

Практична робота № 6

Моделювання кінетики кровотоку в еластичній судині (модель Франка)

У даній роботі розглядається модель судинної системи, запропонованої О. Франком, що дозволяє встановити зв'язок між тиском і об'ємною швидкістю кровотоку у великій судині з урахуванням їх еластичності. Модель дозволяє розрахувати зміну в часі гемодинамічних показників у великій судині протягом серцевого циклу.

Ціль роботи:

1. Навчитися складати найпростіші рівняння, що описують кровоток в еластичній судині.
2. Навчитися аналізувати розв'язки даних рівнянь і зіставляти їх із процесами в серцево-судинній системі.

Література:

1. Антонов В.Ф. і ін. Біофізика. - М.: Владос, 2000.
2. Фізіологія людини, під ред. Р. Шмидта й Т. Тевса. - М.: Мир, 1996.
3. Даний навчальний посібник.

Підготовка до роботи

Вивчити по рекомендованій літературі наступні питання:

1. Закон Пуазейля. Графік падіння тиску.
2. Розв'язок диференціальних рівнянь першого порядку з роздільними змінними.
3. Фізична модель системи "еластична судина - мікросудини".
4. Кінетичні рівняння. Складання кінетичного рівняння кровотоку в еластичній судині.

Теоретичні відомості

Поставимо мету: розрахувати зміну гемодинамічних показників (наприклад тиску) у часі в деякій точці x великої судини (довільність вибору точки обумовлена малістю коефіцієнта загасання пульсової хвилі уздовж великих судин).

На рис. 6.1 схематично показані експериментальні дані зміни тиску P у порожнині лівого шлуночка та в аорті, а також об'ємна швидкість Q_c , надходження крові із серця в аорту. Видно, що P и Q_c нелінійно змінюється в часі.

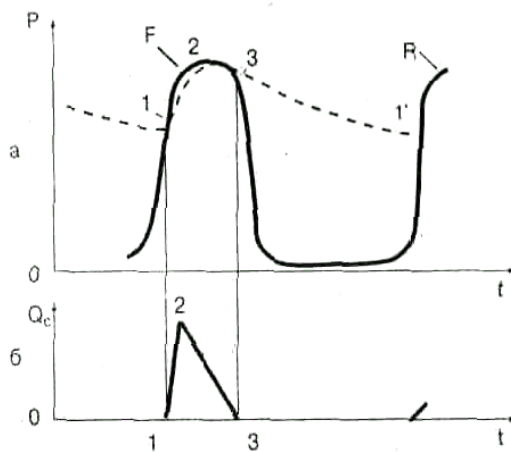


Рисунок 6.1. – Зміна гемодинамічних показників при скороченні серця:
 а – тиск крові в аорті (штрихова лінія) і тиск у лівому шлуночку серця (суцільна); б – об'ємна швидкість Q_c надходження крові в аорту під час систоли

Криві P відповідають першому скороченню, R – повторення процесу; точки 1 і 1' відповідають моментам відкриття аортального клапана, точка 3 – його закриття, точка 2 – моменту часу, коли Q_c досягає максимального значення.

Для зручності розгляду виділимо дві фази кровотоку в системі "лівий шлуночок серця – великі судини – дрібні судини" (рис. 6.1, 6.2):

1 фаза - фаза припливу крові в аорту із серця з моменту відкриття аортального клапана до його закриття (рис. 2, т. 1 -> 2 -> 3). Під час надходження крові із серця стінки великих судин розтягуються завдяки їхній еластичності, частина крові резервується у великих судинах, а частина проходить у дрібні судини (рис. 6.2а).

2 фаза - фаза вигнання крові з великих судин у дрібні судини закриття аортального клапана (рис. 6.2, т. 3 —>1'). Під час цієї фази стінки великих судин за рахунок пружності вертаються у вихідне положення, проштовхуючи кров у мікросудини. У цей час у лівий шлуночок надходить кров з лівого передсердя.

У моделі Франка зроблені наступні допущення:

1) Всі великі судини об'єднані в один резервуар з еластичними стінками, обсяг якого пропорційний тиску. Вони (а отже, і резервуар) мають високу еластичність; гідравлічним опором резервуара нехтують.

2) Система мікросудин представлена як тверда трубка.

Гідравлічний опір твердої трубки великий; еластичністю дрібних судин нехтуємо;

3) Еластичність і опір для кожної групи судин постійні в часі та просторі.

