Вступ (задачі та методи урівнювальних обчислень)

Для того, щоб однозначно визначити чисельні значення t невідомих параметрів, необхідно виміряти t величин, що вибрані відповідним способом.

Наприклад, для визначення положення точки на площині треба два параметри — координати X та Y. Отже, необхідно виміряти дві величини.

Вимірювання, виконані понад необхідні, будуть надлишковими. Різні комбінації по t величин з усіх n виміряних ($t < n$) за наявності похибок вимірювань приведуть до різних за своїм значеннями шуканих параметрів. При цьому необхідно визначити оптимальні значення цих параметрів, які отримуються при обробці результатів вимірювань з використанням принципу найменших квадратів:

$$\left[pvv\right] = \min,$$

де p — вага виміряних значень; v — поправка у виміряні значення.

Процес знаходження кінцевих значень шуканих параметрів за наявності надлишкових вимірювань називають урівнюванням.

Урівнювання з використанням принципу найменших квадратів називають строгим урівнюванням. При цьому розв’язуються такі задачі:

1. виключається невизначеність (багатозначність розв'язку, що зв’язано з надлишковим числом вимірювань)
2. підвищується точність та надійність отриманих результатів за рахунок оптимального використання всіх вимірювань. Підвищення точності зростає зі збільшенням числа надлишкових вимірювань
3. виконується оцінка точності виміряних та урівнених величин та функцій від них.

Строге урівнювання може бути виконане параметричним або корелатним способами, які є обчислювальними реалізаціями методу найменших квадратів і приводять до однакового результату.

Основи параметричного урівнювання.

1. Суть параметричного урівнювання.

При параметричному способі як урівнювані величини приймаються деякі параметри, що найбільш повно відображають характеристики фізичного об’єкта або явища. Ці параметри називають необхідними невідомими.

Урівнювані параметри вибирають таким чином, щоб їх зв'язок з вимірюваними елементами виражався найбільш простими формулами.

Іноді за урівнені параметри приймають самі вимірювані величини. Обов’язковою умовою для параметрів є можливість функціонального вираження всіх вимірюваних величин через урівнювані параметри.

2. Теорія параметричного урівнювання.

Нехай задано n виміряних значень $M_1', M_2', \ldots, M_t', \ldots, M_n'$, з яких t величин необхідні для одноразового визначення шуканих параметрів. Задача урівнювання виникає при умові $n > t$. Різниця $r = n - t$ дорівнює числу надлишкових вимірювань (числу ступенів свободи).

Позначимо шукані параметри — T_1, T_2, …, T_t і будемо вважати, що можна встановити залежності

$$
\begin{aligned}
&M_1 = F_1(T_1, T_2, \ldots, T_t) \\
&M_2 = F_2(T_1, T_2, \ldots, T_t) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&M_n = F_n(T_1, T_2, \ldots, T_t)
\end{aligned}
$$

в яких M_i — урівнені значення виміряних величин. Ці рівняння називають параметричними рівняннями зв’язку.

Виміряні та урівнені значення зв’язані виразом:

$$M_i = M_i' + v_i$$

Отримаємо

$$
\begin{aligned}
&v_1 = F_1(T_1, T_2, \ldots, T_t) - M_1' \\
&v_2 = F_2(T_1, T_2, \ldots, T_t) - M_2' \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&v_n = F_n(T_1, T_2, \ldots, T_t) - M_n'
\end{aligned}
$$

які називаються параметричними рівняннями поправок в загальному вигляді.

Задача урівнювання полягає в тому, щоб знайти значення поправок v_i (i=1, 2, …, n) і параметрів T_j (j=1, 2, …, t)

Після перетворень система рівнянь прийме вигляд

$$
\begin{aligned}
&v_1 = a_1\delta T_1 + b_1\delta T_2 + \ldots + t_1\delta T_t + l_1 \quad (p_1) \\
&v_2 = a_2\delta T_1 + b_2\delta T_2 + \ldots + t_2\delta T_t + l_2 \quad (p_2) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&v_n = a_n\delta T_1 + b_n\delta T_2 + \ldots + t_n\delta T_t + l_n \quad (p_n)
\end{aligned}
$$

де $a_i = \dfrac{\partial F_i}{\partial T_1}$; $b_i = \dfrac{\partial F_i}{\partial T_2}$; …; $t_i = \dfrac{\partial F_i}{\partial T_t}$; $l_i = F_i\left(T_1^0, T_2^0, \ldots, T_t^0\right) - M_i'$;

$T_1^0, T_2^0, \ldots, T_t^0$ — наближені (попередні) значення параметрів.

Кожне з цих рівнянь має вагу

$p_i = \dfrac{\mu_0^2}{m_i^2}$; де μ_0 — середня квадратична похибка одиниці ваги.

Таким чином маємо систему n рівнянь, які містять $n + t$ невідомих. Для визначеності використаємо додаткову умову $[pvv] = \min$.

Після перетворень отримаємо систему t рівнянь з t невідомими (система нормальних рівнянь):

$$
\begin{aligned}
&[paa]\delta T_1 + [pab]\delta T_2 + \ldots + [pat]\delta T_t + [pal] = 0 \\
&[pab]\delta T_1 + [pbb]\delta T_2 + \ldots + [pbt]\delta T_t + [pbl] = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&[pat]\delta T_1 + [pbt]\delta T_2 + \ldots + [ptt]\delta T_t + [ptl] = 0
\end{aligned}
$$

З цієї системи знайдемо поправки δT_j до попередніх значень параметрів:

$$Tj = T_j^0 + \delta T_j \quad (j = 1, 2, \ldots, t)$$

Підставимо поправки δT_j в систему параметричних рівнянь і отримаємо поправки v_i у виміряні величини

Таким чином розв'язується перша задача параметричного урівнюваня.

3. Теорія параметричного урівнювання в матричному вигляді.

Система параметричних рівнянь поправок в матричному вигляді має вигляд:

$V = A \cdot T + L$.

$$V = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{vmatrix}; \; A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & t_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & t_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & \dots & t_n \end{vmatrix}; \; T = \begin{vmatrix} \delta T_1 \\ \delta T_2 \\ \vdots \\ \delta T_n \end{vmatrix}; \; L = \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{vmatrix}; \; P = \begin{vmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{vmatrix}.$$

За допомогою матричних перетворень отримаємо систему параметричних рівнянь поправок.

Матричний запис умови найменших квадратів має вигляд

$V^T PV = \min$.

