

Аналіз двовимірних моделей динаміки чисельності популяцій

8.1. Класифікація типу взаємодій між популяціями

Різні види популяцій взаємодіють між собою по-різному. Характер впливу одного виду на інший можна зобразити одним зі знаків: "+" (стимулюючий), "-" (пригнічений), "0" (нейтральний).

Розглянемо можливі типи парних взаємодій між популяціями.

1. Нейтралізм (0, 0). При такій взаємодії жодна популяція не впливає на іншу. Формально це виражається в тому, що рівняння динаміки є незалежними.

2. Аменсалізм (-, 0). При такій взаємодії другий вид пригнічує ріст першого (аменсала), а сам не відчуває суттєвого впливу з його боку. Такі взаємодії відомі між рослинами і тваринами, рослинами і мікроорганізмами тощо. Формально у разі такої взаємодії коефіцієнт приросту першого виду тим менший, чим більша чисельність другого виду, а коефіцієнт приросту другого виду не залежить від чисельності першого.

3. Коменсалізм (+, 0). Популяція першого виду (коменсал) має вигоду від популяції другого виду і тим самим забезпечує собі існування. Наприклад, у лева існує ціла низка коменсалів: гієни, шакали, птахи та ін.

4. Хижак-жертва (+, -). Це такі відношення між популяціями, при яких збільшення / зменшення чисельності популяції жертви приводить до збільшення / зменшення чисельності хижака, а збільшення / зменшення хижака спричинює зменшення / збільшення чисельності жертви.

5. Конкуренція (-, -). Пряме пригнічення двох видів. Міжвидова конкуренція може бути різною: за простір, за їжу, за інші ресурси. У моделях конкуренції коефіцієнти приросту чисельності цих видів є монотонно спадними функціями.

6. Мутуалізм (+, +). Це відношення вигідного впливу на швидкості зростання обох видів. Без такої взаємодії кожна з популяцій окремо існувати не може.

7. Протокооперація (+, +). Вигода обом, але популяції можуть існувати окремо.

8.2. Система Лотки–Вольтерри ”хижак–жертва”

Одна з перших моделей, що описує динаміку чисельності двох популяцій, що взаємодіють за принципом ”хижак–жертва”, була запропонована В. Вольтеррою (V. Volterra, 1860–1940, італійський фізик, математик). Вона історично виникла під час спроби пояснити коливання вилову риби в Адріатичному морі. Така система була дещо раніше запропонована А. Лоткою (A. Lotka, 1880–1949, один із творців математичної біології), але Вольтерра здійснив повніший аналіз цієї системи.

Позначимо через $x(t)$, $y(t)$ кількість особин жертви та хижака відповідно. Припустимо, що у випадку, коли популяції знаходяться ізольовано одна від одної, їхній розвиток відбувається згідно з принципом Мальтуса: за відсутності хижака популяція жертви експоненціально зростає, а за відсутності жертви популяція хижака експоненціально вимирає.

Позначимо коефіцієнти природного приросту хижака та жертви через ε_1 та $-\varepsilon_2$, тоді рівняння росту у разі цих припущень матимуть вигляд

$$\dot{x} = \varepsilon_1 x, \quad \dot{y} = -\varepsilon_2 y.$$

Якщо такі види існують в обмеженому середовищі, то сумарна кількість жертв, що споживається хижаком, лінійно залежить від густини популяції жертви і від густини популяції хижака. При цьому коефіцієнт природного приросту жертви зменшується на величину, пропорційну чисельності хижаків, а для хижака цей коефіцієнт відповідно збільшується. Це припущення В. Вольтерра зробив на основі гіпотези ”ефективних зустрічей”, яка базується на законі взаємодіючих мас із кінетичної хімії. Припускається також, що додаткові фактори, які впливають на динаміку популяцій у системі, відсутні.

Тоді математична модель системи ”хижак–жертва” описується рівняннями [34, 88]

$$\dot{x} = \varepsilon_1 x - \gamma_1 xy, \quad \dot{y} = -\varepsilon_2 y + \gamma_2 xy, \quad (8.2.1)$$

де ε_1 , ε_2 , γ_1 , γ_2 – додатні параметри.

Фазовим простором цієї системи природно вважати множину $\mathbb{R}_+^2 = \{x, y : x \geq 0, y \geq 0\}$, яка є інваріантною, оскільки фазові

траєкторії не можуть перетнути лінії $x = 0$, $y = 0$, які теж є фазовими кривими.

Система (8.2.1) має дві точки спокою: $O(0;0)$ – нульовий стан рівноваги (повна відсутність життя) і нетривіальний стан рівноваги $P(x^*, y^*)$, де $x^* = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}$, $y^* = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}$.

Лінеаризуючи систему (8.2.1) в околі точки $(0, 0)$, одержимо систему

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \varepsilon_1 \xi_1, \quad \frac{d\xi_2}{dt} = -\varepsilon_2 \xi_2.$$

Характеристичне рівняння цієї системи має корені $\lambda_1 = \varepsilon_1$, $\lambda_2 = -\varepsilon_2$. Оскільки характеристичне рівняння цієї системи має дійсні корені різних знаків, то особлива точка $(0, 0)$ – сідло (рис. 8.1).

```

alpha = 3
x = (3)  x1 = (4)  z2 = (5)
     (4)  (5)  (6)
D(t,x) = ( x0 - x0*x1
           -alpha*x1 + x0*x1 )
z = rkfixed(x,0,20,1000,D)  z1 = rkfixed(x1,0,20,1000,D)  z2 = rkfixed(x2,0,20,1000,D)
n = 0..1000

```

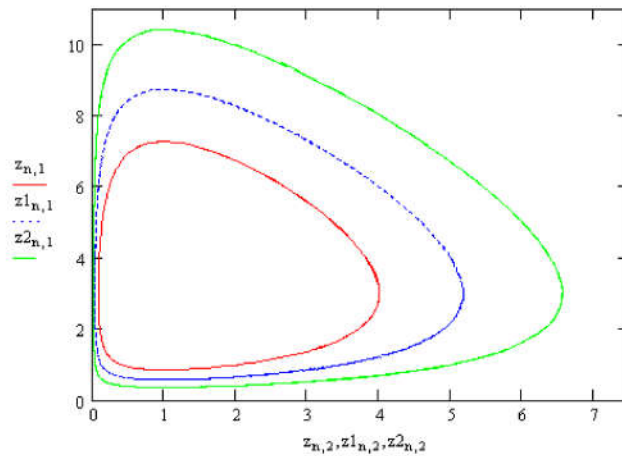


Рис. 8.1. Фазовий портрет системи (8.2.1)

Для лінеаризації системи (8.2.1) в околі точки (x^*, y^*) вважаємо, що $x = x^* + \xi_1$, $y = y^* + \xi_2$, тоді для поправок ξ_1 , ξ_2 із

точністю до величин першого порядку маємо

$$\frac{d\xi_1}{dt} = -\frac{\gamma_1\varepsilon_2}{\gamma_2}\xi_2, \quad \frac{d\xi_2}{dt} = \frac{\gamma_2\varepsilon_1}{\gamma_1}\xi_1.$$

Матриця системи має характеристичні корені $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}$.

Суто уявні корені для лінеаризованої системи визначають тип "центр" для особливої точки (x^*, y^*) , фазові траєкторії оточують центр і є замкненими (їх називають ще циклами). Але в цьому випадку не можна сказати, що точка (x^*, y^*) буде центром для нелінійної системи (8.2.1). Для цього потрібні додаткові дослідження.

