

ТЕМА 2. Моделі задач лінійного програмування та методи їх розв'язування

2.3. Симплекс-метод розв'язування задач лінійного програмування (ЗЛП)

ВАЖЛИВО!!! Теоретичний матеріал, необхідний для розв'язання задачі розміщений на освітньому порталі у відповідній темі конспекту лекцій.

Приклад розв'язання ЗЛП симплексним (симплекс) методом

Приклад 2.1. Для виготовлення двох видів продукції P_1 та P_2 використовуються три види сировини S_1 , S_2 та S_3 . Запаси сировини, норми витрат сировини на виготовлення одиниці продукції кожного виду та дохід від одиниці продукції кожного виду наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на виготовлення одиниці продукції	
		P_1	P_2
S_1	275	4	5
S_2	680	13	8
S_3	60	1	1
Дохід від одиниці продукції		9	6

Необхідно знайти такий план виробництва, який забезпечить найбільший сумарний дохід.

♦ Розв'язування.

Побудуємо математичну модель задачі. Нехай x_1 та x_2 – загальна кількість відповідно продукції P_1 та P_2 ; Z – сумарний дохід, який отримаємо від реалізації виробленої продукції. Оскільки критерій оптимальності в нашій задачі максимальний дохід, то цільова функція виглядатиме наступним чином:

$$Z = 9x_1 + 6x_2 \quad (\max),$$

Тоді математична модель задачі матиме вигляд:

$$Z = 9x_1 + 6x_2 \quad (\max),$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \leq 275, \\ 13x_1 + 8x_2 \leq 680, \\ x_1 + x_2 \leq 60, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Приведемо задачу до канонічного виду (див. алгоритм симплексного методу, 1 етап) :

$$Z = 9x_1 + 6x_2 \quad (\max),$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + x_3 = 275, \\ 13x_1 + 8x_2 + x_4 = 680, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 60, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю задачу симплекс-методом. Креслимо і заповнюємо початкову таблицю:

Таблиця 2.1

№ таблиці	№ рядка	Базис	Опорний план	Коефіцієнти при невідомих				
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	0	Z	0	-9	-6	0	0	0
	1	x_3	275	4	5	1	0	0
	2	$x_4 \leftarrow$	680	13	8	0	1	0
	3	x_5	60	1	1	0	0	1

Ітерація 1. В нульовий рядок заносимо інформацію про цільову функцію, а в рядки 1-3 дані з відповідних рівнянь системи обмежень. Для заповнення нульового рядка початкової симплекс-таблиці цільову функцію запишемо в такому ж вигляді, як обмеження задачі, тобто у вигляді рівняння $Z - 9x_1 - 6x_2 = 0$ (всі невідомі перенесемо в ліву частину), і в подальшому нульовий рядок будемо заповнювати так само, як і рядки 1-3, що відповідають обмеженням. В стовпчику «Базис» записуємо базисні невідомі з системи обмежень, а для нульового рядка базисною невідомою є Z. В стовпчику «Опорний план» записуємо значення базисних невідомих, коли вільні невідомі x_1 та x_2 дорівнюють нулю (праві частини рівнянь-обмежень та цільової функції). В наступних стовпчиках записуємо коефіцієнти при невідомих в цільовій функції та системі обмежень.

Випишемо з першої таблиці початковий опорний план $x_{\text{опорн.}} = (0; 0; 275; 680; 60)$. Знайдемо значення цільової функції при цьому плані $Z(x_{\text{опорн.}}) = 9 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 0$. Перевіримо, чи даний опорний план є оптимальним. Для визначення ступеня оптимальності опорного плану використовується нульовий рядок. Цільова функція досліджується на максимум, значить для оптимальності опорного плану в нульовому рядку не має бути від'ємних чисел. В нас в нульовому рядку є два від'ємних числа ((-9) та (-6)), значить досліджуваний опорний план не є оптимальним. Вибираємо найменше з цих чисел (-9) і стовпець, в якому знаходиться це число є ключовим, а невідому x_1 , яка відповідає цьому стовпцю потрібно ввести в базис. Ставимо біля цієї невідомої стрілочку (якщо цільова функція мінімізується і в нульовому рядку є додатні числа, то вибираємо найбільше з цих чисел і за ним визначаємо, яку невідому потрібно ввести в базис). Щоб визначити, яку з невідомих потрібно вивести з базису, складаємо відношення елементів стовпця «Опорний план» до відповідних додатних елементів ключового стовпця і вибираємо найменше з цих відношень:

$$275 : 4 = 68,75;$$

$$680 : 13 = 52,3; \quad (\min)$$

$$60 : 1 = 60.$$

Невідому, яка відповідає цьому найменшому відношенню (в нашому випадку x_4) виводимо з базису. Ставимо біля цієї невідомої стрілочку, а рядок, якому відповідає це найменше відношення називається ключовим. На перетині ключового рядка і ключового стовпця знаходиться ключовий (генеральний) елемент, в даному випадку, рівний 13.