4) Не розглядаються перехідні процеси встановлення руху крові.

5) Існує "зовнішній механізм" закриття й відкриття аортального клапана, обумовлений активною діяльністю серця.

Еластичний резервуар
(великі судини)

Тверда трубка
(мікросудини)

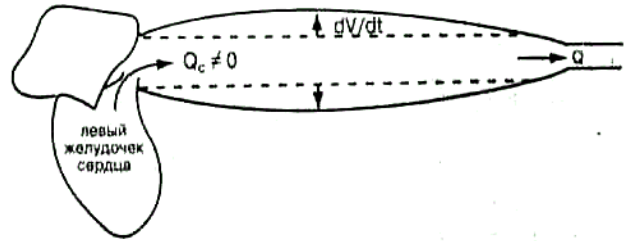
$$C \neq 0$$

$$W \neq 0$$

$$W \approx 0$$

$$C \approx 0$$

а. 1 фаза. Аортальний клапан відкритий, $Q_c \neq 0$



б.2 фаза. Аортальний клапан закритий, $Q_c = 0$

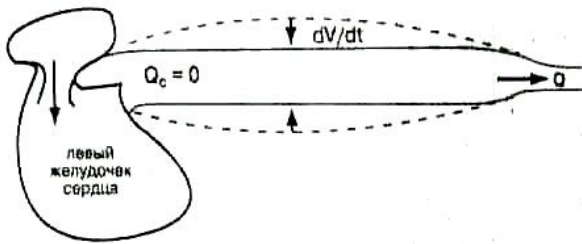


Рисунок 6.2. – Схематичне зображення кровотоку у великих та мікросудинах при відкритому (а) і закритому (б) клапані

Складемо систему рівнянь. Швидкість зміни обсягу резервуара dv/dt рівняється різниці швидкостей припливу в нього крові із серця Q_c і відтоку в систему мікросудин Q :

$$\frac{dv}{dt} = Q_c - Q, \quad (1)$$

де $Q_c(t)$ – об'ємна швидкість надходження крові із серця (рис. 6.1 б),
 $Q(t)$ – об'ємна швидкість кровотоку на початку дрібних судин,
 dt – зміна обсягу великих судин.

Припускаємо, що зміна обсягу резервуара лінійно залежить від зміни тиску крові в ньому dp :

$$dv = CdP, \quad (2)$$

де C – еластичність, коефіцієнт пропорційності між тиском і обсягом,
 $C = \frac{1}{E}$.

Застосовуючи закон Пуазейля для плинну крові по твердій трубці одержимо, що:

$$Q = \frac{P - P_{\text{кон}}}{W}$$

(3)

де $P(t)$ – тиск у великих судинах (у тому числі на вході в дрібні),
 $P_{\text{кон}}$ – тиск на виході із твердої трубки,
 W – гідравлічний опір дрібних судин.

У всіх рівняннях під P мається на увазі надлишковий тиск (різниця між реальним тиском і атмосферним).

Систему рівнянь (1, 2, 3) можна розв'язати відносно $P(t)$, $Q(t)$ або $v(t)$. Розв'яжемо систему відносно $P(t)$.

З рахуванням 1, 2, 3 одержимо рівняння

$$\frac{dP}{dt} + \frac{P}{WC} = \frac{Q_c}{C} + \frac{P_{\text{кон}}}{WC}. \quad (4)$$

Це неоднорідне лінійне диференціальне рівняння, розв'язок якого визначається видом функції $Q_c(t)$.

З теорії диференціальних рівнянь відомо, що для довільної функції $Q_c(t)$ розв'язком даного рівняння буде загальний інтеграл:

$$P(t) = e^{-\frac{t}{WC}} \left[\frac{1}{C} \int (Q_c + \frac{P_{\text{кон}}}{W}) \cdot e^{\frac{t}{WC}} dt + K \right], \quad (5)$$

де константа K знаходиться виходячи з початкових умов.

На рис. 6.3 представлений графік функції $P(t)$, отриманий на основі розрахунків, тиску по формулі (5) для апроксимації $Q_c(t)$ у вигляді параболи:

$$Q_c(t) = -at^2 + bt, \\ a = \frac{Q_{\text{max}}}{t_0^2}, \quad b = \frac{2Q_{\text{max}}}{t_0}, \quad (6)$$

де Q_{max} – максимальне значення кровотоку, що надходить із серця, час t_0 дорівнює половині тривалості першої фази $\left(t = \frac{t_1}{2} \right)$.