Система нормальних рівнянь в матричному вигляді

$NT + A^T PL = 0$

де $N = \begin{vmatrix} [paa] & [pab] & \dots & [pat] \\ [pab] & [pbb] & \dots & [pbt] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [pat] & [pbt] & \dots & [ptt] \end{vmatrix}; \; A^T PL = \begin{vmatrix} [pal] \\ [pbl] \\ \vdots \\ [ptl] \end{vmatrix}$

Шуканий вектор $T = \underbrace{-N^{-1} A^T P}_{B} L = BL$, B називається матрицею лінійного перетворення.

За її допомогою можна обчислити вектор поправок T до попередніх значень урівнюваних параметрів.

Підставимо вектор T в параметричне рівняння поправок. Після перетворень

$V = D \cdot L$

$D = E + A \cdot B$

Матрицю N^{-1} називають матрицею вагових коефіцієнтів і позначають Q. З її допомогою здійснюються оцінка точності урівнених параметрів.

4. Оцінка точності за результатами параметричного урівнювання.

4.1. Загальні положення.

Однією із задач урівнювальних обчислень є визначення середньої квадратичної похибки виміряних та урівнених величин,а також функцій від них. В загальному для цього використовують формулу:

$$M_y = \frac{\mu}{\sqrt{p_y}} = \mu\sqrt{\frac{1}{p_y}}$$

де M_y – середня квадратична похибка деякої оцінюваної величини у; μ – середня квадратична похибка одиниці ваги, p_y – вага оцінюваної величини.

Таким чином, для оцінки точності деякої величини необхідно за результатами урівнювання знайти два значення: μ і обернену вагу $\frac{1}{p_y}$.

При математичній обробці розрізняють апріорні та апостеріорні значення середньої квадратичної похибки одиниці ваги. Апріорне значення μ_0 визначається довільним чином до початку урівнювання.

Апостеріорне значення μ визначають за результатами урівнювання за формулою

$$\mu = \sqrt{\frac{[pvv]}{r}},$$

де r – кількість надлишкових вимірювань (кількість ступенів свободи). В загальному випадку значення μ і μ_0 чисельно різняться, через вплив певних причин.

Тому для обчислень M_y використовують такі правила:

1. при $r \geq 20$ використовують апостеріорне значення μ;
2. при $r < 10$ використовують апріорне значення μ_0;
3. при $10 \leq r < 20$ використовують максимальне з μ і μ_0.

4.2. Визначення оберненої ваги функції від урівнюваних параметрів.

Нехай задана функція від урівнюваних значень параметрів

$$y=\Phi\left(T_1,T_2,\ldots,T_t\right)$$

Визначимо обернену вагу цієї функції.

З теорії похибок відома формула

$$\frac{1}{p_y}=\left[\frac{ff}{p}\right]$$

де $f_i=\dfrac{\partial y}{\partial l_i}$, l_i – результати вимірювань, p_i – вага.

В матричному вигляді:

$$\frac{1}{p_y}=F^T\cdot P^{-1}\cdot F$$

$$F=\begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{vmatrix};\ P^{-1}=\begin{vmatrix} p_1^{-1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p_2^{-1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & p_n^{-1} \end{vmatrix}=\frac{1}{\mu_0^2}\begin{vmatrix} m_1^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & m_2^2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & m_n^2 \end{vmatrix}$$

Використовувати цю формулу для визначення оберненої ваги функції не можна, оскільки аргументи T_j – взаємозалежні.

Після перетворень отримаємо такий запис функції:

$$y=\Phi_0+T^T\cdot\Psi,$$

де Φ_0 – попереднє значення функції ($\Phi_0=\Phi\left(T_1^0,T_2^0,\ldots,T_t^0\right)$, $T_1^0,T_2^0,\ldots,T_t^0$ – попередні значення параметрів)

$$T=\begin{vmatrix} \delta T_1 \\ \delta T_2 \\ \vdots \\ \delta T_t \end{vmatrix};\ \Psi=\begin{vmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_t \end{vmatrix};\ \psi_j=\frac{\partial y}{\partial T_j}$$

Обернена вага функції

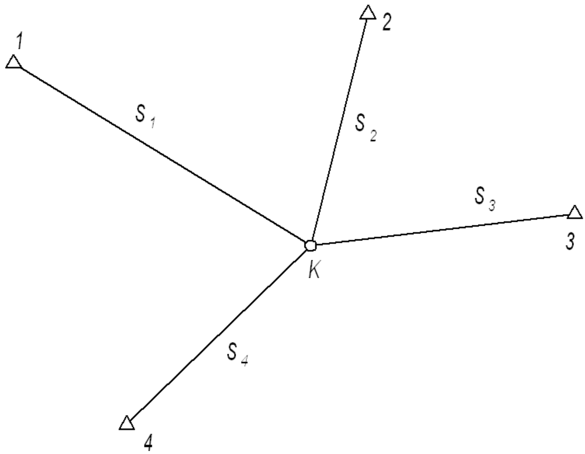
$$\frac{1}{p_y} = \Psi^T \cdot Q \cdot \Psi ,$$

а середня квадратична похибка функції

$$M_y = \mu\sqrt{\Psi^T \cdot Q \cdot \Psi}$$

Приклад.

Урівнювання багаторазової лінійної засічки.



Номер вимірювання	Координати вихідних пунктів		Виміряна відстань S_i' , м	Похибка m_i, м
	X	Y		
1	14962,31	20425,95	6291,091	0,0130
2	15647,60	27301,28	4942,829	0,0171
3	11882,38	31017,04	5687,305	0,0148
4	8132,64	22607,06	4058,456	0,0180

За урівнювані параметри приймемо координати X_K та Y_K точки K.

1. Виразимо виміряні величини через урівнювані параметри:

$$S_1 = \sqrt{(X_1 - X_K)^2 + (Y_1 - Y_K)^2};$$

$$S_2 = \sqrt{(X_2 - X_K)^2 + (Y_2 - Y_K)^2};$$

$$S_3 = \sqrt{(X_3 - X_K)^2 + (Y_3 - Y_K)^2};$$

$$S_4 = \sqrt{(X_4 - X_K)^2 + (Y_4 - Y_K)^2}.$$

2. Знайдемо ваги виміряних значень за формулою

$$p_i = \frac{\mu_0^2}{m_i^2}.$$

Коефіцієнт μ_0 вибираємо таким чином, щоб ваги були близькими до одиниці, тобто μ_0 дорівнює найбільшій середній квадратичній похибці. В нашому випадку μ_0 =0,0180. Тоді

$$p_1 = 1,93;$$
$$p_2 = 1,11;$$
$$p_3 = 1,49;$$
$$p_4 = 1,00.$$

3. Обчислимо попередні координати точки *К*. Для цього достатньо, використавши виміряні значення, розв'язати лінійну засічку з будь-яких двох пунктів. Так, з пунктів *1* і *2* отримаємо наступні результати: $X_K = 11091,307;\ Y_K = 25385,099$. Після округлення до дециметрів попередні значення дорівнюють

$X_K^0 = 11091,300;\ Y_K^0 = 25385,100$.