Для системи (8.2.1) легко знайти перший інтеграл. Для цього перше рівняння помножимо на γ_2 , а друге – на γ_1 і додамо. Дістанемо

$$\gamma_2 \frac{dx}{dt} + \gamma_1 \frac{dy}{dt} = \gamma_2\varepsilon_1x - \gamma_1\varepsilon_2y.$$

Далі помножимо перше рівняння системи (8.2.1) на $\frac{\varepsilon_2}{x}$, а друге – на $\frac{\varepsilon_1}{y}$ і теж додамо їх:

$$\frac{\varepsilon_2}{x} \frac{dx}{dt} + \frac{\varepsilon_1}{y} \frac{dy}{dt} = -\varepsilon_2\gamma_1y + \varepsilon_1\gamma_2x.$$

Оскільки праві частини одержаних рівнянь збігаються, то, прирівнявши ліві частини, будемо мати рівняння

$$\gamma_2 \frac{dx}{dt} + \gamma_1 \frac{dy}{dt} = \varepsilon_2 \frac{d \ln x}{dt} + \varepsilon_1 \frac{d \ln y}{dt},$$

інтегруючи яке, одержуємо перший інтеграл системи (8.2.1):

$$x^{\varepsilon_2} \cdot y^{\varepsilon_1} = Ce^{\gamma_2x + \gamma_1y}, \quad (8.2.2)$$

де константу C можна знайти з початкових умов.

В. Вольтерра показав, що співвідношення (8.2.2) дає сім'ю замкнених кривих із центром у точці $(x^*, y^*) = \left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right)$ (рис. 8.1), тобто розв'язки $x(t)$, $y(t)$ мають коливний характер.

Отже, основна властивість системи Вольтерри, завдяки якій вона стала класичною і еталонною для розробки багатьох наступних математичних моделей екології, полягає в тому, що на основі сильно спрощених припущень про характер взаємодії, що описують поведінку системи суто математичними засобами, було одержано висновок про якісну поведінку цієї системи: про наявність у системі коливань чисельності популяції. Без побудови математичної моделі та її дослідження такої висновок зробити не можна.

Система рівнянь (8.2.1) має чотири параметри. Під час аналізу моделі слід чітко зрозуміти зміст усіх параметрів моделі та їх розмірності. За рахунок уведення заміни змінних у системі (8.2.1) можна перейти до безрозмірних змінних і водночас зменшити кількість параметрів. А це зумовлює додаткові зручності при дослідженні системи.

У системі (8.2.1) зробимо заміну змінних:

$$x(t) = au(\tau), \quad y(t) = bv(\tau), \quad t = q\tau, \quad (8.2.3)$$

де a, b, q – деякі сталі. Одержимо (тут уже точка позначає похідну по τ):

$$\dot{u} = \varepsilon_1 qu - \gamma_1 qbv, \quad \dot{v} = -\varepsilon_2 qv + \gamma_2 aqv. \quad (8.2.4)$$

Для знаходження параметрів a, b, q запишемо рівняння:

$$\varepsilon_1 q = 1, \quad \gamma_1 qb = 1, \quad \gamma_2 aq = 1.$$

Звідси

$$q = \frac{1}{\varepsilon_1}, \quad b = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}, \quad a = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_2}.$$

Тоді, як випливає з (8.2.3), заміна змінних в явному вигляді задається співвідношеннями

$$x = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_2} u, \quad y = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} v, \quad t = \frac{\tau}{\varepsilon_1}$$

і система рівнянь (8.2.4) набуває вигляду

$$\dot{u} = u - uv, \quad \dot{v} = -\alpha v + uv, \quad (8.2.5)$$

де $\alpha = \varepsilon_2/\varepsilon_1$. Ця система і є системою "хижак–жертва" в нових безрозмірних змінних, яка містить єдиний параметр α . Очевидно,

що аналіз такої системи простіший за аналіз системи (8.2.1) і водночас всі її розв'язки передають властивості розв'язків вихідної системи.

8.3. Модель "хижак–жертва" з конкуренцією серед жертв

Модель В. Вольтерри має деякі недоліки, зокрема, при відсутності хижака чисельність жертви може необмежено зростати. На практиці цього не спостерігається через внутрішньовидову конкуренцію та обмеженість ресурсу.

Модель системи "хижак–жертва" з урахуванням конкуренції серед жертв має вигляд

$$\dot{x} = (\varepsilon_1 - \gamma_1 y - \beta x)x, \quad \dot{y} = (-\varepsilon_2 + \gamma_2 x)y, \quad (8.3.1)$$

де $x(t)$, $y(t)$ – чисельність популяції жертви та хижака, ε_1 , ε_2 , γ_1 , γ_2 , β – додатні параметри.

Для системи (8.3.1) не можна знайти загальний розв'язок чи загальний інтеграл. Застосуємо якісні методи дослідження цієї системи. Для автономних систем (так називається система рівнянь, права частина якої не залежить від часу) особливий інтерес представляє вивчення стійкості стаціонарних розв'язків. Стаціонарні розв'язки системи (8.3.1) знайдемо з такої системи рівнянь

$$(\varepsilon_1 - \gamma_1 y - \beta x)x = 0, \quad (-\varepsilon_2 + \gamma_2 x)y = 0. \quad (8.3.2)$$

Система (8.3.1) має три точки рівноваги:

$$M_1(0; 0), \quad M_2\left(\frac{\varepsilon_1}{\beta}; 0\right), \quad M_3\left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}; \frac{\varepsilon_1 \gamma_2 - \beta \varepsilon_2}{\gamma_1 \gamma_2}\right).$$

В околі точки M_1 матриця системи першого наближення має вигляд

$$A_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 \end{pmatrix}.$$

Власні значення цієї матриці $\lambda_1 = \varepsilon_1$, $\lambda_2 = -\varepsilon_2$ – дійсні різних знаків, тому точка M_1 є особливою точкою типу сідло (рис. 8.2).

Лінеаризуючи систему (8.3.1) в околі точки M_2 , одержимо систему

$$\frac{d\xi_1}{dt} = -\varepsilon_1\xi_1 - \frac{\varepsilon_1\gamma_1}{\beta}\xi_2, \quad \frac{d\xi_2}{dt} = \left(\gamma_2\frac{\varepsilon_1}{\beta} - \varepsilon_2\right)\xi_2.$$

За умови $\varepsilon_1\gamma_2 > \beta\varepsilon_2$ (умова існування точки M_3 із додатними координатами) характеристичний корінь $\lambda_2 > 0$. Тому точка M_2 – сідло (рис. 8.2, а). За умови $\varepsilon_1\gamma_2 < \beta\varepsilon_2$ характеристичний корінь $\lambda_2 < 0$, тому точка M_2 є стійким вузлом (рис. 8.2, б).

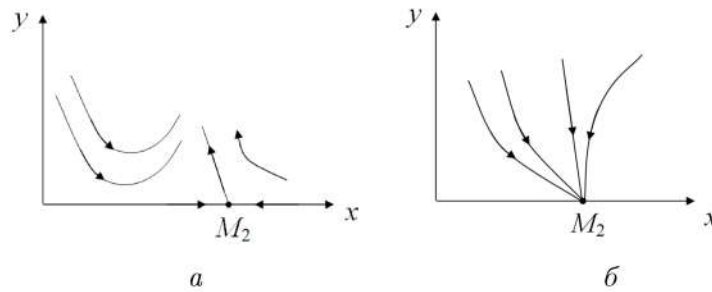


Рис. 8.2. Фазовий портрет системи (8.3.1) в околі точки M_2

Тепер дослідимо систему в околі точки M_3 . Позначимо

$$x^* = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \quad y^* = \frac{\varepsilon_1\gamma_2 - \beta\varepsilon_2}{\gamma_1\gamma_2}.$$

Зауважимо, що додатне значення y^* існує за умови $\varepsilon_1\gamma_2 - \beta\varepsilon_2 > 0$. Лінеаризовані рівняння для приростів $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ в околі точки (x^*, y^*) мають вигляд

$$\frac{d\xi_1}{dt} = -\beta x^* \xi_1 - \gamma_1 x^* \xi_2, \quad \frac{d\xi_2}{dt} = \gamma_2 y^* \xi_1.$$

Для знаходження λ одержуємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -\beta x^* - \lambda & -\gamma_1 x^* \\ \gamma_2 y^* & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

або

$$\lambda^2 + \beta x^* \lambda + \gamma_1 \gamma_2 x^* y^* = 0.$$

Оскільки $\lambda_1 \lambda_2 = \gamma_1 \gamma_2 x^* y^* > 0$, а $\lambda_1 + \lambda_2 = -\beta x^* < 0$, то стаціонарна точка M_3 при $D < 0$ є стійким фокусом або стійким вузлом при $D > 0$, де дискримінант

$$D = (\beta x^*)^2 - 4\gamma_1 \gamma_2 x^* y^*.$$

Покладемо для числового інтегрування системи (8.3.1) значення $\varepsilon_2 = 2$, $\gamma_1 = 0, 1$, $\gamma_2 = 0, 3$, $\beta = 0, 1$. Фазові портрети при різних значеннях ε_1 наведені на рис. 8.3.