Розрахункова залежність $P(t)$, представлена на рис. 6.2а близька до спостережуваного в дійсності (рис. 6.1), $P_{\text{кон}}=0$.

Представлена модель дозволяє розрахувати $P(t)$ і для будь-якої апроксимації реальної функції $Q_c(t)$.

Найбільш простими є розв'язок рівняння для 2) фази, коли аортальний клапан закритий, отже $Q_c=0$.

Тоді система рівнянь спрощується:

$$\frac{dv}{dt} = -Q \quad (1')$$

$$dv = CdP \quad (2')$$

$$Q = \frac{P}{W}. \quad (3')$$

Тоді із системи рівнянь 1'-3' одержимо рівняння для $P(t)$:

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{P}{W \cdot C}.$$

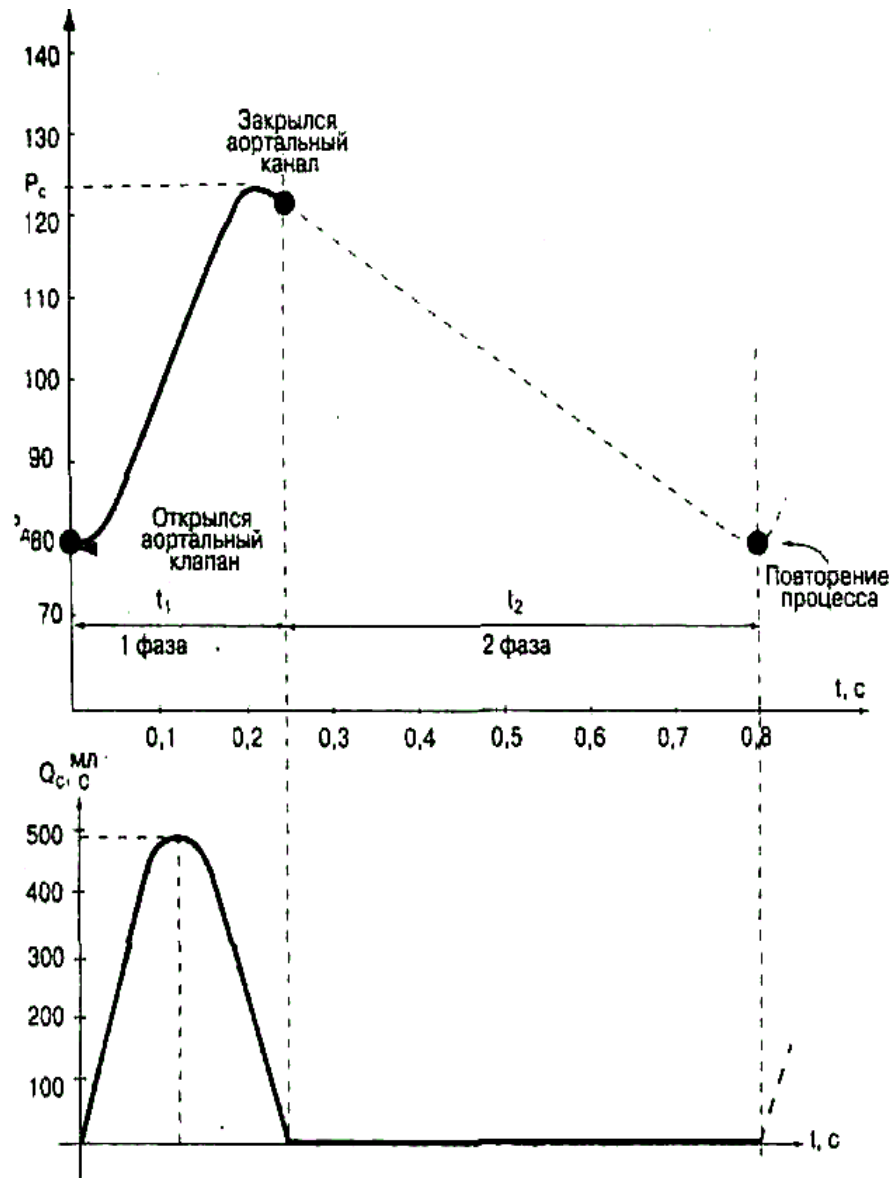


Рисунок 6.3. – Зміна гемодинамічних величин. Розрахункова залежність тиску крові $P(t)$ в аорті (а) для параболічної зміни $Q_c(t)$ в 1 фазі (б).

