

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 1

МОДЕЛЮВАННЯ ОБ'ЄКТА ВИМІРЮВАНЬ, ЩО ЗАДАЄТЬСЯ ДИФЕРЕНЦІЙНИМ РІВНЯННЯМ

1.1. План проведення практичного заняття

1. Стисло нагадати теоретичні відомості, необхідні для виконання індивідуального завдання практичного заняття.
2. Виконати попередній аналіз початкових даних індивідуального завдання (табл. 1.1).
3. Отримати різницеве рівняння для моделювання об'єкта вимірювання.
4. Розробити програму моделювання об'єкта вимірювання.
5. Отримати результати моделювання об'єкта вимірювання.

Табл. 1.1

№ варіанту	Диференційне рівняння	Метод чисельного інтегрування
1	$\ddot{y} + 3y = 5x$	прямокутників
2	$\ddot{y} + 3y = 5x$	трапецій
3	$2\ddot{y} - \dot{y} + y = 5\dot{x} - 2x$	прямокутників
4	$2\ddot{y} - \dot{y} + y = 5\dot{x} - 2x$	трапецій
5	$\dot{y} + 3y = 2\dot{x} + x$	прямокутників
6	$\dot{y} + 3y = 2\dot{x} + x$	трапецій
7	$\ddot{y} - \dot{y} + y = 3x$	прямокутників
8	$\ddot{y} - \dot{y} + y = 3x$	трапецій
9	$\ddot{y} + \dot{y} - 2y = 4x$	прямокутників
10	$\ddot{y} + \dot{y} - 2y = 4x$	трапецій
11	$\ddot{y} + \dot{y} - 5y = x$	прямокутників
12	$\ddot{y} + \dot{y} - 5y = x$	трапецій
13	$\ddot{y} - 5\dot{y} + y = 2x$	прямокутників
14	$\ddot{y} - 5\dot{y} + y = 2x$	трапецій
15	$\ddot{y} - 3\dot{y} + y = \dot{x} - 2x$	прямокутників
16	$\ddot{y} - 3\dot{y} + y = \dot{x} - 2x$	трапецій
17	$\dot{y} - 3y = \dot{x} + x$	прямокутників
18	$\dot{y} - 3y = \dot{x} + x$	трапецій
19	$\ddot{y} + \dot{y} + y = 5x$	прямокутників
20	$\ddot{y} + \dot{y} + y = 5x$	трапецій
21	$\ddot{y} - 2\dot{y} + y = 3\dot{x} + x$	прямокутників
22	$\ddot{y} - 2\dot{y} + y = 3\dot{x} + x$	трапецій
23	$2\ddot{y} + \dot{y} + y = \dot{x} + 7x$	прямокутників
24	$2\ddot{y} + \dot{y} + y = \dot{x} + 7x$	трапецій
25	$\ddot{y} - 2\dot{y} + 3y = \dot{x}$	прямокутників

№ варіанту	Диференційне рівняння	Метод чисельного інтегрування
26	$\ddot{y} - 2\dot{y} + 3y = \dot{x}$	трапецій
27	$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 3\dot{x} - x$	прямокутників
28	$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 3\dot{x} - x$	трапецій
29	$\ddot{y} - 4\dot{y} + y = 3\dot{x} + 2x$	прямокутників
30	$\ddot{y} - 4\dot{y} + y = 3\dot{x} + x$	трапецій

1.2. Приклад виконання завдання практичного заняття

1. Задано диференційне рівняння

$$2\ddot{y} + \dot{y} + y = \dot{x} + 7x, c$$

де x – вхідний сигнал ОУ; y – вихідний сигнал ОУ.