4. Знайдемо коефіцієнти a_i і b_i параметричних рівнянь поправок. В загальному вигляді

$$a_i = \frac{\partial S_i}{\partial X_K};\ b_i = \frac{\partial S_i}{\partial Y_K}.$$

Використовуючи формули для обчислення відстаней, отримаємо

$$a_i = -\frac{X_i - X_K^0}{S_i} = -\cos\alpha_i^0;\ b_i = -\frac{Y_i - Y_K^0}{S_i} = -\sin\alpha_i^0$$

де α_i^0 – дирекційний кут відповідної сторони, що обчислений з використанням попередніх координат точки *К*.

Значення коефіцієнтів параметричних рівнянь наведено в таблиці

Сторона	$X_i - X_K^0$	$Y_i - Y_K^0$	a_i	b_i	S_i^0 (обчислені за допомогою попередніх значень)	S_i' (виміряні значення)	$l_i = S_i^0 - S_i'$
К-1	3871,01	-4959,15	-0,6153	0,7882	6291,0959	6291,091	0,0049
К-2	4556,30	1916,18	-0,9218	-0,3877	4942,8348	4942,829	0,0058
К-3	791,08	5631,94	-0,1391	-0,9903	5687,2274	5687,305	-0,0776
К-4	-2958,66	-2778,04	0,7290	0,6845	4058,4696	4058,456	0,0136

5. Обчислимо коефіцієнти та вільні члени нормальних рівнянь

p_i	a_i	b_i	l_i	*paa*	*pbb*	*pab*	*pal*	*pbl*
1,93	-0,6153	0,7882	0,0049	0,7307	1,1990	-0,9360	-0,0058	0,0075
1,11	-0,9218	-0,3877	0,0058	0,9432	0,1668	0,3967	-0,0059	-0,0025
1,49	-0,1391	-0,9903	-0,0776	0,0288	1,4612	0,2052	0,0161	0,1145
1,00	0,7290	0,6845	0,0136	0,5314	0,4685	0,4990	0,0099	0,0093
-	-	-	-	2,2341	3,2957	0,1649	0,0142	0,1288

6. Розв'яжемо отриману систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} 2,2341\delta x + 0,1649\delta y + 0,0142 = 0 \\ 0,1649\delta x + 3,2957\delta y + 0,1288 = 0 \end{cases}$$

Отримаємо $\delta x = -0,0035; \delta y = -0,0389$.

7. Обчислимо урівнені значення шуканих параметрів – координат точки *K*.

$$X_K = X_K^0 + \delta x = 11091,300 - 0,004 = 11091,286$$

$$Y_K = Y_K^0 + \delta y = 25385,100 - 0,039 = 25385,061$$

8. Визначимо поправки v_i – різниці урівнених та виміряних значень відстаней:

$$v_i = S_i - S_i',$$

де S_i – урівнені значення, що отримуються при підстановці в них урівнених значень координат X_K та Y_K.

v_1 = -0,023; v_2 = 0,025; v_3 = -0,038; v_4 = -0,016.

Розглянемо порядок урівнювання за допомогою матричного числення. Пункти 1-4 виконуються аналогічно.

5. Складаємо матриці *P*, *A* і *L*

$$P = \begin{vmatrix} 1,92 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,49 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,00 \end{vmatrix}, \ A = \begin{vmatrix} -0,6153 & 0,7882 \\ -0,9218 & -0,3871 \\ -0,1391 & -0,9903 \\ 0,7290 & 0,6845 \end{vmatrix}, \ L = \begin{vmatrix} 0,0049 \\ 0,0058 \\ -0,0776 \\ 0,0136 \end{vmatrix}.$$

6. Обчислюємо матрицю коефіцієнтів нормальних рівнянь *N*

$$N = A^T PA = \begin{vmatrix} 2,2341 & 0,1649 \\ 0,1649 & 3,2956 \end{vmatrix}$$

та обернену до неї матрицю *Q*

$$Q = N^{-1} = \begin{vmatrix} 0,4493 & -0,02248 \\ -0,02248 & 0,3046 \end{vmatrix}.$$

7. Обчислюємо матрицю лінійних перетворень *B*

$$B = -Q(A^T P) = \begin{vmatrix} 0,5677 & 0,4500 & 0,0600 & -0,3122 \\ -0,4900 & 0,1081 & 0,4448 & -0,1921 \end{vmatrix}.$$

Використовуючи її знаходимо вектор поправок *T* до попередніх значень урівнюваних параметрів

$$T = BL = \begin{vmatrix} \delta x \\ \delta y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,0035 \\ -0,0389 \end{vmatrix}.$$

8. Для отримання вектора поправок *V* у виміряні величини знайдемо матрицю перетворення *D*:

$$D = E + AB = \begin{vmatrix} 0,2645 & -0,1917 & 0,3137 & 0,04068 \\ -0,3333 & 0,5433 & -0,2278 & 0,3623 \\ 0,4063 & -0,1696 & 0,5512 & 0,2337 \\ 0,07845 & 0,4020 & 0,3482 & 0,6409 \end{vmatrix}$$

Звідси

$$V = DL = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,0236 \\ 0,0241 \\ -0,0386 \\ -0,0156 \end{vmatrix}$$

Використаємо отримані дані для оцінки точності.

Оцінимо точність урівнених значень дирекційного кута та відстані для сторони *К*–4, тобто знайдемо середні квадратичні похибки M_α та M_S цієї сторони.

1. Виражаємо оцінювані функції через урівнені координати пункту *К* і обчислюємо значення цих функцій:

$$y_1 = \alpha = arctg\,\frac{Y_4 - Y_K}{X_4 - X_K} = 223^\circ\ 11'\ 46,6'';$$

$$y_2 = S = \sqrt{\left(X_4 - X_K\right)^2 - \left(Y_4 - Y_K\right)^2} = 4058,440\,м.$$

2. Знаходимо частинні похідні ψ_1 та ψ_2 .

