ОСНОВНІ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ТЕОРІЇ НАДІЙНОСТІ

Відмови в системах виникають під впливом різноманітних факторів. Оскільки кожен фактор у свою чергу залежить від багатьох причин, то відмови елементів, що входять до складу системи, належать, як правило, до випадкових подій, а час роботи до виникнення відмов – до випадкових величин. В інженерній практиці можливі і не випадкові (детерміновані) відмови (відмови, виникнення яких відбувається в певний момент часу, тобто в момент виникнення причини, оскільки існує однозначний і певний зв'язок між причиною відмови і моментом її виникнення). Наприклад, якщо в ланцюзі апаратів помилково поставлений елемент, не здатний працювати при піковому навантаженні, то всякий раз, коли виникає це навантаження, він обов'язково перейде в стан відмови. Такі відмови виявляються і усуваються в процесі перевірки технічної документації та при випробуваннях.

При аналізі надійності об'єктом дослідження є випадкові події та величини. В якості теоретичних розподілів напрацювання до відмови можуть бути використані будь-які застосовувані в теорії імовірності неперервні розподіли. В принципі можна взяти будь-яку криву, площа під якої дорівнює одиниці, і використовувати її в якості кривої розподілу випадкової величини. Тому перш ніж приступити до інженерних методів розрахунку надійності і випробувань на надійність, слід розглянути закономірності, яким вони підпорядковуються.

2.1. Поняття про випадкові величини та випадкові процеси

Випадкова подія – подія, яка в результаті досвіду може відбутися або не відбутися. Випадкові події утворюють випадкові потоки та випадкові процеси.

Потік подій – послідовність подій, які відбуваються одна за одною в певному відрізку часу. Наприклад, відмови відновлюваного пристрої утворюють потік подій (потік відмов). Під дією потоку відмов і потоку відновлень технічний пристрій може перебувати в різних станах (повної відмови, часткової відмови, працездатний). Перехід вироби з одного стану в інше являє собою випадковий процес.

Випадкова величина – величина, яка в результаті досліду може прийняти те або інше значення, причому заздалегідь невідомо, яке саме. Випадкова величина може бути дискретною (число відмов за час t), або безперервною (час напрацювання елемента до відмови, час відновлення працездатності).

Закон розподілу випадкової величини – співвідношення, що встановлює зв'язок між значеннями випадкової величини та її імовірністю.

В теорії надійності за випадкову величину зазвичай приймають час роботи об’єкту. У цьому випадку функція густиниі розподілу $f(t)$ буде служити повною характеристикою розсіювання термінів служби елементів. Вид цієї функції залежить від закономірностей процесу втрати об’єктом працездатності.

В теорії надійності найбільше поширення одержали наступні закони розподілу випадкових величин $f(t)$:

для дискретних випадкових величин – біноміальний закон; закон Пуассона;

для неперервних випадкових величин – експоненціальний закон; нормальний закон; гамма-розподіл; закон Вейбулла та інші.

Час безвідмовної роботи елементів апарату є безперервна випадкова величина і для опису її роботи в теорії надійності використовують наступні закони розподілу: Вейбула, експоненціальний, Релея, нормальний та ін.

Розглянемо більш детально основні закони розподілу, що зустрічаються при розрахунках надійності та величини які вони описують.

Також визначимо в яким випадках варто застосовувати той чи інший закон розподілу.

2.2. Розподіл Вейбулла

Досвід експлуатації дуже багатьох електронних приладів і значної кількості електромеханічної апаратури показує, що для них характерні три види залежностей інтенсивності відмов від часу (рис. 2.1), що відповідають трьом періодам життя цих пристроїв.

Зазначені три види залежностей інтенсивності відмов від часу можна отримати, використовуючи для імовірнісного опису випадкового напрацювання до відмови двопараметричний розподіл Вейбулла. Згідно з цим розподілом функція густини розподілу

$$f(t) = \frac{b}{a}\left(\frac{t}{a}\right)^{b-1} e^{-(t/a)^b},$$

де a – параметр закону розподілу, b – параметр форми розподілу.

