Практична робота

Задача 1

РОЗРАХУНОК ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ КЛАСИЧНИМ МЕТОДОМ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

Процес переходу від одного встановленого режиму до другого, відмінного від першого, називають перехідним. Перехідним процесом називається зміна параметрів, зовнішніх впливів або структурної схеми кола, що в загальному випадку в електроніці прийнято називати комутацією. Зазвичай вважають, що комутація в колі відбувається миттєво в момент часу t=0. Для переходу ж від початкового режиму роботи до наступного потребує певного часу, так як не можливі миттєві зміни енергії, збереженої електромагнітному полі кола.

Оскільки енергія електромагнітного поля не може змінюватись миттєво, стрибком, то не можуть змінюватись стрибком струм в індуктивності і напруга на ємності, тому що величина енергії магнітного поля катушкі визначається виразом $W_м = \frac{Li^2}{2}$, а величина енергії електричного поля конденсатора - $W_e = \frac{Cu^2}{2}$.В зв'язку з цим можна сформулювати два закони комутації:

1. Струм в індуктивності в перший момент після комутації залишається таким же, таким як він був безпосередньо перед комутацією:
$$i_l(0_+) = i_l(0_-).$$
2. Напруга на ємності в перший момент після комутації залишається такою же , як і був безпосередньо перед комутацією:
$$u_c(0_+) = u_c(0_-).$$

Розрахунок перехідних процесів класичним методом зводиться до розв'язання лінійного диференційного рівняння , яке описує електромагнітні процеси в колі. Для складання диференційного рівняння необхідно спочатку записати рівняння для миттєвих значень змінних /струмів або напруг/ за законами Кірхгофа для після комутаційного стану кола. З цієї системи рівнянь можна получити одне рівняння відносно однієї змінної/ краще для тієї , для якої справедливий закон комутації i_l, U_c

Якщо коло містить два незалежних реактивних елемента /накопичувачі енергії/ , то електромагнітні процеси в колі описуються диференціальним рівнянням другого порядку виду

$$a\frac{d^2 i_l}{dt^2} + b\frac{di_l}{dt} + ci_l = f(t).$$

/замість змінної i_l в рівнянні може бути змінна U_c/.

Тут a, b, c - коефіцієнти, залежні від параметрів кола; $f(t)$ - функція часу, залежна як від параметрів кола, так і від прикладеної напруги. Якщо прикладена напруга постійна, то і $f(t)$ не залежить від часу.

Рішення такого рівняння складається з двох частин – примусової та вільної складових:

$$i_l = i_{пр} + i_{віл}$$

Примусова складова залежить від зовнішнього впливу і від параметрів кола і являється сталим значенням змінної нового режиму, тому ця величина визначається з розрахунку усталеного режиму після комутації. При постійній приложеній напрузі вона також постійна: $i_{l\ ср} = I_{уст}$.

Вільну складову записують в залежності від коренів характеристичного рівняння

$$ap^2 + bp + c = 0$$

другого порядку, то його корені

$$p_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

можуть бути:

а) дійсними різними p_1, p_2, якщо $b^2 > 4ac$;

б) дійсними рівними $p_1 = p_2 = p$, якщо $b^2 = 4ac$;

в) комплексно спряженими $p_{1,2} = -b \pm jw_0$, якщо $b^2 < 4ac$.

Вільна складова записується відповідно:

а) $i_{l\ віл} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$;

б) $i_{l\ віл} = (A_1 + tA_2)e^{pt}$;

в) $i_{l\ віл} = e^{-\delta t}(A_1 sin\ w_0 t + A_2 cos\ w_0 t)$;

де A_1, A_2 - постійні інтегрування.

Для визначення сталих інтегрування A_1, A_2 потрібно використати незалежні початкові умови, тобто значення струмів в індуктивностях або напруг на ємкостях при $t = 0_+$, які визначаються за законами комутації. Незалежні початкові умови можна знайти з розрахунків встановленого режиму кола до комутації.

Якщо, наприклад, загальне рішення диференційного рівняння записати так:

$$i_l = I_{вст} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t},$$

а незалежні початкові умови

$$i_l(0_+) = i_l(0_-) = I_0,$$

де I_0 - струм в індуктивності до комутації, то отримаємо одне рівняння для визначення сталих інтегрування.

$$I_0 = I_{вст} + A_1 + A_2$$

Для знаходження ще одного рівняння потрібно прийняти друге незалежну початкову умову. Якщо в схемі другий реактивний елемент – ємність, то використовуючи вихідну систему рівнянь, потрібно визначити напругу на ємність через струм в індуктивності, тобто виразити цю напругу через шукані постійні інтеграції:

$$u_c = f_1(i_L) = f_1(I_{вст} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t})$$

Так як $u_c(0_+) = u_c(0_-) = U_0$, де U_0 – значення напруги на ємності до комутації, то друге рівняння для визначення коефіцієнтів A_1 та A_2

$$U_0 = f_1(I_{вст} + A_1 + A_2).$$

Потрібно мати на увазі, що $I_о$ та U_o можуть бути рівні нулю.