Для дирекційного кута α:

$$\psi_1 = \frac{\partial \alpha}{\partial X_K} = \rho \frac{\sin \alpha}{S} = -34,79;$$

$$\psi_2 = \frac{\partial \alpha}{\partial Y_K} = -\rho \frac{\cos \alpha}{S} = 37,05.$$

Для відстані S:

$$\psi_1 = \frac{\partial S}{\partial X_K} = -\cos \alpha = 0,7290;$$

$$\psi_2 = \frac{\partial S}{\partial Y_K} = -\sin \alpha = 0,6845.$$

3. Обчислюємо обернені ваги оцінюваних функцій

$$\frac{1}{p_\alpha} = \begin{vmatrix} -34,79 & 37,05 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0,4493 & -0,02248 \\ -0,02248 & 0,3046 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -34,79 \\ 37,05 \end{vmatrix} = 1020;$$

$$\frac{1}{p_S} = \begin{vmatrix} 0,7290 & 0,6845 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0,4493 & -0,02248 \\ -0,02248 & 0,3046 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0,7290 \\ 0,6845 \end{vmatrix} = 0,3591.$$

4. Знаходимо середні квадратичні похибки оцінюваних функцій. Оскільки число надлишкових вимірювань дорівнює двом, то при обчисленні використовуємо апріорне значення похибки одиниці ваги $\mu_0 = 0,018$

$$M_\alpha = \mu_0 \sqrt{\frac{1}{p_\alpha}} = 0,018\sqrt{1020} = \pm 0,57'';$$

$$M_S = \mu_0 \sqrt{\frac{1}{p_S}} = 0,018\sqrt{0,3591} = \pm 0,011\,м.$$

Параметричне урівнювання висотної мережі.

Теорія

При параметричному урівнюванні за урівнювані параметри зручно приймати висотні відмітки шуканих реперів.

В загальному випадку параметричне рівняння зв'язку перевищення з висотними відмітками шуканих початкового та кінцевого реперів H_i і H_j можна подати таким чином

$h_{ij} = H_i - H_j$,

де h_{ij}, H_i, H_j — урівнені значення.

$$h_{ij} = h'_{ij} + v_{ij}$$

h'_{ij} — виміряне значення, v_{ij} — поправка з урівнювання.

Урівнені значення перевищень H_i і H_j —

$$H_i = H_i^0 + \delta H_i$$
$$H_j = H_j^0 + \delta H_j$$

H_i^0 і H_j^0 — попередні значення, δH_i і δH_j — поправки.

В результаті отримаємо параметричне рівняння поправки

$$v_{ij} = \delta H_j - \delta H_i + \underbrace{\left(H_j^0 - H_i^0 - h'_{ij}\right)}_{l_{ij}}$$

l_{ij} — вільний член параметричного рівняння поправок.

Таким чином

$v_{ij} = \delta H_j - \delta H_i + l_{ij}$ (вага p_{ij})

Якщо початковий репер i є вихідним то рівняння має вигляд

$v_{ij} = \delta H_j + l_{ij}$ (вага p_{ij})

$l_{ij} = H_j^0 - H_i - h'_{ij}$, H_i — відома висотна відмітка вихідного репера i.

Якщо ж кінцевий пункт j — вихідний, то рівняння

$v_{ij} = -\delta H_i + l_{ij}$ (вага p_{ij})

$l_{ij} = H_j - H_i^0 - h'_{ij}$

Очевидно, коефіцієнти рівнянь при поправках δH завжди рівні ±1.

В нівелірних ходах середню квадратичну похибку перевищення h зазвичай обчислюють за формулою:

$m_h = m\sqrt{L}$,

де m – середня квадратична похибка 1 км нівелірного ходу, L – довжина ходу в км.

Значення m залежить від класу нівелювання і наводиться у відповідних інструкціях.

Вага перевищення обчислюється за формулою

$p_h = \frac{\mu_0^2}{m_h^2}$. (μ_0 – апріорна похибка одиниці ваги).

Апостеріорна похибка одиниці ваги

$\mu = \sqrt{\frac{[pvv]}{r}}$.

При урівнювання висотної мережі число надлишкових вимірів r визначається за формулою

$r = n - t$,

де n – число виміряних перевищень h, а t – число реперів, що визначаються.

Від параметричних рівнянь поправок (   ) звичайним способом переходять до нормальних рівнянь, з яких знаходять поправки δH до попередніх значень висот.

Для розв'язування нормальних рівнянь та оцінки точності доцільно знайти обернену матрицю нормальних рівнянь $Q = N^{-1}$.

На практиці зазвичай оцінюють точність урівнених значень висотних відміток реперів, що визначаються та перевищень між ними.

СКП урівненого значення висотної відмітки репера i обчислюється за формулою

$$M_{H_i} = \mu\sqrt{Q_{ii}}\,,$$

де Q_{ii} – діагональний елемент оберненої матриці Q, що належить реперу i.

Для оцінки точності перевищення між реперами i та j використовується функція виду $h_{ij} = H_i - H_j$.

Необхідні частинні похідні оцінюваної функції по урівнюваним параметрам

$$\psi_1 = \frac{\partial h_{ij}}{\partial H_i} = -1, \quad \psi_2 = \frac{\partial h_{ij}}{\partial H_j} = 1.$$

Обернена вага оцінюваної функції обчислюється за формулою

$$\frac{1}{p_h} = \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{ii} & Q_{ij} \\ Q_{ij} & Q_{jj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix},$$

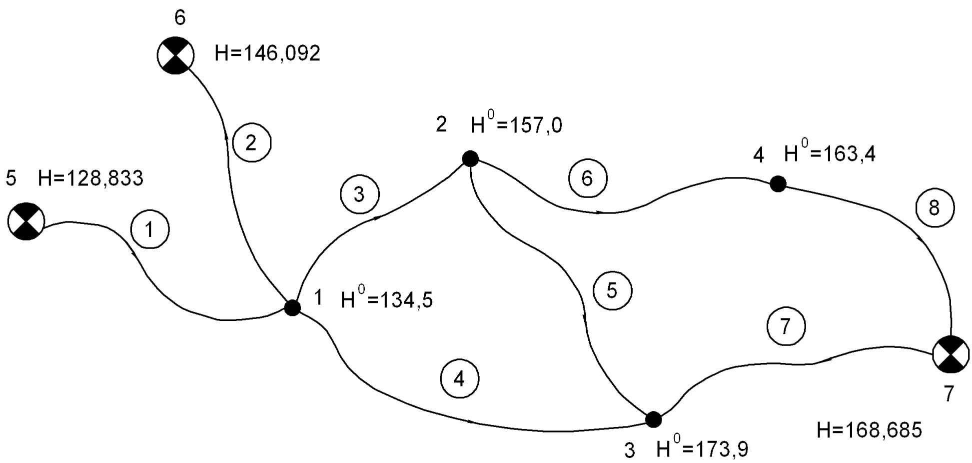
де Q_{ii}, Q_{ij} і Q_{jj} – елементи матриці Q, що належать реперам i та j.