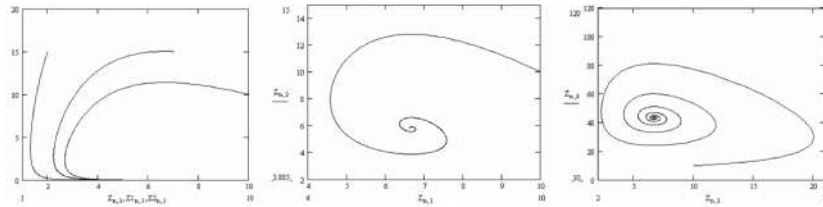


Рис. 8.3. Фазові портрети системи (8.3.1)

Стійкість стаціонарного розв'язку (x^*, y^*) можна дослідити також за допомогою функцій Ляпунова. У цьому випадку функція Ляпунова має вигляд

$$L(x, y) = \frac{x^*}{\gamma_1} \left(\frac{x}{x^*} - \ln \frac{x}{x^*} - 1 \right) + \frac{y^*}{\gamma_2} \left(\frac{y}{y^*} - \ln \frac{y}{y^*} - 1 \right).$$

Оскільки для довільних z маємо $z - 1 \geq \ln z$ (рівність можлива лише при $z = 1$), то $L(x, y) \geq 0$ і $L(x^*, y^*) = 0$.

Знайдемо $\frac{dL}{dt}$ на траєкторіях системи (8.3.1). Одержимо

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{\gamma_1} \left(\dot{x} - \frac{x^*}{x} \dot{x} \right) + \frac{1}{\gamma_2} \left(\dot{y} - \frac{y^*}{y} \dot{y} \right) = -\frac{\beta}{\gamma_1} (x - x^*)^2 \leq 0.$$

Отже, точка (x^*, y^*) стійка за Ляпуновим. Оскільки $\frac{dL}{dt} < 0$ скрізь, за винятком прямої $x = x^*$, то ця точка є асимптотично стійкою.

8.4. Модель Колмогорова

Вище розглядалися моделі взаємодії двох видів, відомі як рівняння Лотки–Вольтерри. У 1935 р. радянський математик А.М. Колмогоров (1903-1987) для системи "хижак–жертва" запропонував модель досить загального характеру [52].

Нехай, як і раніше, $x(t)$ – чисельність жертв, $y(t)$ – чисельність хижаків. Тоді модель Колмогорова має вигляд

$$\dot{x} = \alpha(x)x - V(x)y, \quad \dot{y} = K(x)y, \quad (8.4.1)$$

де $\alpha(x)$ – коефіцієнт природного приросту жертви; $V(x)$ – трофічна функція, що характеризує кількість жертви, що виїдає один хижак за одиницю часу (швидкість виїдання); $K(x)$ – коефіцієнт природного приросту хижаків.

Функції $\alpha(x)$, $K(x)$, $V(x)$ задовольняють такі умови:

1. $\alpha(x)$ є монотонно спадною функцією ($\alpha'(x) < 0$), що вказує на наявність внутрішньовидової конкуренції, до того ж існує $\bar{x} < \infty$, таке, що $\alpha(\bar{x}) = 0$. Це означає, що за відсутності хижака сама популяція жертв не може зростати безмежно. Очевидно також, що $\alpha(0) > 0$, $\alpha(\infty) < 0$ (рис. 8.4, а).

2. Коефіцієнт природного приросту хижаків $K(x)$ – зростаюча функція ($K'(x) > 0$) і така, що змінює знак із мінуса на плюс у точці $x = x^*$ ($K(x^*) = 0$) (рис. 8.4, б), тобто при малих значеннях x це означає, що для хижака недостатньо їжі та не може відбутися його відтворення.

3. Трофічна функція $V(x)$ є монотонно зростаючою ($V'(x) > 0$), причому $V(0) = 0$, $V(x) > 0$ при $x > 0$, $V(\infty) < \infty$.

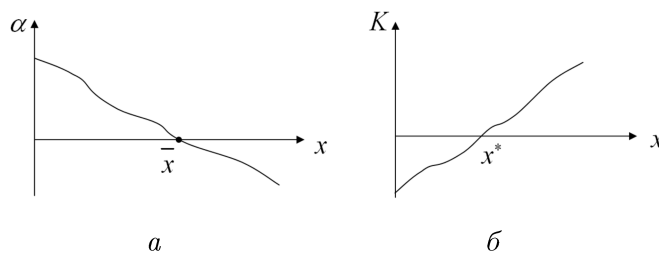


Рис. 8.4. Вид графіків функцій: а – $\alpha(x)$, б – $K(x)$

Екологічні експерименти показують, що трофічна функція належить до одного з трьох типів:

I. $V(x)$ є опуклою вверх для всіх $x \in [0, \infty)$, тобто перша похідна монотонно повільно спадає (рис. 8.5, а).

II. $V(x)$ має S-подібний характер. Опуклість вниз змінюється на опуклість вверх із подальшим насиченням (рис. 8.5, б). Такий тип кривої можна інтерпретувати як наявність альтернативного джерела їжі або існування деякої кількості недоступних хижаку сховищ для жертви.

III. $V(x)$ – кусково-лінійна з різким порогом насичення (рис. 8.5, в). Така крива характерна для хижаків-фільтратив.

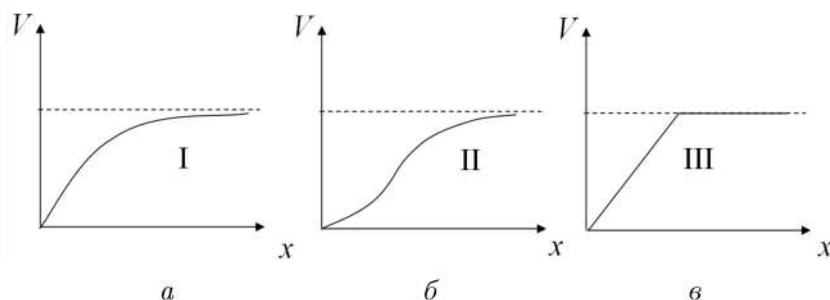


Рис. 8.5. Три типи трофічної функції $V(x)$

Математичні моделі функції $V(x)$ можуть задаватися нижченаведеними аналітичними формулами.

Для типу I:

$$V(x) = \frac{Kx}{L+x} \text{ – формула Моно,}$$

$$V(x) = K(1 - e^{-\alpha x}) \text{ – формула Івлева, де } K, L, \alpha > 0.$$

Для типу II:

$$V(x) = \frac{Kx^2}{L+x^2} \text{ – функція Хассела,}$$

$$V(x) = \frac{Kx^p}{L+x^p} \quad (p > 1),$$

$$V(x) = K(1 - e^{-\alpha x^\beta}), \text{ де } K, L, \alpha, \beta = \text{const} > 0.$$

Для системи (8.4.1) знайдемо простіші траєкторії $x, y = \text{const}$ в області \mathbb{R}_2^+ . Такі траєкторії визначаються з умови

$$\alpha(x)x - V(x)y = 0, \quad K(x)y = 0$$

і називаються точками спокою, або положенням рівноваги, або особливими, або критичними точками системи (8.4.1).

Розв'язком такої системи рівнянь можуть бути дві або три точки: $(0, 0)$, $(\bar{x}, 0)$, (x^*, y^*) , де \bar{x} : $\alpha(\bar{x}) = 0$, x^* : $K(x^*) = 0$, $y^* = \frac{\alpha(x^*)x^*}{V(x^*)}$. Звідси видно, що $y^* > 0$ існує, коли $\alpha(x^*) > 0$, тобто при $x^* < \bar{x}$.