2. Вводимо оператор диференціювання та підставляємо його в диференційне рівняння:

$$D = \frac{d}{dt}; \quad D^2 = \frac{d^2}{dt^2};$$

$$2D^2 y + Dy + y = x + 7Dx; \quad y + \frac{y}{D} + \frac{y}{D^2} = \frac{x}{D^2} - \frac{7x}{D}.$$

3. Замінюємо оператор диференціювання на оператор інтегрування, для цього ліву і праву частину рівняння ділимо на старшу ступінь D :

$$I = \frac{1}{D} = \int \dots dx; \quad I^2 = \frac{1}{D^2};$$

$$2y + yI + yI^2 = xI + 7xI^2.$$

4. Виконуємо пряме z -перетворення з використанням таблиці підстановки (табл. 1.2) для оператора інтегрування з урахуванням методу чисельного інтегрування:

$$y(t) \rightarrow Y(z); \quad x(t) \rightarrow X(z).$$

Таблиця 1.2

Кількість інтегрувань	Оператор для кусочно-постійної функції		Оператор для кусочно-лінійної функції	
	Позначення	Вираз	Позначення	Вираз
1	$I_{П1}$	$\frac{\tau}{z-1}$	$I_{Л1}$	$\frac{\tau}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1}$
2	$I_{П2}$	$\frac{\tau^2}{2} \cdot \frac{z+1}{(z-1)^2}$	$I_{Л2}$	$\frac{\tau^2}{6} \cdot \frac{(z^2+4z+1)}{(z-1)^2}$

Застосовуємо метод трапецій для чисельного інтегрування:

$$I = \frac{\tau}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1}; \quad I^2 = \frac{\tau^2}{6} \cdot \frac{z^2+4z+1}{(z-1)^2};$$

$$\begin{aligned}
2Y(z) + Y(z) \frac{\tau}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} + Y(z) \frac{\tau^2}{6} \cdot \frac{z^2+4z+1}{(z-1)^2} = \\
= X(z) \frac{\tau^2}{6} \cdot \frac{z^2+4z+1}{(z-1)^2} + X(z) \frac{7\tau}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1}.
\end{aligned}$$

5. Виносимо за дужки $Y(z)$, $X(z)$ та приводимо рівняння до спільного знаменника у лівій та правій частині. В результаті отримуємо:

$$Y(z) \left[2 + \frac{\tau}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} + \frac{\tau^2}{6} \cdot \frac{z^2+4z+1}{(z-1)^2} \right] = X(z) \left[\frac{\tau^2}{6} \cdot \frac{z^2+4z+1}{(z-1)^2} + \frac{7\tau}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} \right];$$

$$Y(z) \left[\frac{12(z-1)^2 + 3\tau(z+1)(z-1) + \tau^2(z^2+4z+1)}{6(z-1)^2} \right] =$$

$$= X(z) \left[\frac{21\tau(z+1)(z-1) + \tau^2(z^2+4z+1)}{6(z-1)^2} \right].$$

6. Відкидаємо однакові значення знаменника лівої та правої частини рівняння, в чисельнику приводимо подібні доданки щодо ступенів z :

$$Y(z) [(\tau^2 + 3\tau + 12) z^2 + (4\tau^2 - 24) z + (\tau^2 - 3\tau + 12)] =$$

$$= X(z) [(\tau^2 + 21\tau) z^2 + 4\tau^2 z + (\tau^2 - 21\tau)]$$

7. Переходимо до від'ємних ступенів змінної z шляхом ділення лівої і правої частини рівняння на старшу ступінь z :

$$Y(z) [(\tau^2 + 3\tau + 12) + (4\tau^2 - 24) z^{-1} + (\tau^2 - 3\tau + 12) z^{-2}] =$$

$$= X(z) [(\tau^2 + 21\tau) + 4\tau^2 z^{-1} + (\tau^2 - 21\tau) z^{-2}]$$

8. Виконуємо зворотне z -перетворення. Отримуємо різницеве рівняння та приводимо його до виду, зручному для моделювання:

$$y_n = \frac{24 - 4\tau^2}{\tau^2 + 3\tau + 12} y_{n-1} - \frac{\tau^2 - 3\tau + 12}{\tau^2 + 3\tau + 12} y_{n-2} + \frac{\tau^2 + 21\tau}{\tau^2 + 3\tau + 12} x_n +$$

$$+ 4\tau^2 x_{n-1} + \frac{\tau^2 - 21\tau}{\tau^2 + 3\tau + 12} x_{n-2}.$$

9. Складаємо програму, яка буде обчислювати значення відліків, використовуючи різницеве рівняння. Вхідний сигнал ІВС одиничним ступеневим впливом.