Після підстановки чисельних значень ψ_1 та ψ_2 і перетворень отримаємо

$$\frac{1}{p_h} = Q_{ii} + Q_{jj} - 2Q_{ij}.$$

Приклад урівнювання висотної мережі параметричним способом.

Розглянемо послідовність урівнювання нівелірної мережі. Цифрами в колах позначені номери ходів, за якими виміряні перевищення h'_{ij}.



Середні квадратичні похибки перевищень (в м) обчислені за формулою

$$m_i = 0,010\sqrt{L_i}$$

а ваги перевищень – за формулою

$$p_i = \frac{1}{m_i^2}.$$

В цьому випадку апріорна похибка одиниці ваги $\mu_0 = 1$.

Вихідні дані наведено в таблиці

Номер ходу	**Початковий та кінцевий репери ходу**	**Виміряне перевищення h'_{ij}, м**	**Довжина ходу L, км**	**Похибка перевищення m_i, м**	**Вага перевищення p_i**
1	5–1	5,624	2,3	0,015	4400
2	1–6	11,657	1,9	0,014	5100
3	1–2	22,617	1,6	0,013	5900
4	1–3	39,437	3,2	0,018	3100
5	2–3	16,800	2,3	0,015	4400
6	2–4	6,290	2,1	0,014	5100
7	7–3	5,214	1,7	0,013	5900
8	4–7	5,311	1,4	0,012	6900

Використовуючи формули (), отримаємо параметричні рівняння поправок для всіх восьми нівелірних ходів.

Номер ходу	**Початковий та кінцевий репери ходу**	**Параметричне рівняння**	**Примітка**
1	5–1	$v_{51(1)} = \delta H_1 + l_{51} = \delta H_1 + 0,043$ $l_{51} = H_1 - H_5 - h'_{51} = 134,5 - 128,833 - 5,624 = 0,043$	Початковий репер вихідний
2	1–6	$v_{16(2)} = -\delta H_1 + l_{16} = -\delta H_1 - 0,065$ $l_{16} = H_6 - H_1 - h'_{16} = 146,092 - 134,5 - 11,657 = -0,065$	Кінцевий репер вихідний
3	1–2	$v_{12(3)} = \delta H_2 - \delta H_1 + l_{12} = \delta H_2 - \delta H_1 - 0,017$ $l_{12} = H_2 - H_1 - h'_{12} = 157,0 - 134,5 - 22,617 = -0,117$	-
4	1–3	$v_{13(4)} = \delta H_3 - \delta H_1 + l_{13} = \delta H_3 - \delta H_1 - 0,037$ $l_{13} = H_3 - H_1 - h'_{13} = 173,9 - 134,5 - 39,437 = -0,037$	-
5	2–3	$v_{23(5)} = \delta H_3 - \delta H_2 + l_{23} = \delta H_3 - \delta H_2 + 0,100$ $l_{23} = H_3 - H_2 - h'_{23} = 173,9 - 157,0 - 16,800 = 0,100$	-

6	2–4	$v_{24(6)} = \delta H_4 - \delta H_2 + l_{24} = \delta H_4 - \delta H_2 + 0{,}110$ $l_{24} = H_4 - H_2 - h'_{24} = 163{,}4 - 157{,}0 - 6{,}290 = 0{,}110$	-
7	7–3	$v_{73(7)} = \delta H_3 + l_{73} = \delta H_3 + 0{,}001$ $l_{73} = H_3 - H_7 - h'_{73} = 173{,}9 - 168{,}685 - 5{,}214 = 0{,}001$	Початковий репер вихідний
8	4–7	$v_{47(8)} = -\delta H_4 + l_{47} = -\delta H_4 - 0{,}026$ $l_{47} = H_7 - H_4 - h'_{47} = 168{,}685 - 163{,}0 - 5{,}311 = -0{,}026$	Кінцевий репер вихідний

Урівнювання виконаємо матричним способом.

Система параметричних рівнянь поправок в матричному вигляді має вигляд:

$V = A \cdot T + L$.

$$V = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{vmatrix};\ A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & t_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & t_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & \dots & t_n \end{vmatrix};\ T = \begin{vmatrix} \delta T_1 \\ \delta T_2 \\ \vdots \\ \delta T_n \end{vmatrix};\ L = \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{vmatrix};\ P = \begin{vmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{vmatrix}.$$

Система нормальних рівнянь в матричному вигляді

$NT + A^T PL = 0$

де $$N = \begin{vmatrix} [paa] & [pab] & \dots & [pat] \\ [pab] & [pbb] & \dots & [pbt] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [pat] & [pbt] & \dots & [ptt] \end{vmatrix};\ A^T PL = \begin{vmatrix} [pal] \\ [pbl] \\ \vdots \\ [ptl] \end{vmatrix}$$

Шуканий вектор $T = -N^{-1} A^T PL$.

Для нашого випадку

$$N = \begin{vmatrix} [paa] & [pab] & [pac] & [pad] \\ [pab] & [pbb] & [pbc] & [pbd] \\ [pac] & [pbc] & [pcc] & [pcd] \\ [pad] & [pbd] & [pcd] & [pdd] \end{vmatrix};\ A^T PL = \begin{vmatrix} [pal] \\ [pbl] \\ [pcl] \\ [pdl] \end{vmatrix}$$

$N =$

$$\begin{vmatrix} 18500 & -5900 & -3100 & 0 \\ -5900 & 15400 & -4400 & -5100 \\ -3100 & -4400 & 13400 & 0 \\ 0 & -5100 & 0 & 12000 \end{vmatrix}$$

N^{-1} =

$$\begin{vmatrix} 0{,}00007287 & 0{,}00004277 & 0{,}00003090 & 0{,}00001818 \\ 0{,}00004277 & 0{,}00010993 & 0{,}00004599 & 0{,}00004672 \\ 0{,}00003090 & 0{,}00004599 & 0{,}00009688 & 0{,}00001955 \\ 0{,}00001818 & 0{,}00004672 & 0{,}00001955 & 0{,}00010319 \end{vmatrix}$$