Знайдемо імовірність безвідмовної роботи з виразу

$$p(t) = 1 - \int_0^t f(\tau)d\tau = \int_0^\infty f(\tau)d\tau .$$

$$p(t) = 1 - \int_0^t f(\tau)d\tau = 1 - \int_0^t \frac{b}{a}\left(\frac{\tau}{a}\right)^{b-1} e^{-(\tau/a)^b} d\tau .$$

Проінтегруємо вираз, отримаємо імовірність безвідмовної роботи ($\lambda = 1/a$)

$$p(t) = e^{-(t/a)^b} = e^{-(\lambda t)^b} .$$

Використовуючи співвідношення

$$\lambda(t) = f(t)/p(t),$$

отримаємо інтенсивність відмов

$$\lambda(t)=\frac{b}{a}\left(\frac{t}{a}\right)^{b-1}.$$

Середнє напрацювання до відмови

$$T_0=\int_0^\infty p(t)dt\,,$$

$$T_0=\int_0^\infty t\frac{b}{a}\left(\frac{t}{a}\right)^{b-1}e^{-(t/a)^b}dt=a\Gamma\left(1+\frac{1}{b}\right),$$

де $a\Gamma\left(1+\frac{1}{b}\right)$ – табульована гамма-функція, визначається з довідник

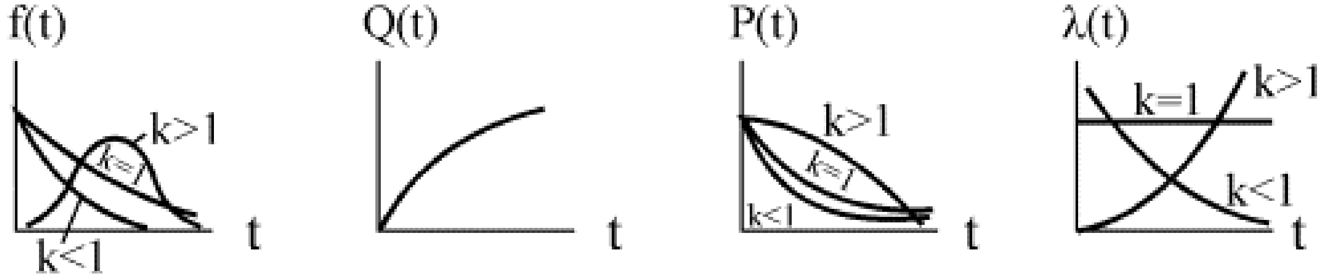

Рис. 2.1. Графіки основних параметрів надійності при розподілі Вейбулла

Відзначимо, що при параметрі b = 1 розподіл Вейбулла переходить в експоненціальний, а при b = 2 – в розподіл Релея.

Цьому закону добре підкоряються розподіли відмов в об'єктах, що містять велику кількість однотипових невідновлювальних елементів, особливо коли відмова пов'язана з погіршенням їх параметрів. Підходить для опису деяких типів електровакуумних, напівпровідникових і НВЧ-приладів. Розподіл Вейбулла підходить для описання відмов ряду механічних об'єктів. Цей закон застосуємо для відмов пристрою, що складається з послідовно з'єднаних дубльованих елементів і інших подібних випадків. Використовується для оцінки надійності виробів в період їх приробітку, а також при зносі і старінні.

2.3. Експоненціальний розподіл

Експоненціальний розподіл є частинним випадком розподілу Вейбулла, коли параметр форми b = 1. Цей розподіл однопараметричний, тобто для запису розрахункового виразу досить одного параметра, $\lambda = const$. Для цього закону вірно і зворотне твердження: якщо інтенсивність відмов постійна, то імовірність безвідмовної роботи як функція часу підпорядковується експоненціальному закону:

$$
\begin{aligned}
&f(t) = 1/a \cdot e^{-t/a} = \lambda e^{-\lambda t}\\
&p(t) = e^{-t/a} = e^{-\lambda t}\\
&\lambda(t) = 1/a = \lambda = const\\
&T_0 = a = 1/\lambda
\end{aligned}
$$

Таким чином, знаючи середній час безвідмовної роботи T (або постійну інтенсивність відмов), можна в разі експоненціального розподілу знайти імовірність безвідмовної роботи для інтервалу часу від моменту включення об'єкта до будь-якого заданого моменту t.