Дослідимо поведінку траєкторій в околі трьох точок спокою. Для цього введемо поправки ξ_1 , ξ_2 за формулами: $x = \tilde{x} + \xi_1$, $y = \tilde{y} + \xi_2$, де (\tilde{x}, \tilde{y}) – одна зі стаціонарних точок. Нелінійні функції $\alpha(x)$, $K(x)$, $V(x)$ розкладатимемо в ряд Тейлора в околі точки \tilde{x} , зокрема

$$V(x) = V(\tilde{x} + \xi_1) = V(\tilde{x}) + \frac{dV(\tilde{x})}{dx}\xi_1 + o(\xi_1)^2.$$

1. У точці $\tilde{x} = 0$, $\tilde{y} = 0$ одержуємо таку лінеаризовану систему:

$$\dot{\xi}_1 = \alpha(0)\xi_1, \quad \dot{\xi}_2 = K(0)\xi_2.$$

Характеристичне рівняння $(\alpha(0) - \lambda)(K(0) - \lambda) = 0$ має два дійсні різні корені $\lambda_1 = \alpha(0) > 0$, $\lambda_2 = K(0) < 0$. Тому особлива точка $(0, 0)$ є сідлом. Осі координат – сепаратрис. При $\lambda_1 > 0$ сепаратриса (вісь Ox) виходить із сідла, при $\lambda_2 < 0$ сепаратриса (вісь Oy) входить у сідло.

2. В околі точки $(\bar{x}, 0)$ лінеаризовані рівняння мають вигляд

$$\dot{\xi}_1 = \alpha'(\bar{x})\bar{x}\xi_1 - V(\bar{x})\xi_2, \quad \dot{\xi}_2 = K(\bar{x})\xi_2.$$

Характеристичне рівняння

$$(\alpha'(\bar{x})\bar{x} - \lambda)(K(\bar{x}) - \lambda) = 0$$

має корені $\lambda_1 = \alpha'(\bar{x})\bar{x}$, $\lambda_2 = K(\bar{x})$.

Оскільки $\alpha'(\bar{x}) < 0$, то $\lambda_1 < 0$. Якщо $K(\bar{x}) < 0$ ($x^* > \bar{x}$), то $\lambda_2 < 0$ і точка $(\bar{x}, 0)$ є стійким вузлом; якщо $K(\bar{x}) > 0$ ($x^* < \bar{x}$), то $\lambda_2 > 0$ і точка $(\bar{x}, 0)$ є сідлом.

Кутові коефіцієнти сепаратрис $k_1 = 0$, $k_2 = \frac{\alpha(\bar{x}) - K(\bar{x})}{V(\bar{x})} < 0$.

3. У точці (x^*, y^*) лінеаризовані рівняння мають вигляд

$$\dot{\xi}_1 = \sigma \xi_1 - V(x^*) \xi_2, \quad \dot{\xi}_2 = K'(x^*) y^* \xi_1,$$

де $\sigma = \alpha(x^*) + \alpha'(x^*)x^* - V'(x^*)y^*$.

Характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + V(x^*)K'(x^*)y^* = 0$$

може мати корені різного характеру.

Оскільки добуток $\lambda_1\lambda_2 = V(x^*)K'(x^*)y^* > 0$, то точка (x^*, y^*) або вузол при $D = \sigma^2 - 4V(x^*)K'(x^*)y^* > 0$, або фокус при $D < 0$. При $\sigma > 0$ стаціонарна точка нестійка, при $\sigma < 0$ – стійка. Третя точка (x^*, y^*) існує за умови, що $x^* < \bar{x}$, тобто коли друга точка $(\bar{x}, 0)$ є сідлом.

Сепаратриси, що виходять з точки $(\bar{x}, 0)$, можуть входити в точку (x^*, y^*) – це буде у випадку, коли точка (x^*, y^*) стійка. У разі нестійкості точки (x^*, y^*) сепаратриса буде намотуватися на граничний цикл.

Отже, маємо таку класифікацію особливих точок (фазові портрети показано на рис. 8.6):

- а) точка $(0, 0)$ завжди є сідлом;
- б) якщо $\bar{x} < x^*$, то точка $(\bar{x}, 0)$ є стійким вузлом і не існує третьої стаціонарної точки;
- в) якщо $\bar{x} > x^*$, то $(\bar{x}, 0)$ є сідлом і існує третя стаціонарна точка (x^*, y^*) ;
- г) точка (x^*, y^*) при $\sigma > 0$ є нестійким фокусом, якщо $D < 0$, і нестійким вузлом, якщо $D > 0$;
- д) при $\sigma < 0$ точка (x^*, y^*) – стійкий фокус, якщо $D < 0$, і стійкий вузол, якщо $D > 0$. В цьому випадку існує хоча б один граничний цикл, який розводить ці траєкторії.

Поведінка траєкторій усередині циклу може бути достатньо складною.

Вище показано, як із простих та природних припущень про характер міжвидових і внутрішньовидових взаємодій виникає досить складна поведінка системи "хижак–жертва". Найцікавішим є те, що в системі можливе існування граничного циклу, до того ж їх може бути декілька.

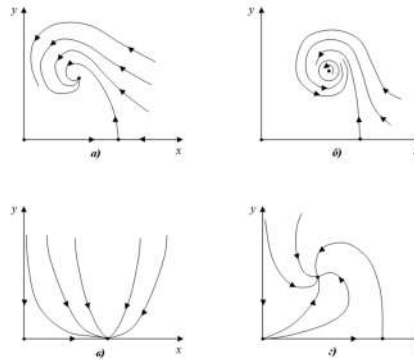


Рис. 8.6. Фазові портрети системи (8.4.1)

Розглянемо окремий випадок системи (8.4.1):

$$\dot{x} = \alpha x - V(x)y, \quad \dot{y} = (-m + kV(x))y, \quad (\alpha, m, k = \text{const} > 0). \quad (8.4.2)$$

Аналіз цієї математичної моделі дає можливість одержати відповідь на питання, чи може хижак стабілізувати систему "хижак-жертва". Без математичного моделювання обґрунтувати відповідь на це питання неможливо.

У моделі Колмогорова зроблено припущення, що $\alpha'(x) < 0$ і $\alpha(\bar{x}) = 0$. Це означає, що в популяції жертв уже існує механізм внутрішньої регуляції за відсутності хижака. Тому в моделі (8.4.2) вважатимемо, що $\alpha(x) = \alpha = \text{const}$.

Природно, що розв'язки системи (8.4.2) залежать від виду трофічної функції $V(x)$, яка, в свою чергу, визначається характером хижацтва. Функція $V(x)$ задовольняє ті ж умови, що й раніше:

$$V(x) > 0, \quad V(0) = 0, \quad V'(x) \geq 0, \quad V(\infty) < \infty.$$

Система (8.4.2), крім тривіальної, має ще одну нетривіальну стаціонарну точку (x^*, y^*) , де

$$y^* = \frac{\alpha k}{m} x^*, \quad V(x^*) = \frac{m}{k},$$

за умови, що $V(\infty) > \frac{m}{k}$.

Характеристичне рівняння для точки (x^*, y^*) має вигляд

$$\lambda^2 - \lambda\alpha[1 - f(x^*)] + \alpha m f(x^*) = 0,$$

де

$$f(x) = \frac{V'(x)}{V(x)/x}.$$

При

$$D = [1 - f(x^*)]^2 - \frac{4m}{\alpha} f(x^*) < 0$$

стаціонарна точка (x^*, y^*) – фокус, при $D > 0$ – вузол.

Стійкість цього стану визначається умовою $f(x^*) > 1$, або

$$V'(x^*) > \frac{V(x^*)}{x^*},$$

і залежить тільки від поведінки функції $V(x)$. Останню нерівність можна переписати у вигляді

$$\left(\frac{V(x)}{x}\right)'_{x=x^*} > 0. \quad (8.4.3)$$

Співвідношення (8.4.3) можна трактувати так: для стійкості нетривіальної рівноваги системи (8.4.1), тобто для існування системи "хижак–жертва", достатньо, щоб в околі стаціонарного стану відносна частка спожитих хижаком жертв зростала зі зростанням чисельності жертв.