$A^T PL$ =

$$\begin{vmatrix} 1325{,}7 \\ -1691{,}3 \\ 331{,}2 \\ 740{,}4 \end{vmatrix}$$

Вектор поправок до попередніх значень параметрів (значень висотних позначок реперів, що визначаються).

$$T(\delta H) = \begin{pmatrix} \delta H_1 \\ \delta H_2 \\ \delta H_3 \\ \delta H_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}0480 \\ 0{,}0794 \\ -0{,}0097 \\ -0{,}0280 \end{pmatrix}$$

Обчислення елементів матриць

№	a	b	c	d	p	l	paa	pab	pac	pad	pbb	pbc	pbd	pcc	pcd	pdd	pal	pbl	pcl	pdl
1	1	0	0	0	4400	0,043	4400	0	0	0	0	0	0	0	0	0	189,2	0	0	0
2	-1	0	0	0	5100	-0,065	5100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	331,5	0	0	0
3	-1	1	0	0	5900	-0,117	5900	-5900	0	0	5900	0	0	0	0	0	690,3	-690,3	0	0
4	-1	0	1	0	3100	-0,037	3100	0	-3100	0	0	0	0	3100	0	0	114,7	0	-114,7	0
5	0	-1	1	0	4400	0,100	0	0	0	0	4400	-4400	0	4400	0	0	0	-440	440	0
6	0	-1	0	1	5100	0,110	0	0	0	0	5100	0	-5100	0	0	5100	0	-561	0	561
7	0	0	1	0	5900	0,001	0	0	0	0	0	0	0	5900	0	0	0	0	5,9	0
8	0	0	0	-1	6900	-0,026	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6900	0	0	0	179,4
Σ	-	-	-	-	-	-	**18500**	**-5900**	**-3100**	**0**	**15400**	**-4400**	**-5100**	**13400**	**0**	**12000**	**1325,7**	**-1691,3**	**331,2**	**740,4**

Урівнені значення висотних відміток обчислюються таким чином

$$H^0+\delta H=\begin{pmatrix}134,5\\157,0\\173,9\\163,4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-0,0480\\0,0794\\-0,0097\\-0,0280\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}134,452\\157,079\\173,890\\163,372\end{pmatrix}$$

Для оцінки точності обчислимо суму $[pvv]$, поправки v_i визначаються з параметричних рівнянь поправок.

$[pvv]=3,26$

Апостеріорна похибка одиниці ваги $\mu=\sqrt{\frac{[pvv]}{r}}=\sqrt{\frac{3,26}{4}}=0,903$

До початку урівнювання було прийняте значення $\mu_0=1$. На основі збіжності значень μ і μ_0 можна зробити висновок про відсутність істотних спотворень в результатах вимірювань та у вихідних даних.

Урівнювання мереж корелатним способом.

1. Умовні рівняння.

При корелатному способі урівнювання використовують умовні рівняння – спеціальні функції від виміряних величин, які при підстановці в них дійсних значень величин приймають цілком визначені, наперед відомі значення.

В загальному випадку умовні рівняння можна записати у вигляді

$$\varphi_j\left(M_1, M_2, \ldots, M_n\right) = 0,$$

M_i – дійсні значення вимірюваних величин, n – число всіх вимірів.

Через вплив похибок вимірювань, при підстановці дійсних значень $M_1', M_2', \ldots, M_n'$ отримаємо

$$\varphi_j\left(M_1', M_2', \ldots, M_n'\right) = \omega_j,$$

ω_j – дійсні похибки функцій φ_j або нев'язки умовних рівнянь.

2. Теорія корелатного урінювання.

Нехай виміряні n величин $M_1', M_2', \ldots, M_t, \ldots, M_n'$ з вагами p_1, p_2, …, p_t, …, p_n. З цих величин 1, …, t – необхідні, $t+1$, … n – надлишкові, $r = n - t$ – число ступенів свободи.

При корелатному урівнюванні складається система з r умовних рівнянь

$$\begin{cases} \varphi_1\left(M_1, M_2, \ldots, M_n\right) = 0 \\ \varphi_2\left(M_1, M_2, \ldots, M_n\right) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_r\left(M_1, M_2, \ldots, M_n\right) = 0 \end{cases}$$

Оскільки $r < n$, то можна скласти декілька систем умовних рівнянь. Кожна з них після урівнювання приведе до одного і того ж самого результату, якщо виконані такі умови:

1) до системи мають входити всі виміряні величини.

2) система має бути незалежною (ніяке рівняння не може бути отримане шляхом перетворення інших).

Якщо в систему рівнянь підставити результати вимірювання M_i', то отримаємо таку систему умовних рівнянь:

$$\begin{cases} \varphi_1\left(M_1', M_2', \ldots, M_n'\right) = \omega_1 \\ \varphi_2\left(M_1', M_2', \ldots, M_n'\right) = \omega_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_r\left(M_1', M_2', \ldots, M_n'\right) = \omega_r \end{cases}$$

Мета урівнювання – отримання таких поправок v_i до виміряних значень M_i', щоб виконались умови:

$$\begin{cases} \varphi_1\left(M_1' + v_1, M_2' + v_2, \ldots, M_n' + v_n\right) = 0 \\ \varphi_2\left(M_1' + v_1, M_2' + v_2, \ldots, M_n' + v_n\right) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_r\left(M_1' + v_1, M_2' + v_2, \ldots, M_n' + v_n\right) = 0 \end{cases}$$

$M_i' + v_i$ – урівнені значення.

Після перетворень систему умовних рівнянь можна записати таким чином:

$$\begin{cases} a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n + \omega_1 = 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_n v_n + \omega_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_1 v_1 + h_2 v_2 + \ldots + h_n v_n + \omega_r = 0 \end{cases}$$

$$a_i = \frac{\partial \varphi_1}{\partial M_i};\ b_i = \frac{\partial \varphi_2}{\partial M_i};\ldots;\ h_i = \frac{\partial \varphi_r}{\partial M_i}$$

Ця система є невизначеною ($r < n$), тому використаємо принцип найменших квадратів.