Лістинг програми моделювання

```
program pr1;
uses crt;
var y: array[-2..100] of real;
    x: array[-2..100] of real;
    f1: text;
    n: integer;
    i: integer;
    t: real;
begin
  clrscr;
  assign(f1, 'praktik1.txt'); rewrite(f1);
  write('N='); readln(n);
  write('t='); readln(t);
  y[-1]:=0; y[0]:=0; y[1]:=0;
  x[-1]:=0; x[0]:=0;
  for i:=1 to n do begin
```

```

        x[i]:=1;
        y[i]:=((12+3*sqr(t))/(sqr(t)*sqr(t)+21*sqr(t)))*
yn[i-1]-((12+3*sqr(t))/(sqr(t)*sqr(t)+21*sqr(t)))*
yn[i-1]-((4*sqr(t))/(sqr(t)*sqr(t)+21*sqr(t)))*
yn[i-1]-((sqr(t)*sqr(t)-21*sqr(t))/(sqr(t)*
sqr(t)+21*sqr(t)))*yn[i-2];
end;
writeln(f1,' ');
writeln(f1,'N=',n);
writeln(f1,'t=',t:2:2);
writeln(f1,' ');
writeln(f1,' ');
writeln(f1,'


|   |      |      |
|---|------|------|
| i | x[i] | y[i] |
|---|------|------|


');
writeln(f1,'


|   |      |      |
|---|------|------|
| i | x[i] | y[i] |
|---|------|------|


');
for i:=0 to n do begin
    writeln(f1,'


|   |      |      |
|---|------|------|
| i | x[i] | y[i] |
|---|------|------|


');
end;
writeln(f1,'


|   |      |      |
|---|------|------|
| i | x[i] | y[i] |
|---|------|------|


');
close(f1);
end.

```

Результати моделювання

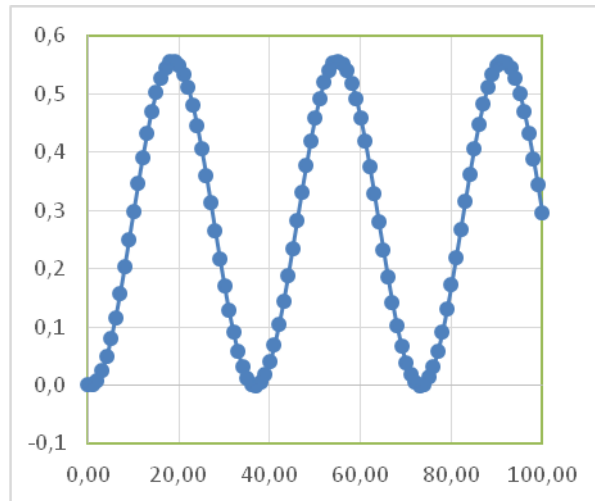
Початкові умови: $y[-1]:=0$; $y[0]:=0$; $x[-1]:=0$; $x[0]:=0$
 Кількість відліків та крок інтегрування:
 $N=100$; $t=0.10$

Табл. 1.3

i	x[i]	y[i]
1	1	0.000000
2	1	0.008292
3	1	0.024628
4	1	0.048521
5	1	0.079257
6	1	0.115920
7	1	0.157414
8	1	0.202501
9	1	0.249835
10	1	0.298003
11	1	0.345567
12	1	0.391108

13	1	0.433266
14	1	0.470782
15	1	0.502537
16	1	0.527583
17	1	0.545172
18	1	0.554779
19	1	0.556117
20	1	0.549147
.....		
96	1	0.469515
97	1	0.431810
98	1	0.389507
99	1	0.343868
100	1	0.296257

Вихідний сигнал ОУ, В



Час моделювання, с

Рис. 1.1. Результат чисельного рішення диференційного рівняння, що є результатом моделювання ІВС