Якщо другий реактивний елемент в ланцюгу індуктивності, то струм другої індуктивності виражається струмом першої індуктивності.

ПРИКЛАД. Визначити струми перехідного режиму в всіх гілках схеми /рис.2/ та напруги на індуктивності та ємності при замкненні ключа К. Параметри схеми: $r_1 = 20$ Ом; $r_2 = 38$ Ом; $r_3 = 87$ Ом; $L = 0{,}25$ Г; $C = 100$мкФ; $U = 290$В.

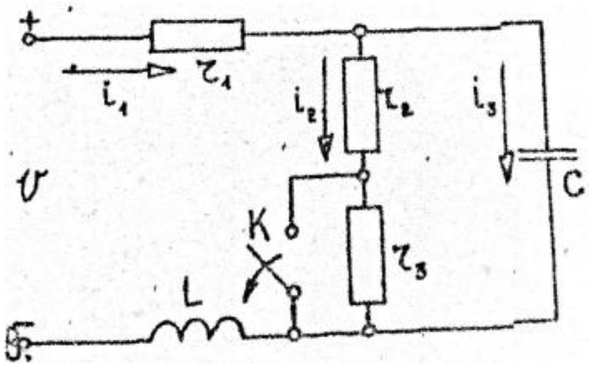

Рис. 2

РОЗВ'ЯЗОК. Вибираємо позитивні напрямки струмів в гілках та складаємо рівняння по законам Кірхгофа для після комунікаційного стану ланцюга:

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= i_2 + i_3; \\ U &= r_1 i_1 + (r_2 + r_3) i_2 + L\frac{di_1}{dt}; \\ (r_2 + r_3) i_2 &= u_c; \\ i_3 &= C\frac{du_c}{dt}. \end{aligned}\right\} \qquad /1/$$

Із цієї системи рівнянь, виключаємо всі невідомі, крім однієї, наприкладu_c, отримаємо лінійне диференційне рівняння з одним невідомим. Для цього виразимо невідомі i_1, i_2, i_3 через u_c. Струм i_3 виразимо через u_c останнім рівнянням системи. Із третього рівняння системи

$$i_2 = \frac{u_c}{r_2 + r_3}. \qquad /2/$$

Підставив значення струмів i_1та i_2 в перше рівняння /i/, отримаємо

$$i_1 = \frac{u_c}{r_2 + r_3} + C\frac{du_c}{dt}. \qquad /3/$$

Замінивши струми їх значеннями через u_c в другому рівнянні системи, отримаємо

$$U = r_1\left(\frac{u_c}{r_2 + r_3} + C\frac{du_c}{dt}\right) + (r_2 + r_3)\frac{u_c}{r_2 + r_3} + L\frac{d\left(\frac{u_c}{r_2 + r_3} + C\frac{du_c}{dt}\right)}{dt},$$

Або

$$\frac{r_1}{r_2+r_3}u_c + r_1C\frac{du_c}{dt} + u_c + \frac{L}{r_2+r_3}\frac{du_c}{dt} + LC\frac{d^2u_c}{dt^2} = U.$$

Після перетворення

$$LC\frac{d^2u_c}{dt^2} + \left(\frac{L}{r_2+r_3} + r_1C\right)\frac{du_c}{dt} + \left(1 + \frac{r_1}{r_2+r_3}\right)u_c = U. \qquad /4/$$

Таким чином, знаходження напруги u_c зводиться до рішення неоднорідного диференційного рівняння другого порядку. Спільне рішення цього рівняння записуємо в вигляді двох складових /примусової та вільної/:

$$u_c = u_{c_{\text{пр}}} + u_{c_{\text{вл}}}.$$

Примусову складову визначаємо із розрахунку нового встановленого режиму, тобто при розімкнутому ключі. В цьому режимі в ланцюгу протікає постійний струм, який не проходить через ємність, тому

$$I_{1\,\text{вст}} = I_{2\text{вст}} = \frac{U}{r_1+r_2+r_3}.$$

Напруга на ємності в встановленому режимі рівна напрузі в опорах r_2 та r_3, тобто

$$u_{C\,\text{пр}} = \frac{U(r_2+r_3)}{r_1+r_2+r_3} = 250\ B.$$

Вільну складову записують в залежності від виду коренів характеристичного рівняння:

$$LCp^2 + \left(\frac{L}{r_2+r_3} + r_1C\right)p + 1 + \frac{r_1}{r_2+r_3} = 0,$$