Після перетворень отримаємо систему корелатних рівнянь поправок

$$\begin{cases} v_1 = q_1\left(a_1K_1 + b_1K_2 + \ldots + h_1K_r\right) \\ v_2 = q_2\left(a_2K_1 + b_2K_2 + \ldots + h_2K_r\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n = q_n\left(a_nK_1 + b_nK_2 + \ldots + h_nK_r\right) \end{cases}$$

K_j – корелати (невизначені множники Лагранжа).

Для їх обчислення розв'язують систему нормальних рівнянь корелат (число нормальних рівнянь дорівнює числу надлишкових вимірів):

$$\begin{cases} [qaa]K_1 + [qab]K_2 + \ldots + [qah]K_r + \omega_1 = 0 \\ [qab]K_1 + [qbb]K_2 + \ldots + [qbh]K_r + \omega_1 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [qah]K_1 + [qbh]K_2 + \ldots + [qhh]K_r + \omega_1 = 0 \end{cases}$$

3. Теорія корелатного урівнювання в матричному вигляді.

Система умовних рівнянь в матричному вигляді:

$$B \cdot V + W = 0$$

$$B = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_1 & h_2 & \ldots & h_n \end{vmatrix}; \ V = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ldots \\ v_n \end{vmatrix}; \ W = \begin{vmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \ldots \\ \omega_r \end{vmatrix}; \ P = \begin{vmatrix} p_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & p_n \end{vmatrix}$$

Для розв'язування використовують принцип найменших квадратів.

Знаходимо матрицю $N = B \cdot P^{-1} \cdot B^T = \begin{vmatrix} [qaa] & [qab] & \ldots & [qah] \\ [qab] & [qbb] & \ldots & [qbh] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [qah] & [qbh] & \ldots & [qhh] \end{vmatrix}$.

Вектор корелат $K = \begin{vmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \vdots \\ K_r \end{vmatrix} = -N^{-1} \cdot W$.

Шуканий вектор поправок $V = -P^{-1}B^TK$.

Контроль обчислень здійснюється за рівністю

$$[pvv] = -\sum K_j \omega_j$$

4. Оцінка точності за результатами корелатного урівнювання.

Нехай задана функція від урівнених значень вимірюваних величин $y = \Phi\left(M_1' + v_1, M_2' + v_2, \ldots, M_n' + v_n\right)$

Необхідно оцінити її точність. Для цього використаємо формулу

$$M_y = \mu \sqrt{\frac{1}{p_y}}$$

Вектор, складений із частинних похідних $\dfrac{\partial \Phi_i}{\partial M_i'} = f_i$ позначимо *F*.

Можна показати, що

$$\frac{1}{p_y} = F^T P^{-1} F - G^T N^{-1} G,$$

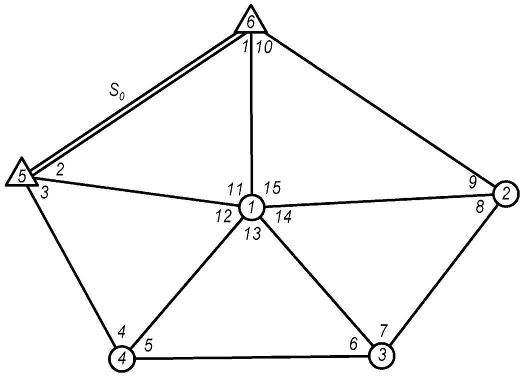
де

$$G = BP^{-1}F = \begin{Vmatrix} [qaf] \\ [qbf] \\ \\ [qhf] \end{Vmatrix}.$$

Приклад.

Корелатне урівнювання центральної фігури.

Нехай в геодезичному п'ятикутнику виміряні кути 1, 2,…, 15.



β_1	50° 14' 36,6"	β_6	47° 06' 50,8"	β_{11}	86° 41' 13,0"
β_2	43° 04' 12,6"	β_7	73° 58' 24,0"	β_{12}	52° 32' 43,3"
β_3	47° 08' 07,8"	β_8	65° 33' 57,4"	β_{13}	77° 18' 56,2"
β_4	80° 19' 04,7"	β_9	38° 37' 28,2"	β_{14}	40° 27' 32,5"
β_5	55° 34' 14,2"	β_{10}	38° 23' 09,7"	β_{15}	102° 59' 27,7"

Координати вихідних пунктів 5 і 6:

$$X_5 = 5175{,}30;\ Y_5 = 33978{,}62;$$

$$X_6 = 12592{,}64;\ Y_6 = 39067{,}75.$$

Розглянемо послідовність урівнювання цієї мережі.

1. Визначення числа умовних рівнянь.

Число всіх пунктів урівнюваної мережі p = 6, а число виміряних кутів n = 15. Таким чином число надлишкових рівнянь (число ступенів свободи) $r = n - 2p + 4 = 7$

2. Складаємо умовні рівняння.

Враховуємо, що кожен трикутник відповідає одному умовному рівнянню фігури, а центральна точка – умовному рівнянню горизонту. Крім того, в центральній фігурі виникає одна умова полюса. Таким чином в нашому випадку виникає 7 умовних рівнянь виду

$$\varphi_1 = \beta_1 + \beta_{11} + \beta_2 - 180^0 = 0;$$
$$\varphi_2 = \beta_3 + \beta_{12} + \beta_4 - 180^0 = 0;$$
$$\varphi_3 = \beta_5 + \beta_{13} + \beta_6 - 180^0 = 0;$$
$$\varphi_4 = \beta_7 + \beta_{14} + \beta_8 - 180^0 = 0;$$
$$\varphi_5 = \beta_9 + \beta_{15} + \beta_{10} - 180^0 = 0;$$
$$\varphi_6 = \beta_{11} + \beta_{12} + \beta_{13} + \beta_{14} + \beta_{15} - 360^0 = 0;$$
$$\varphi_7 = \frac{\sin\beta_1 \sin\beta_3 \sin\beta_5 \sin\beta_7 \sin\beta_9}{\sin\beta_2 \sin\beta_4 \sin\beta_6 \sin\beta_8 \sin\beta_{10}} - 1 = 0$$

3. Обчислення нев'язок умовних рівнянь.

Підставивши в умовні рівняння виміряні значення β_i', отримаємо нев'язки (в кут. с): ω_1 = 2,2; ω_2 = -4,2; ω_3 = 1,2; ω_4 = -6,1; ω_5 = 5,6; ω_6 = -7,3; ω_7 = -4,56.

Значення отримане з 7 рівняння необхідно помножити на величину ρ=206265" для отримання нев'язки ω_7 в кутових секундах.

4. Визначення коефіцієнтів умовних рівнянь.