Даний розподіл (рис. 2.2.) описує напрацювання до відмови об’єктів, у яких у результаті здавальних випробувань (вихідного контролю) відсутній період припрацювання, а призначений ресурс встановлений до закінчення періоду нормальної експлуатації. Ці об’єкти можна віднести до «не старіючих», для них $\lambda(t) = \lambda = const$. Коло таких об’єктів широке: складні технічні системи з безліччю компонентів, засоби обчислювальної техніки, системи автоматичного регулювання і т.п.

Модель експоненціального розподілу часто використовується для апріорного аналізу, оскільки він дозволяє не дуже складними розрахунками отримати прості співвідношення для різних варіантів створюваної системи. На стадії апостеріорного аналізу (досвідчених даних) повинна проводитися перевірка відповідності експоненціальної моделі результатам випробувань.

Даний розподіл характерний для складних систем, які містять велику кількість різних невідновлювальних елементів, що мають переважно раптові відмови. Застосовується до відновлюваних об'єктів з найпростішим потоком відмов або для наближеної оцінки безвідмовності. На практиці цей закон логічно застосовувати в тому випадку, коли процеси старіння і зносу протікають достатньо повільно, тобто для періоду нормальної роботи виробу. Цей закон можна використовувати і в тих випадках, коли у виробах мають місце приховані дефекти, що призводять до раптових відмов.

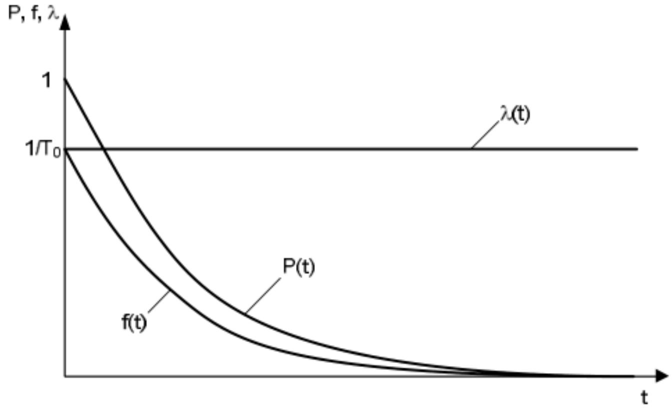

Рис. 2.2. Графіки зміни основних параметрів надійності при експоненціальному розподілі

2.4. Розподіл Релея

Розподіл Релея є частинним випадком розподілу Вейбулла, коли параметр форми b = 2. Основні параметри надійності за законом Релея мають наступний вигляд

$$f(t) = \frac{2t}{a^2} \cdot e^{-(t/a)^2} = 2t\lambda^2 e^{-(\lambda t)^2}$$

$$p(t) = e^{-(t/a)^2} = e^{-(\lambda t)^2}$$

$$\lambda(t) = 2t/a^2 = 2t\lambda^2 = const$$

$$T_0 = a\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda}$$

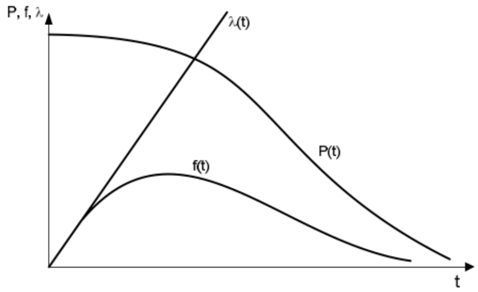

Рис. 2.3. Графіки зміни основних параметрів надійності при розподілі Релея

Розподіл Релея придатний для опису поведінки об’єктів яким характерне зношення або старіння, а зміна його основних характеристик наведена на рис. 2.3.

2.5. Нормальний та логарифмічно нормальний закони розподілу

Нормальний закон розподілу (розподіл Гауса) найчастіше зустрічається на практиці. Його використовують, коли випадкова величина залежить від великої кількості випадкових факторів, однорідних за своїм впливом, при цьому вплив кожного з них у порівнянні з усією їхньою сукупністю незначний.