При неперервності функції $V'(x)$ умова (8.4.3) виконується в деякому околі точки $x = x^*$, тобто якщо $x_1 < x^* < x_2$, то

$$\frac{V(x_1)}{x_1} < \frac{V(x^*)}{x^*} < \frac{V(x_2)}{x_2}, \quad (8.4.4)$$

де x_1, x_2 точки з околу точки x^* .

Нехай тепер трофічна функція є функцією типу I (рис. 8.5). Нерівність (8.4.4) не виконується для всіх значень x , оскільки $V(x)$ опукла вгору (обґрунтування цього факту показано на рис. 8.7, а).

Це означає, що в системі "хижак–жертва" з таким типом трофічної функції не існує стійкого нетривіального стану рівноваги. Тут можливі такі варіанти: або чисельність хижака та жертви необмежено зростає, або при проходженні траєкторії поблизу однієї з координатних осей унаслідок випадковостей чисельність

жертви або хижака перетвориться в нуль. При вимиранні жертви згодом вимре й хижак, при вимиранні хижака чисельність жертви почне зростати. Третій варіант – виникнення стійкого граничного циклу – неможливий. Дійсно, вираз

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{xy} (\alpha x - V(x)y) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{xy} (kV(x) - m) \right) = \\ = \frac{V(x) - V'(x)x}{x^2} = \frac{1}{x} \left(\frac{V(x)}{x} - V'(x) \right) \end{aligned}$$

завжди додатний у першій чверті для функції $V(x)$ типу I. Тоді, згідно з критерієм Дюлака, в першій чверті відсутні замкнені траєкторії і стійкого граничного циклу не існує.

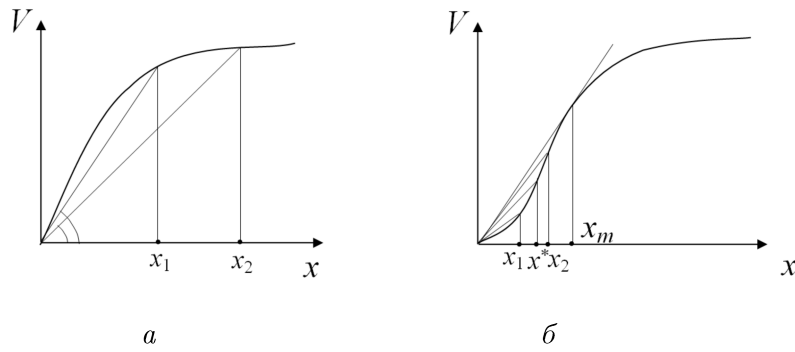


Рис. 8.7. Обґрунтування умови (8.4.4)

Тому правомірний висновок, що у випадку трофічної функції типу I хижак не може бути регулятором, що забезпечує стабільність усієї системи. При такому типі трофічної функції система може бути стійкою тільки в тому випадку, коли в популяції жертви існують власні внутрішні регуляторні механізми, наприклад, внутрішньовидова конкуренція.

Для трофічної функції типу II можливе існування стійкого нетривіального стану рівноваги. Дійсно, нехай x_m – точка дотику прямої, проведеної з початку координат, до кривої $V(x)$. У цій точці функція $\frac{V(x)}{x}$ досягає свого максимального значення. Візьмемо тепер $x^* < x_m$, тоді очевидно, що існують x_1, x_2 , такі, що

$x_1 < x^* < x_2 < x_m$ і виконується умова (8.4.4). Доведення цього факту показано на рис. 8.7, б. Отже, нетривіальний стан рівноваги, для якого $x^* < x_m$, асимптотично стійкий. Тобто у випадку трофічної функції типу II хижак може робити систему стійкою. Це властиво системі "хижак-жертва", в якій хижаки здатні навчатися, а жертви здатні знаходити сховища.

8.5. Моделі конкуренції

8.5.1. Модель Вольтерри для двох конкурентів

В. Вольтерра [34] для описання динаміки двох видів, які живуть на одній території і конкурують за загальний ресурс, запропонував таку модель:

$$\frac{dx}{dt} = (\varepsilon_1 - \gamma_1(x + y))x, \quad \frac{dy}{dt} = (\varepsilon_2 - \gamma_2(x + y))y, \quad (8.5.1)$$

де $x(t)$, $y(t)$ – чисельність двох конкурентів; додатні числа ε_1 , ε_2 – інтенсивності народжуваності; γ_1 , γ_2 – інтенсивності вимирання.

Заміною змінних

$$x = \varepsilon_1/\gamma_1 u, \quad y = \varepsilon_1/\gamma_1 v, \quad t = \tau/\varepsilon_1$$

система (8.5.1) зводиться до системи вигляду

$$\dot{u} = u(1 - (u + v)), \quad \dot{v} = \gamma v(1 - \varepsilon(u + v)), \quad (8.5.2)$$

де $\gamma = \varepsilon_2/\varepsilon_1$, $\varepsilon = \varepsilon_1\gamma_2/(\varepsilon_2\gamma_1)$.

Стаціонарні точки системи (8.5.2) знайдемо з системи

$$u(1 - (u + v)) = 0, \quad \gamma v(1 - \varepsilon(u + v)) = 0. \quad (8.5.3)$$

Якщо $\varepsilon \neq 1$, то система (8.5.3) має три розв'язки

$$O(u = 0, v = 0), \quad P(u = 0, v = 1/\varepsilon), \quad Q(u = 1, v = 0).$$

Якобіан системи (8.5.2) – це матриця

$$A = \begin{pmatrix} 1 - (2u + v) & -u \\ -\gamma\varepsilon v & \gamma(1 - \varepsilon(u + 2v)) \end{pmatrix}.$$

У точках рівноваги матриця A набуває вигляду

$$A_1 = A(O) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad A_2 = A(P) = \begin{pmatrix} 1 - 1/\varepsilon & 0 \\ -\gamma & -\gamma \end{pmatrix},$$

$$A_3 = A(Q) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & \gamma(1 - \varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Для матриці A_1 власні значення $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \gamma$, тому точка $O(0, 0)$ є нестійким вузлом.

Матриця A_2 має власні значення $\lambda_1 = 1 - \frac{1}{\varepsilon}$, $\lambda_2 = -\gamma$. За умови, що $\varepsilon < 1$ λ_1 має від'ємне значення, точка P є стійким вузлом, при $\varepsilon > 1$ точка P – сідло.

Матриця A_3 має власні значення $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \gamma(1 - \varepsilon)$. При $\varepsilon < 1$ значення $\lambda_2 > 0$ і точка Q – сідло, при $\varepsilon > 1$ точка Q – стійкий вузол.

Відповідні фазові портрети моделі (8.5.2) наведені на рис. 8.8.

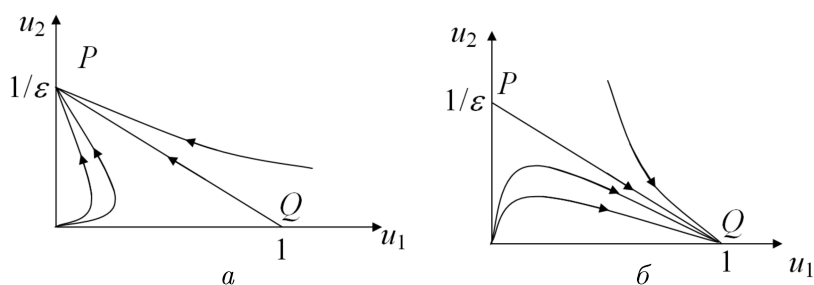


Рис. 8.8. Фазовий портрет системи (8.5.2): $a - \varepsilon < 1$; $b - \varepsilon > 1$

Дамо екологічну інтерпретацію одержаних результатів. В екологічних моделях відношення ε/γ називається коефіцієнтом пристосування. Якщо $\varepsilon > 1$ ($\frac{\varepsilon_1 \gamma_2}{\varepsilon_2 \gamma_1} > 1 \Rightarrow \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} > \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}$), то перший вид більш пристосований, ніж другий. Якщо $\varepsilon < 1$, то, навпаки, другий вид більш пристосований. Тому проведені дослідження дозволяють стверджувати, що при $\varepsilon \neq 1$ виживає вид із більшою пристосованістю, а інший – вмирає. Це і є принцип конкурентного виключення, відкритий Г. Гаузе (1910–1986, радянський біолог).