Коефіцієнти умовних рівнянь поправок є частинними похідними від умовних рівнянь за виміряними величинами (в нашому випадку $\frac{\partial\varphi_i}{\partial\beta_j}$).

Неважко помітити, що для перших шести рівнянь коефіцієнти (a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i) дорівнюють одиниці або нулю. Знайдемо коефіцієнти g_i полюсного умовного рівняння φ_7. частинна похідна по куту β_1 дорівнює

$$g_1 = \frac{\partial \varphi_7}{\partial \beta_1} = \frac{\cos\beta_1 \sin\beta_3 \sin\beta_5 \sin\beta_7 \sin\beta_9}{\sin\beta_2 \sin\beta_4 \sin\beta_6 \sin\beta_8 \sin\beta_{10}} =$$

$$= \frac{\cos\beta_1 \sin\beta_3 \sin\beta_5 \sin\beta_7 \sin\beta_9}{\sin\beta_2 \sin\beta_4 \sin\beta_6 \sin\beta_8 \sin\beta_{10}} \cdot \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_1} =$$

$$= \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} \cdot \underbrace{\frac{\sin\beta_1 \sin\beta_3 \sin\beta_5 \sin\beta_7 \sin\beta_9}{\sin\beta_2 \sin\beta_4 \sin\beta_6 \sin\beta_8 \sin\beta_{10}}}_{1} =$$

$$= ctg\beta_1$$

Аналогічно можна показати, що

$$g_2 = -ctg\beta_2;\ g_3 = ctg\beta_3;\ g_4 = -ctg\beta_4;\ldots;\ g_{10} = -ctg\beta_{10};\ g_{11} = \ldots g_{15} = 0.$$

Таким чином, отримаємо наступні значення коефіцієнтів

	1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**	**13.**	**14.**	**15.**
a_i	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
b_i	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
c_i	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
d_i	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0
e_i	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1
f_i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
g_i	0,832	-1,070	0,928	-0,171	0,685	-0,929	0,287	-0,454	1,252	-1,262	0	0	0	0	0

5. Обчислення корелат.

Для отримання корелат розв'яжемо систему умовних рівнянь матричним способом.

Система умовних рівнянь в матричному вигляді:

$$B \cdot V + W = 0$$

$$B = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{15} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{15} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_1 & g_2 & \dots & g_{15} \end{vmatrix};\ V = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_{15} \end{vmatrix};\ W = \begin{vmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \dots \\ \omega_7 \end{vmatrix};\ P = \begin{vmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_{15} \end{vmatrix}$$

Оскільки вимірювання є рівноточними матриця P є одиничною,

$$P = \begin{vmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_{15} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Знаходимо матрицю $N = B \cdot P^{-1} \cdot B^T = B \cdot B^T = \begin{vmatrix} [aa] & [ab] & \dots & [ag] \\ [ab] & [bb] & \dots & [bg] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [ag] & [bg] & \dots & [gg] \end{vmatrix}.$

Обчислення здійснимо за допомогою програми Microsoft Excel.

Отримаємо N =

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0{,}2379 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0{,}7575 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & -0{,}2433 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & -0{,}1671 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -0{,}0107 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 0 \\ -0{,}2379 & 0{,}7575 & -0{,}2433 & -0{,}1671 & -0{,}0107 & 0 & 7{,}5082 \end{vmatrix}$$

Вектор корелат $K = \begin{vmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \vdots \\ K_r \end{vmatrix} = -N^{-1} \cdot W =$

$$\begin{vmatrix} -1{,}382 \\ 0{,}586 \\ -1{,}048 \\ 1{,}373 \\ -2{,}553 \\ 2{,}065 \\ 0{,}497 \end{vmatrix}$$

6. Визначення поправок до виміряних кутів.

Шуканий вектор поправок $V = P^{-1}B^T K = B^T K$, оскільки P^{-1} теж одинична матриця.

Отримаємо $V =$

$$\begin{vmatrix} -0{,}969 \\ -1{,}914 \\ 1{,}048 \\ 0{,}501 \\ -0{,}707 \\ -1{,}510 \\ 1{,}516 \\ 1{,}147 \\ -1{,}931 \\ -3{,}181 \\ 0{,}683 \\ 2{,}651 \\ 1{,}017 \\ 3{,}438 \\ -0{,}488 \end{vmatrix}$$

Контроль обчислень здійснюється за рівністю

$$[pvv] = -\sum K_j \omega_j \ .$$

Для нашого випадку ця рівність набуде вигляду $[vv] = -\sum K_j \omega_j$,

$$[vv] = 46{,}773 \,,$$

$$-\sum K_j \omega_j = 46{,}773 \,.$$

7. Визначення урівнених значень кутів β_i.

№	Виміряне значення	Поправка, ″	Урівнене значення, ″
1.	50° 14' 36,6"	-0,969	35,6
2.	43° 04' 12,6"	-1,914	10,7
3.	47° 08' 07,8"	1,048	08,8
4.	80° 19' 04,7"	0,501	05,2
5.	55° 34' 14,2"	-0,707	13,5
6.	47° 06' 50,8"	-1,510	49,3

7.	73° 58' 24,0"	1,516	25,5
8.	65° 33' 57,4"	1,147	58,5
9.	38° 37' 28,2"	-1,931	26,3
10.	38° 23' 09,7"	-3,181	06,5
11.	86° 41' 13,0"	0,683	13,7
12.	52° 32' 43,3"	2,651	46,0
13.	77° 18' 56,2"	1,017	57,2
14.	40° 27' 32,5"	3,438	35,9
15.	102° 59' 27,7"	-0,489	27,2

8. Обчислення координат пунктів мережі.

Координати пунктів мережі обчислюють за допомогою прямої засічки з використанням урівнених значень кутів.

Номери пунктів	**Координати**		**Номери пунктів**	**Координати**	
	X	**Y**		**X**	**Y**
1	6671,703	40741,947	**4**	2002,887	38587,019
2	6970,477	46855,578	**5**	**5175,30**	**33978,62**
3	3129,051	45331,863	**6**	**12592,64**	**39067,75**

На цьому урівнювання мережі закінчується. Подальша обробка зв'язана з оцінкою точності за результатами урівнювальних обчислень.

9. Оцінка точності.

Визначимо середню квадратичну похибку вимірювання кутів. Оскільки вимірювання рівноточні, то

$$m_\beta = \sqrt{\frac{[vv]}{r}} = \sqrt{\frac{46,78}{7}} = 2,59'' .$$