Ітерація 2. Переходимо до другої симплекс-таблиці. Замість невідомої x_4 в базис вводимо невідому x_1 . На місці ключового елемента нам потрібно отримати 1, а всі інші елементи в стовпці повинні дорівнювати нулю. Для цього ключовий рядок ділимо на ключовий (генеральний) елемент, тобто на 13, і результат записуємо на місці другого рядка табл. 2.2. Усі інші рядки табл. 2.2 заповнюємо методом Жордана-Гауса, послідовно виключаючи невідому x_1 з нульового, першого та третього рядків:

- 1) множимо почленно другий рядок на 9 і додаємо відповідні елементи нульового рядка табл. 2.1, результат записуємо на місці нульового рядка табл. 2.2;
- 2) множимо кожен елемент другого рядка на (-4) і додаємо відповідні елементи першого рядка табл. 2.1, результат записуємо на місці першого рядка табл. 2.2;
- 3) множимо кожен елемент другого рядка на (-1) і додаємо відповідні елементи третього рядка табл. 2.1, результат записуємо на місці третього рядка табл. 2.2.

Таблиця 2.2

№ таблиці	№ рядка	Базис	Опорний план	Коефіцієнти при невідомих				
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	0	Z	$\frac{6120}{13}$	0	$-\frac{6}{13}$	0	$\frac{9}{13}$	0
	1	x_3	$\frac{855}{13}$	0	$\frac{33}{13}$	1	$-\frac{4}{13}$	0
	2	x_1	$\frac{680}{13}$	1	$\frac{8}{13}$	0	$\frac{1}{13}$	0
	3	$x_5 \leftarrow$	$\frac{100}{13}$	0	$\frac{5}{13}$	0	$-\frac{1}{13}$	1

Ми отримали новий опорний план:

$$x_{\text{опорн.}} = \left(\frac{680}{13}; 0; \frac{855}{13}; 0; \frac{100}{13} \right).$$

Значення цільової функції при цьому:

$$Z(x_{\text{опорн.}}) = 9 * \frac{680}{13} + 6 * 0 = \frac{6120}{13} = 470,77.$$

Перевіримо цей опорний план на оптимальність. В нульовому рядку є ще від'ємне число ($-\frac{6}{13}$), значить вищезгаданий опорний план не є оптимальним.

Невідому, яка відповідає цьому стовпцю (x_2) вводимо в базис. Ставимо біля цієї невідомої стрілочку. Складаємо відношення елементів стовпця «Опорний план» до відповідних додатних елементів ключового стовпця і вибираємо найменше з цих відношень:

$$\frac{855}{13} : \frac{33}{13} = 25,9;$$

$$\frac{680}{13} : \frac{8}{13} = 85;$$

$$\frac{100}{13} : \frac{5}{13} = 20 \quad (\min).$$

Невідому, яка відповідає цьому найменшому відношенню (в нашому випадку x_5) виводимо з базису. Ставимо біля цієї невідомої стрілочку. Ключовий елемент $-\frac{5}{13}$.

Ітерація 3. Переходимо до третьої симплекс-таблиці. Замість невідомої x_5 в базис вводимо невідому x_2 . Ключовий (третій) рядок ділимо на $\frac{5}{13}$ і результат записуємо на місці третього рядка табл. 2.3. Знову використаємо метод Жордана-Гауса, послідовно виключаючи невідому x_2 з нульового, першого та другого рядків:

- 1) множимо почленно третій рядок на $\frac{6}{13}$ і додаємо відповідні елементи нульового рядка табл. 2.2, результат записуємо на місці нульового рядка табл. 2.3;
- 2) множимо кожен елемент третього рядка на $(-\frac{33}{13})$ і додаємо відповідні елементи першого рядка табл. 2.2, результат записуємо на місці першого рядка табл. 2.3;
- 3) кожен елемент третього рядка множимо на $(-\frac{8}{13})$ і додаємо відповідні елементи другого рядка табл. 2.2, результат записуємо на місці другого рядка табл. 2.3.

Таблиця 2.3

№ таблиці	№ рядка	Базис	Опорний план	Коефіцієнти при невідомих				
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	0	Z	480	0	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{5}$
	1	x_3	15	0	0	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{33}{5}$
	2	x_1	40	1	0	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{8}{5}$
	3	x_5	20	0	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{13}{5}$

В нульовому рядку останньої таблиці немає від'ємних чисел, а значить ми отримали оптимальний розв'язок: $x_{opt}=(40; 20; 15; 0; 0)$, $Z_{max} = 480$.

Отже, максимальний дохід становитиме $Z_{max}=480$, якщо продукції Π_1 виготовити 40 одиниць ($x_1=40$), а продукції Π_2 – 20 одиниць ($x_2=20$).

Перевірка: $Z_{max} = 9 \cdot 40 + 6 \cdot 20 = 360 + 120 = 480$.