У разі, коли $\varepsilon = 1$ (коефіцієнт пристосовності однаковий), система (8.5.2) не дає відповіді про асимптотичну поведінку конкурентів, оскільки вона має безліч розв'язків $u + v = 1$, серед яких є точки P, Q , тобто P, Q – неізольовані стаціонарні точки.

8.5.2. Узагальнення моделі конкуренції

Розглянемо математичну модель конкуренції між двома видами. Нехай обидва види є автотрофами, тобто здатні розмножуватися незалежно один від одного. Припустимо, що в ізоляції динаміка популяцій двох видів підпорядковується логістичному закону, тобто в популяціях існує внутрішньовидова боротьба (самообмеження). Взаємодію двох конкурентів опишемо згідно з гіпотезою "ефективних зустрічей". Математичною моделлю описаної системи є сукупність рівнянь вигляду

$$\dot{x} = r_1x\left(1 - \frac{x}{K_1}\right) - \gamma_1xy, \quad \dot{y} = r_2y\left(1 - \frac{y}{K_2}\right) - \gamma_2xy, \quad (8.5.4)$$

де $x(t), y(t)$ – чисельності двох конкурентів, $K_1, K_2, \gamma_1, \gamma_2 = \text{const} > 0$.

Застосуємо для аналізу системи (8.5.4) метод ізоклін. Для цього поділимо друге рівняння на перше:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(r_2\left(1 - \frac{y}{K_2}\right) - \gamma_2x\right)y}{\left(r_1\left(1 - \frac{x}{K_1}\right) - \gamma_1y\right)x}. \quad (8.5.5)$$

Виходячи з геометричного змісту похідної $y' = \text{tg } \alpha$ (α – кут нахилу дотичної до осі Ox), бачимо, що рівняння (8.5.5) визначає поле напрямків, яке виділяє інтегральні криві рівняння (8.5.5). Крива, в кожній точці якої нахил поля один і той самий, тобто $\text{tg } \alpha = \text{const}$, називається ізокліною рівняння (8.5.4).

Знайдемо спочатку рівняння нуль-ізоклін. Якщо $\frac{dy}{dx} = 0$, то $r_2\left(1 - \frac{y}{K_2}\right) - \gamma_2x = 0$, або $y = K_2\left(1 - \frac{\gamma_2}{r_2}x\right)$. Це лінія на площині, яку фазові траєкторії будуть перетинати горизонтально. Позначимо цю ізокліну цифрою 1. Якщо $r_1\left(1 - \frac{x}{K_1}\right) - \gamma_1y = 0$, або

$y = \frac{r_1}{\gamma_1} \left(1 - \frac{x}{K_1}\right)$, то в цих точках поле напрямків вертикальне. Цю ізокліну позначимо цифрою 2. Точка перетину цих ліній (якщо вона існує) визначає стаціонарну точку, інакше – точку спокою чи рівноваги.

Враховуючи рівняння (8.5.4), можна виставити напрями змінних $x(t)$, $y(t)$ поза лініями 1 та 2 (рис. 8.9). Наприклад, під лінією 1 маємо, що $r_2 \left(1 - \frac{y}{K_2}\right) - \gamma_2 x > 0$, а отже, $\frac{dy}{dt} > 0$ і $y(t)$ зростає.

Лінії 1 та 2 можуть бути розміщені на площині чотирма різними способами. Ці лінії поділять площину на декілька областей. Визначаючи в кожній області поле напрямків, ми зможемо провести фазові траєкторії. Різні наслідки конкурентної боротьби між популяціями залежно від коефіцієнтів системи наведені на рис. 8.10. Осциляційні режими відсутні.

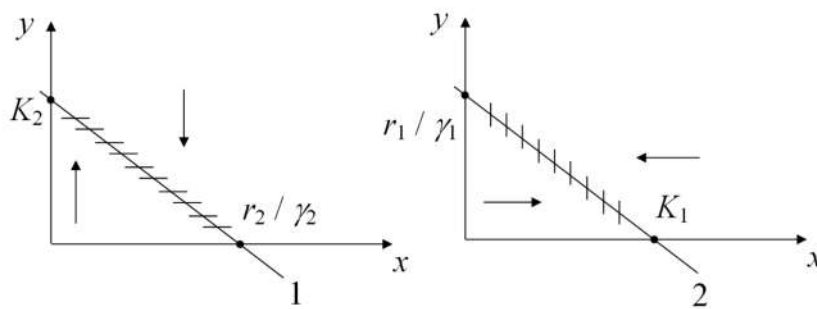


Рис. 8.9. Напрями зміни фазових змінних $x(t)$, $y(t)$

Наприклад, перший вид повністю витісняє другий, якщо $r_1/\gamma_1 > K_2$ і $K_1 > \frac{r_2}{\gamma_2}$ (рис. 8.10, а). Рис. 8.10, в показує, що два конкуренти можуть співіснувати за умови $\frac{r_1}{\gamma_1} > K_2$, $\frac{r_2}{\gamma_2} > K_1$. Якщо будуть виконані протилежні умови, то знову виживає лише один вид, який залежить від початкових умов (рис. 8.10, з). Тут положення рівноваги є вже нестійкою сідловою точкою.

Схожі режими реалізуються і в інших моделях системи двох конкурентів.

Не зважаючи на простоту, модель конкуренції (8.5.4) має практичне застосування. В [29] описано факт застосування моделі

(8.5.4) для аналізу конкурентної боротьби між двома видами комарів у Північній Америці.

Ця модель може застосовуватися не тільки для описання конкуренції між двома біологічними угрупованнями, а й для дослідження конкуренції комерційних компаній, боротьби партій за фінансові ресурси тощо.

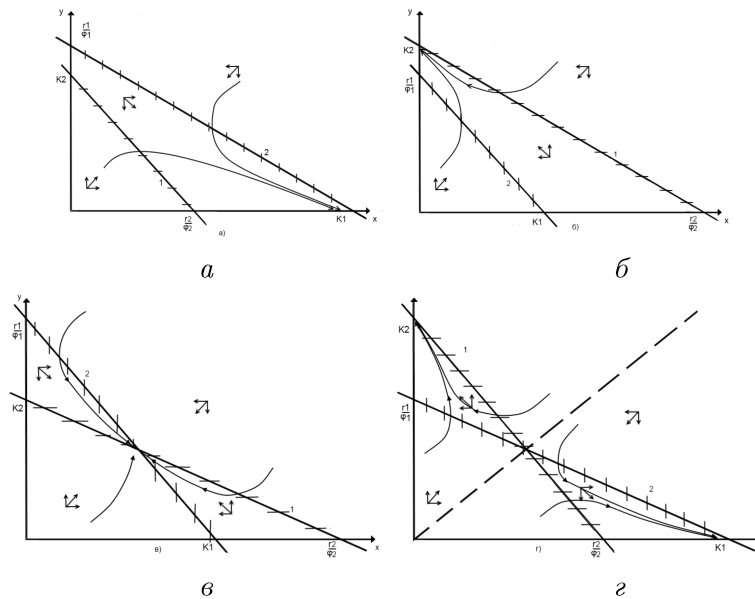


Рис. 8.10. Фазові портрети системи (8.5.4)

Для проведення аналізу системи (8.5.4) методом лінеаризації вигідно перейти до безрозмірних змінних і записати систему у вигляді

$$\dot{u} = u(1 - u - \alpha v), \quad \dot{v} = v(\gamma - u - \beta v). \quad (8.5.6)$$

Заміну змінних і аналіз системи (8.5.6) за першим наближенням виконайте самостійно. Побудуйте параметричний портрет системи (8.5.6) та її фазові портрети.