Цим законом розподілу добре описуються результати незалежних вимірювань фізичних величин, а також користуються при оцінці надійності виробів в процесі їхнього зносу і, відповідно, старіння. Його використовують для визначення часу напрацювання до відмови.

Нормальний закон розподілу характеризується густиною імовірності

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t - t_{cp})^2}{2\sigma^2} \right),$$

де t_{cp} – математичне очікування часу появи першої відмови, σ – середньоквадратичное отклонение, σ^2 – дисперсія випадкових величин.

Формули для нормального закону розподілу часу безвідмовної роботи об’єкту:

$$p(t) = 0{,}5 - \Phi(U) = 0{,}5 - \Phi(\frac{t - t_{cp}}{\sigma})$$

$$\Phi(U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^U e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$f(t) = \frac{\Phi(U)}{\sigma}$$

$$\lambda(t) = \frac{\Phi(U)}{\sigma} \cdot \frac{1}{0{,}5 - \Phi(U)}$$

де Φ(U) – функція Лапласа, яка володіє наступними властивостями:

Φ(0) = 0;

Φ(– U) = – Φ(U);

t_{cp} – середнє значення випадкової величини *T*;

t^2 – дисперсія випадкової величини *T*.

Монотонне зростання інтенсивності відмов з плином часу (рис. 2.4.) – характерна ознака нормального розподілу. Нормальний розподіл істотно відрізняється від експоненціального.

Описує поведінку об'єктів яким типове зношення. Іноді описується час відновлення ремонтованих об'єктів і сумарне напрацювання до середнього ремонту.

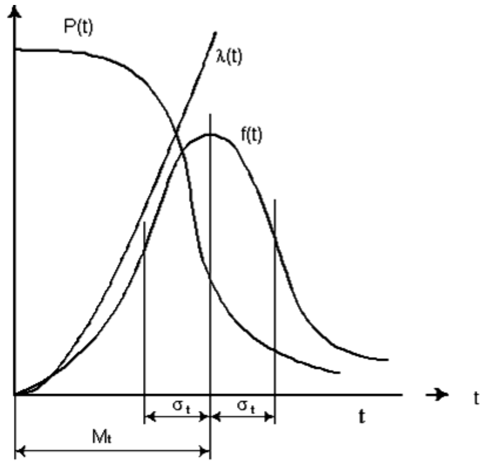

Рис. 2.4. Графіки зміни основних параметрів надійності при нормальному законі розподілу

Логарифмічно нормальний закон розподілу

Логарифмічно нормальний закон розподілу використовується при оцінці відмов через зношення в тих випадках, коли відмова виникає через пошкодження.

Показники надійності виробу при логарифмічно нормальному законі розподілу мають вид:

- функція розподілу:

$$f(t) = \frac{0.4343}{t\sigma}\phi\left(\frac{\lg t - \lg t_0}{\sigma}\right);$$

- імовірність безвідмовної роботи:

$$p(t) = \int_{-\infty}^{t}\phi\left(\frac{\lg t - \lg t_0}{\sigma}\right)dt;$$

- інтенсивність відмов:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{p(t)};$$

2.6. Гамма-розподіл

Гамма-розподіл використовується при оцінці надійності елементів і систем у початковий період експлуатації, при дослідженні надійності електромеханічних і механічних пристроїв, елементів високонадійної апаратури з інтенсивністю відмов, що зменшується в часі. Крім того, даний розподіл описує розподіл часу відмов систем, резервованих способом заміщення, якщо напрацювання на відмову основної та резервних систем підпорядковане показовому закону.

Випадкова величина напрацювання до відмови *T* має гамма-розподіл із параметрами λ (масштабний параметр) і δ (параметр форми), де λ, $\delta > 0$, причому δ – ціле число, якщо її щільність розподілу відмов описується виразом

$$f(t) = \frac{\lambda^{\delta} t^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)} \exp(-\lambda t),$$

де $\Gamma(\delta)=(\delta-1)!$ – гамма-функція Ейлера.