Параметри: $Q_{max} = 500$ мол/с, $W = (1 \text{ мм рт.ст. с})/\text{мол}$, $C = 1,2$ мол/мм рт.ст., $t_1 = 0,24$ з; $t_2 = 0,56$ з; $P(t = 0) = P_d = 80$ мм рт.ст., $P_{кон} = 0$

Беручи до уваги початкові умови, що при $t = 0$ тиск $P = P_1$, тобто тиск наприкінці 1 фази (тиск P_1 майже дорівнює систолічному), одержимо закон зміни тиску у великих судинах з моменту закриття аортального клапана:

$$P(t) = P_1 \cdot e^{-t/WC}$$

На рис.6.4 наведена залежність спаду тиску у великих судинах після закриття аортального клапана.

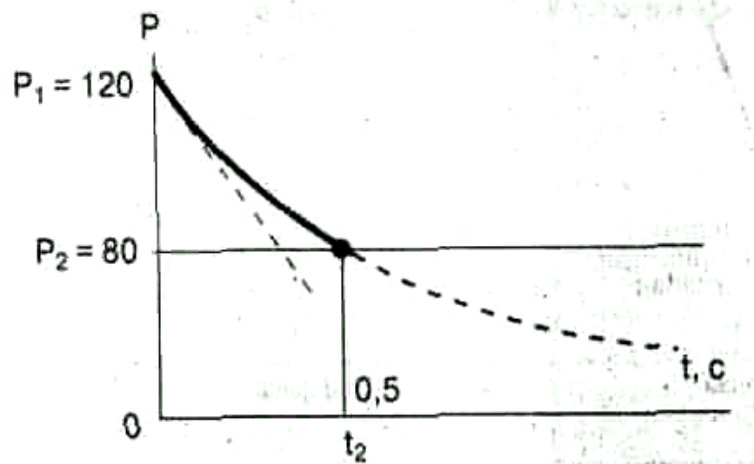


Рисунок 6.4. – Залежність тиску крові від часу у великій судині після закриття аортального клапана

Наприкінці 2 фази (через час t_2 після закриття аортального клапана) тиск крові у великій судині впаде до значення P_2 . (Тиск P_2 майже дорівнює діастолічному.) Відкривається аортальний клапан, і знову повториться 1 фаза.

Виконання роботи

Проаналізуйте модель Франка для 2-ої фази, тобто зміна $P(t)$ після закриття аортального клапана при різних параметрах системи.

Для цього:

- 1) Запишіть закон зміни $P(t)$ для заданих параметрів.
- 2) Розрахуйте $P(t)$ за допомогою ПК і побудуйте графіки.
- 3) Визначте із графіка значення тиску наприкінці другої фази P_2 , якщо її тривалість дорівнює 0,5 с. Як впливає на P_2 зміна еластичності судини й збільшення гідравлічного опору?
- 4) Визначте із графіка швидкість зменшення тиску в початковий момент часу. Для цього проведіть дотичну до кривої в точці $t = 0$. Порівняйте з теоретичним значенням

$$\left. \frac{dP}{dt} \right|_{t=0} = - \frac{P_1}{WC}$$

Як впливає зміна еластичності великих судин і гідравлічного опору мікросудин на швидкість зменшення тиску?

Завдання 1. Проаналізуйте $P(t)$ для другої фази при зміні гідравлічного опору.

Заповніть таблицю:

Параметри	P_1 , мм рт.ст.	W , (мм рт.ст. с)/мол	C , мол/(мм рт.ст. с)	P_2 , мм рт.ст.	Закон зміни $P(t)$
1 система	120	1,0	1,2		
2 система	120	0,8	1,2		
3 система	120	1,2	1,2		

Завдання 2. Проаналізуйте $P(t)$ для другої фази при зміні еластичності стінки судини. Заповніть таблицю:

Параметри	P_1 , мм рт.ст.	W , (мм рт.ст. с)/мол	C , мол/(мм рт.ст. с)	P_2 , мм рт.ст.	Закон зміни $P(t)$
1 система	120	1,0	1,2		
2 система	120	1,0	1,5		
3 система	120	1,0	0,9		

Завдання 3. Проаналізуйте $P(t)$ для 1 і 2 фази (для зміни $P(t)$ протягом цілого серцевого циклу). Для цього розв'яжіть за допомогою ПК рівняння (4) для заданого виду $Q_c(t)$.