \qquad (r < n). \qquad (6)$$

Невідомі $x_{r+1}, \ldots, x_n$, які стоять у правих частинах рівнянь системи (6), називаються ***вільними*** і можуть приймати довільні значення. Надаючи їм конкретних значень, знайдемо з системи (6) значення для $x_1, x_2, \ldots, x_r$.

Отже, у випадку $r < n$ вихідна система (1) має нескінченну множину розв'язків, а формули (6) є ***загальним розв'язком*** цієї системи.

Зауваження 1. Якщо вихідна система лінійних рівнянь (1) однорідна ($b_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$), то праві частини всіх рівнянь системи (5) дорівнюють нулю. Випадку $r = n$ відповідає єдиний (нульовий, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$) розв'язок вихідної системи. У випадку $r < n$ існують розв'язки, відмінні від нульового. Зокрема, якщо у вихідній однорідній системі лінійних рівнянь (1) $m < n$, завжди матимемо випадок $r < n$. Отже, якщо система лінійних рівнянь однорідна і кількість рівнянь такої системи менша кількості невідомих, то ця система має ненульові розв'язки.