Вочевидь, при δ=1 вираз спрощується до вигляду, який відповідає експоненціальному розподілу.

Гамма-розподіл найкраще описує розподіл суми незалежних випадкових величин, кожна з яких розподілена за експоненціальним законом. Гамма-розподіл при цілих значеннях δ іноді називають розподілом Ерланга. Для такого розподілу ймовірність безвідмовної роботи на інтервалі (0, t) визначається так:

$$P(t) = \exp(-\lambda t) \sum_{i=0}^{\delta-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!}.$$

Щільність розподілу відмов:

$$f(t) = \lambda \frac{(\lambda t)^{\delta - 1}}{(\delta - 1)!} \exp(-\lambda t) \, .$$

Інтенсивність відмов:

$$\lambda(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{\delta - 1}}{(\delta - 1)! \sum_{i=0}^{\delta - 1} \frac{(\lambda t)^i}{i!}} \, .$$

Середнє напрацювання до відмови:

$$T = \delta / \lambda.$$

Прикладом використання гамма-розподілу є резервована система, що складається з δ однакових елементів. При цьому під навантаженням знаходиться один елемент. Інші елементи почергово автоматично включаються в роботу після відмови працюючого елемента.

Графіки зміни показників надійності при гамма-розподілі наведені на рис. 2.5.

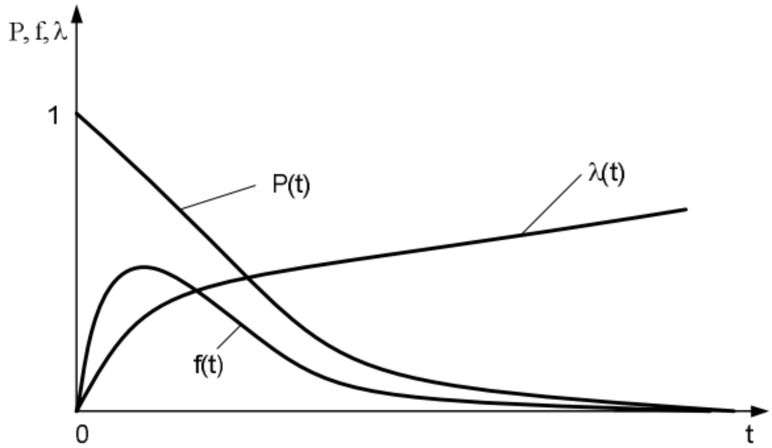

Рис. 2.5. Графіки зміни основних параметрів надійності при логарифмічному нормальному законі розподілу

Для опису характеристик надійності в широкому інтервалі часу експлуатації, що включає в себе періоди початкових відмов і старіння, використовуються композиції законів розподілів. Звичайно для початкового періоду експлуатації застосовують закони Вейбулла і гамма-розподіл, для періоду нормальної експлуатації – експоненціальний розподіл, а для періоду старіння – нормальний, логарифмічно нормальний або розподіл Релея.

В даному посібнику показані тільки найбільш поширені закони розподілу випадкової величини. Відомий цілий ряд законів, які так само використовуються при розрахунках надійності: біноміальний розподіл, χ-розподіл, розподіл Максвелла, розподіл Ерланга та інші.

Якщо згадати графік зміни інтенсивності відмов технічного об’єкту з часом, то можна визначити, що поведінка об'єктів на першій ділянці описується законом Вейбулла, на другій ділянці – експоненціальним розподілом, на третій ділянці – розподілом Релея. Оскільки основним етапом роботи приладу є етап нормальної експлуатації, яка показана на другій ділянці графіка, то основним законом розрахунку безвідмовності є експоненціальний закон розподілу.

2.7. Біномінальний розподіл дискретних випадкових величин

Наведені вище розподіли характеризують неперервні випадкові величини, наприклад, час безвідмовної роботи або час відновлення. Але в ряді випадків при розрахунку надійності ТО виникає необхідність оцінки дискретних випадкових величин, наприклад, кількості відмов протягом заданого інтервалу часу.