Накінець зауважимо, що можна будувати точніші математичні моделі взаємодії популяцій, які враховуватимуть складні картини взаємодії, як за часом так і в просторі, нерівномірність розподілу чисельності популяцій на займаній території, неоднорідність властивостей особів, зовнішні дії тощо. Для пошуку розв'язків таких

задач необхідно використовувати числові методи, при цьому, як показали наведені вище приклади, обов'язково необхідно виконувати якісний аналіз моделей. Цю інформацію можна використати не тільки для екологічної інтерпретації, але й при тестуванні числових прикладів.

8.6. Стохастична популяційна динаміка

Функціонування біологічних угруповань, як правило, супроводжується випадковими збуреннями. Врахування випадкових збурень приводить до необхідності використовувати математичний апарат теорії ймовірності та теорії випадкових процесів.

Процес вивчення динаміки популяцій може починатися з дослідження ідеальної моделі без урахування випадкових факторів. На наступному кроці включають до розгляду додаткові ефекти, які виникають при врахуванні випадкових флуктуацій, і оцінюють вплив випадкових процесів на динаміку популяції. У багатьох випадках випадкові збурення якісно змінюють картину.

Насамперед дослідників популяційної динаміки цікавлять стохастичні атрактори систем із випадковими збуреннями. Під дією стохастичних збурень випадкові траєкторії покидають атрактор детермінованої системи і формують навколо нього деякий пучок. Завдяки стійкості атрактора густина розподілу ймовірності випадкових станів у цьому пучку стабілізується. Стаціонарний ймовірнісний розподіл, що встановлюється, визначає стохастичний атрактор.

Розглянемо детерміновану нелінійну систему диференціальних рівнянь вигляду

$$dx = f(x)dt, \quad x, f \in \mathbb{R}^n, \quad (8.6.1)$$

де $f(x)$ – досить гладка вектор-функція.

Нехай система (8.6.1) має атрактор $M \subset \mathbb{R}^n$. M є інваріантною множиною для (8.6.1), яка є обмеженою і замкнутою.

Припустимо, що M – експоненціально стійка. Це означає, що для малого околу U множини M знайдуться константи $K > 0$, $l > 0$, такі, що для довільного розв'язку $x(t)$ системи (8.6.1) з початковою умовою $x(0) = x_0 \in U$ при всіх $t \geq 0$ виконується

нерівність

$$\|\Delta(x(t))\| \leq Ke^{-lt}\|\Delta(x_0)\|,$$

де $\Delta x = x - \gamma(x)$, $\gamma(x) = \arg \min_{y \in M} \|x - y\|$, $\|\cdot\|$ – евклідова норма; $\gamma(x)$ – найближча до x точка атрактора M ; Δx – вектор відхилення x від M .

Поряд з (8.6.1) розглянемо відповідну стохастичну систему рівнянь Іто

$$dx = f(x)dt + \varepsilon\sigma(x)dw(t), \quad (8.6.2)$$

де $w(t)$ – n -вимірний стандартний вінерівський процес; $\sigma(x)$ – достатньо гладка $n \times n$ -матрична функція, що задає залежність випадкових збурень від стану системи; ε – параметр інтенсивності збурень.

Функція $w(t)$ називається n -вимірним стандартним вінерівським процесом, якщо її прирости $\Delta w_i = w(t_{i+1}) - w(t_i)$ для неперетинних часових відрізків незалежні й розподілені за нормальним законом

$$E\Delta w_i = 0, \quad E\Delta w_i \Delta w_i^T = |t_{i+1} - t_i|I,$$

де I – одинична матриця.

У результаті дії невироджених шумів ($\sigma(x)|_M \neq 0$) випадкові траєкторії системи (8.6.2) покидають детермінований аттрактор M і формують навколо нього деякий пучок.

Як приклад, розглянемо модель динаміки ізольованої популяції

$$\dot{x} = \alpha x - \beta x - \gamma x^2.$$

При $\alpha > \beta$, $\gamma > 0$ існує стійкий стан рівноваги $\bar{x} = \frac{\alpha - \beta}{\gamma}$. При $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$ $\bar{x} = 1$.

Якщо врахувати випадкові фактори, що впливають на поведінку популяції, то динаміка популяції визначатиметься з рівняння [23]

$$\dot{x} = \alpha x - \beta x - \gamma x^2 + \sigma \dot{w}(t), \quad (8.6.3)$$

де $w(t)$ – одновимірний вінерівський процес.

Розв'язки цього рівняння при $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$ з початковою умовою $x_0 = 0,5$ ($x_0 = 1$ збігається з точкою рівноваги $\bar{x} = 1$) при збуреннях різної інтенсивності наведені на рис. 8.11.

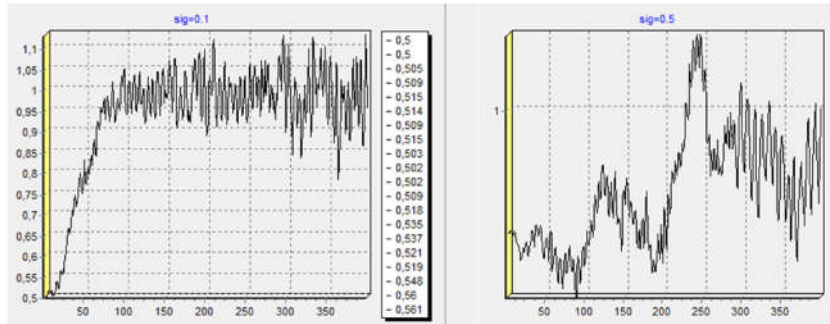


Рис. 8.11. Динаміка розв'язків рівняння (8.6.3)

Складніший приклад – це двовимірна система "хижак–жертва" з обмеженістю ресурсів для жертви. Ця система має вигляд

$$\dot{x} = \alpha x - xy - x^2, \quad \dot{y} = -y + xy, \quad \alpha > 0.$$

При $\alpha > 1$ система має нетривіальний стан рівноваги $\bar{x} = 1$, $\bar{y} = \alpha - 1$, який при $1 < \alpha < 1,25$ є стійким вузлом, а при $\alpha > 1,25$ – стійким фокусом.

Якщо врахувати зовнішні випадкові збурення, то така система задається рівняннями [23]

$$\dot{x} = \alpha x - xy - x^2 + \sigma \dot{w}_1, \quad \dot{y} = -y + xy + \sigma \dot{w}_2, \quad \alpha > 0, \quad (8.6.4)$$

де $w_1(t)$, $w_2(t)$ – незалежні вінерівські процеси.

На рис. 8.12 показані траєкторії системи (8.6.4) при $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, які при $\alpha = 2$ збігаються з положенням рівноваги.

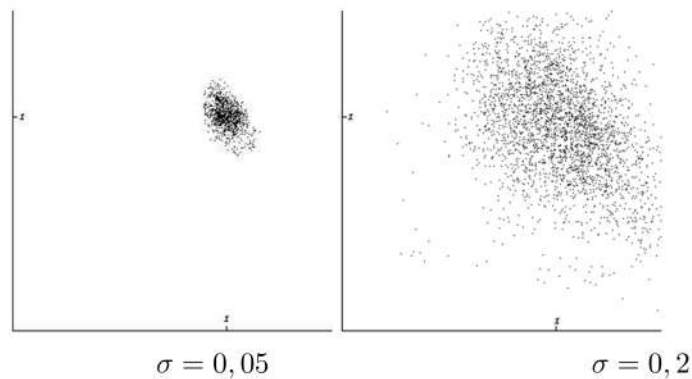


Рис. 8.12. Динаміка розв'язків системи (8.6.4)

Розглянемо тепер вплив випадкових збурень на систему "хижак-жертва" з насиченням хижака. Детермінована модель має вигляд

$$\dot{x} = x - \frac{x}{1+x}y - \gamma x^2, \quad \dot{y} = -y + 2\frac{x}{1+x}y.$$

Відомо, що при $0 < \gamma < \frac{1}{3}$ ця система має нестійку точку спокою $(1, 2 - 2\gamma)$. Траєкторії, що відходять від неї, намотуються на граничний цикл. Незалежно від початкових значень, система з часом переходить у режим коливань постійної частоти.