Тому розглянемо закони розподілу які найбільш часто використовують при розрахунках надійності дискретних випадкових величин.

Для такого розподілу можливі значення випадкової величини 0, 1, 2, 3, …, n. Імовірність появи m сприятливих подій із загальної кількості n подій дорівнює

$$P_n(m) = C_n^m P^m (1-P)^{n-m}$$

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

При перевірці виконання умови нормування використовується формула біному Ньютона, тому закон розподілу називають біноміальним

$$\sum_{m=0}^{n} P_m \quad = \sum_{m=0}^{n} C_n^m P^m (1-P)^{n-m}$$

Функція розподілу:

$$F(t) = \begin{cases} 0, t \le 0, \\ \sum_{m=0}^{n} C_n^m P^m Q^{n-m}, t \in [0, n], \\ 1, t > 0. \end{cases}$$

Математичне сподівання і дисперсія відповідно дорівнюють:

$$M(m) = n \cdot P$$

$$\sigma_T^2(m) = n \cdot P \cdot Q$$

де P – ймовірність здійснення події при одноразовому випробуванні.

2.8. Розподіл Пуассона дискретних випадкових величин

Розподіл Пуассона зустрічається в задачах при повторних випробовуваннях, в яких ѕмовірність очікуваної події дуже мала. Це закон рідкісних подій. В техніці цей розподіл використовується при визначенні числа телефонних дзвінків в одиницю часу, числа рідкісних компонентів на одиницю площі або об'єму, числа дефектів металізації на новій друкованій платі, числа атмосферних завад при радіоприйманні, числа поломки нових ТЗ під час їх експлуатації тощо. А також коли ми маємо справу із числом подій, що з'являються на проміжку часу. Наприклад, число поломок надійного технічного пристрою за певний період часу, наприклад, за місяць.

Можливі значення випадкової величини для такого розподілу 0, 1, 2, …, n. Імовірність появи m подій дорівнює

$$P_m = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

Математичне сподівання і дисперсія відповідно дорівнюють:

$$M(m) = \lambda,$$

$$\sigma_T^2(m) = \lambda,$$

де λ – параметр розподілення.

Функція розподілу (рис. 2.6.):

$$F(t) = \begin{cases} 0, t \le 0, \\ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, t > 0 \end{cases}$$

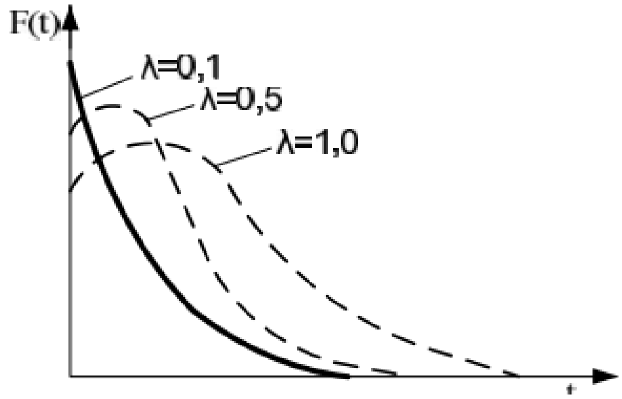

Рис. 2.6. Розподіл Пуассона

Про вибір закону розподілу відмов при розрахунку надійності

Визначення закону розподілу відмов має велике значення при дослідженнях і оцінках надійності.

Закон розподілу відмов можна визначити за експериментальними даними, але для цього необхідно проведення великого числа дослідів в ідентичних умовах. Практично ці умови, як правило, важко забезпечити. Крім того, таке рішення містить риси пасивної реєстрації подій.

Разом з тим у багатьох випадках за час експлуатації встигає відмовити лише незначна частка об'єктів. Більш раціонально – вивчення умов, фізичних процесів при яких виникає той чи інший розподіл. При цьому складаються моделі виникнення відмов і відповідні їм закони розподілу часу до появи відмови, що дозволяє робити обґрунтовані припущення про закон розподілу.

Такий підхід необхідний для оцінки надійності нових виробів, для яких статистичний матеріал дуже обмежений.