Внесемо в цю систему випадкові збурення, тоді динаміка популяції буде визначатися рівняннями [23]

$$\dot{x} = x - \frac{x}{1+x}y - \gamma x^2 + \sigma w_1, \quad \dot{y} = -y + 2\frac{x}{1+x}y + \sigma w_2, \quad (8.6.5)$$

де $w_1(t), w_2(t)$ – незалежні вінерівські процеси.

На рис. 8.13 зображені стохастичні траєкторії цієї системи при $\gamma = 0,3$ із початковими даними на граничному циклі для збурень різної інтенсивності.

Завдяки стійкості граничного циклу випадкова траєкторія хоча й покидає його, але продовжує рухатися в його околі, формуючи пучок. Розкид траєкторій залежить від інтенсивності збурення.

Дослідження впливу стохастичних збурень шляхом числового моделювання випадкових траєкторій вимагає значних комп'ютерних ресурсів, особливо коли необхідно одержати репрезентативні вибірки.

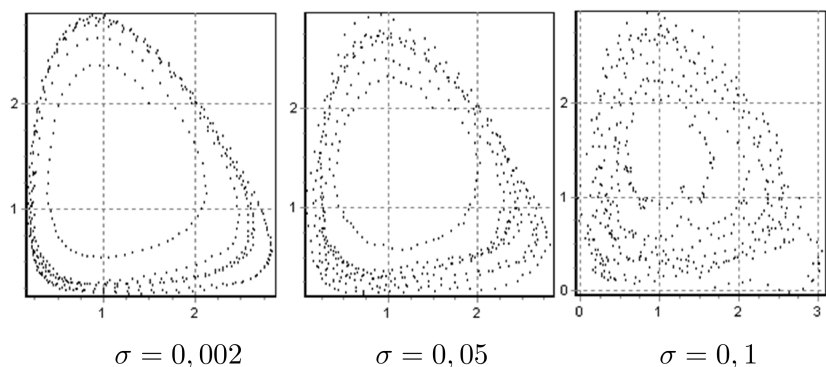


Рис. 8.13. Динаміка розв'язків системи (8.6.5)

Для вивчення ймовірносних розподілів траєкторій у пучку можна застосовувати й аналітичні методи. Повний ймовірносний опис випадкових траєкторій у термінах густини ймовірності дається рівнянням Фокера–Планка–Колмогорова (ФПК). Якщо нас не цікавить характер перехідного процесу, а основний інтерес маємо до режимів, що встановилися, то можна обмежитися вивченням стаціонарної густини розподілу $\rho(x, \varepsilon)$, яка визначається зі стаціонарного рівняння ФПК

$$\frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{ij=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (a_{ij} \rho) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (f_i \rho) = 0, \quad a_{ij} = [\sigma \sigma^T]_{ij}.$$

Безпосереднє використання цього рівняння навіть у простіших ситуаціях (наприклад, коли розглядається стаціонарний розподіл стану автоколивної системи з одним ступенем вільності) є достатньо громіздкою задачею, оскільки при вивченні малих збурень (що важливо для практики) приводить до аналізу рівнянь з малим коефіцієнтом при старших похідних. Тому до вивчення малих збурень існують й інші підходи.

Розглянемо систему Хопфа при дії випадкових збурень

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y - x(x^2 + y^2) + \varepsilon \dot{w}_1(t), \\ \dot{y} = x + \mu y - y(x^2 + y^2) + \varepsilon \dot{w}_2(t), \end{cases}$$

де $w_1(t)$, $w_2(t)$ – стандартні вінерівські процеси.

Детермінована система Хопфа ілюструє біфуркацію переходу від стійкої рівноваги до граничного циклу. При переході параметра μ через біфуркаційне значення $\mu_* = 0$ точка рівноваги $(0, 0)$ втрачає свою стійкість і з'являється граничний цикл (коло $x^2 + y^2 = \mu$).

У разі дії випадкових збурень ($\varepsilon \neq 0$) траєкторія покидає детермінований аттрактор і формує навколо нього деякий пучок.

На рис. 8.14 для різних значень μ зображено стани цієї системи, що одержані в числовому експерименті.

Математичною моделлю стохастичного аттрактора є стаціонарний розподіл ймовірності, до якого збігаються всі інші розподіли. Для системи Хопфа рівняння ФПК для стаціонарної густини роз-

поділу $\rho(x, y)$ має вигляд

$$\frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} ((\mu x - y - x(x^2 + y^2))\rho) - \frac{\partial}{\partial y} ((x + \mu y - y(x^2 + y^2))\rho) = 0.$$

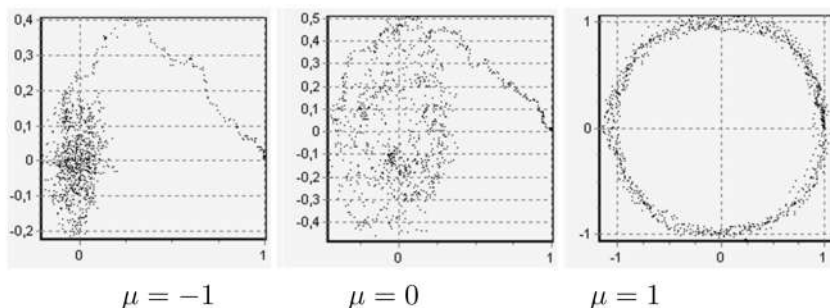


Рис. 8.14. Стани випадкової системи Хопфа

Розв'язки цього рівняння знаходяться аналітично [23]:

$$\rho(x, y) = K \exp \left(\frac{2\mu(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2}{2\varepsilon^2} \right),$$

де $K > 0$ – константа нормування ρ .

При $\mu \leq 0$ функція $\rho(x, y)$ має єдиний максимум у точці $(0, 0)$. Випадкові траєкторії концентруються в околі точки $(0, 0)$.

При $\mu > 0$ максимумами $\rho(x, y)$ розміщені на детермінованому циклі $x^2 + y^2 = \mu$, а єдиний мінімум знаходиться в точці $(0, 0)$.

Графіки функції $\rho(x, y)$ за фіксованого $y = 0$ при різних значеннях параметра μ наведені на рис. 8.15.

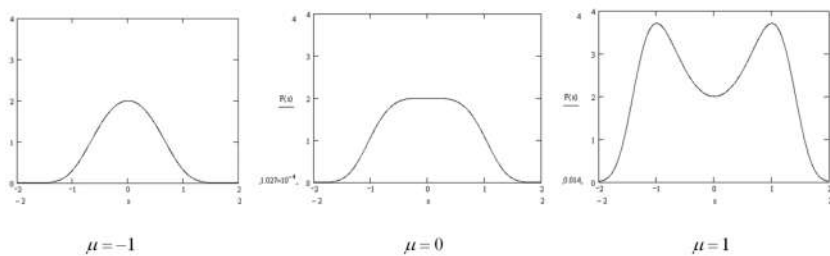


Рис. 8.15. Графіки функцій $\rho(x, 0)$

Покажемо ще, як можна здійснити комп'ютерне моделювання стохастичних траєкторій.

Розглянемо систему з випадковими збуреннями

$$\dot{x} = f(x, y) + \sigma_1(x, y)\dot{w}_1, \quad \dot{y} = g(x, y) + \sigma_2(x, y)\dot{w}_2.$$

Розрахунок наближених значень розв'язків можна здійснити на основі методу Ейлера за формулами

$$x_{m+1} = x_m + hf(x_m, y_m) + \sigma_1(x_m, y_m)\Delta w_{1,m},$$

$$y_{m+1} = y_m + hg(x_m, y_m) + \sigma_2(x_m, y_m)\Delta w_{2,m},$$

де $\Delta w_{1,m}$, $\Delta w_{2,m}$ – приріст вінерівських процесів. Їх можна одержати за формулами

$$\Delta w_{1,m} = \sqrt{-2h \ln(r_{1,m})} \sin(2\pi r_{2,m}),$$

$$\Delta w_{2,m} = \sqrt{-2h \ln(r_{1,m})} \cos(2\pi r_{2,m}).$$

Тут $r_{1,m}$, $r_{2,m}$ – незалежні випадкові величини, рівномірно розподілені на проміжку $[0, 1]$.