Або

$$0{,}25\cdot10^{-4}p^2 + 4\cdot10^{-3}p + 1{,}16 = 0$$

Корні рівняння

$$p_1 = -80 + j200; \quad p_2 = -80 - j200.$$

Так як корні характеристичного рівняння - з’єднанні комплексні, то вільна складова

$$u_{c_{\text{вл}}} = e^{-\delta t}(A_1 sin\, w_0 t + A_2 cos\, w_0 t)$$

де $\delta = 80,\ \omega_0 = 200.$

Спільний вираз для напруги на ємності

$$u_{c_{\text{вл}}} = 250 + e^{-80t}(A_1 sin200t + A_2 cos200t). \qquad /5/$$

Для визначення постійного інтегрування використаємо початкові умови. Згідно законам комутації

$$u_c(0_+) = u_c(0_-); \quad i_L(0_+) = i_L(0_-).$$

Тому знаходимо напругу на ємність і струм в індуктивності до комутації, тобто при замкнутому ключі:

$$i_L(0_-) = i_1(0_-) = \frac{U}{r_1 + r_2} = 5\ A;$$

$$u_c(0_-) = \frac{U}{r_1 + r_2}\ r_2 = 190\ B.$$

Підставив значення u_c та $t = 0$ в рівняння /5/, отримаємо

$$190 = 250 + A_2$$

Звідси

$$A_2 = -60.$$

Для знаходження A_1 використовуємо другу початкову умову $i_L(O_+)$, для чого виразимо струм i_1 через постійні інтеграції A_1та A_2. Підставивши рівняння /5/ в формулу /3/ отримаємо

$$i_1 = \frac{250}{r_2 + r_3} + \frac{e^{-80t}(A_1 sin200t + A_2 cos200t)}{r_2^0 + r_3} +$$
$$+C\frac{d[250 + e^{-80t}(A_1 sin200t + A_2 cos200t)]}{dt}.$$

Після підстановки числових значень і деяких перетворень

Підставляючи початкову умову, маємо

$$5 = 2 + 0{,}02A_1.$$

Звідси

$$A_1 = 150.$$

Таким чином

$$u_c = [250 + e^{-80t}(150 sin200t - 60 cos200t)]\ \text{В}.$$

Знаючи u_c , струми в гілках визначають за виразом $/1/-/3/$:

$$i_1 = [2 + e^{-80t}(1{,}2 sin200t + 3 cos200t)]\ \text{А};$$

$$i_2 = [2 + e^{-80t}(1{,}2 sin200t + 3 cos200t)]\ \text{А};$$

$$i_3 = 3{,}48e^{-80t} cos200t\ \text{А}.$$

Відомо що

$$asin\omega t + bcos\omega t = A\sin(\omega t + \gamma),$$

де

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad tg\gamma = \frac{b}{a}$$

Тому

$$u_c = [250 + 162e^{-80t} sin(200t - 21°50')] \text{ В};$$

$$i_1 = [2 + 3{,}23e^{-80t} sin(200t + 68°10')] \text{ А};$$

$$i_2 = [2 + 1{,}29e^{-80t} sin(200t + 21°50')] \text{ А};$$

$$i_3 = 3{,}48e^{-80t} sin(200t + 90°) \text{ А};$$

Напруга на індуктивності

$$u_L = L\frac{di_1}{dt} = 174e^{-80t} sin(200t + 180°)\, B.$$

Задача 2

РОЗРАХУНОК ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ ОПЕРАТОРНИМ МЕТОДОМ

В задачі 1 визначити всі струми та напруги на реактивних елементах операторним методом.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

Використання оперативного методу дозволяє звести систему диференційних рівнянь до системи алгебраїчних рівнянь, а початкові умови враховувати безпосередньо при складанні операторних рівнянь.

Операторний метод створений на використанні перетворення Лапласа. Функція часу $f(t)$, називаємо оригіналом, заміняється деякою функцією $F(\mathrm{p})$ комплексної змінної $\mathrm{p} = \delta + j\omega_o$, функція $F(\mathrm{p})$ називається зображенням оригіналу $f(t)$, котра визначається з допомогою інтеграла Лапласа:

$$F(\mathrm{p}) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-\mathrm{p}t} dt.$$

Відповідність оригіналу та зображення зазвичай записують у вигляді

$$f(t) \risingdotseq F(\mathrm{p}).$$

Операції диференціювання та інтегрування оригіналу заміняють алгебраїчними операціями над зображеннями, так як

$$\frac{df(t)}{dt} \risingdotseq \mathrm{p}F(\mathrm{p}) - f(0),$$

а

$$\varphi(t) = \int f(t)dt \risingdotseq \frac{F(\text{p})}{\text{p}s} + \frac{\varphi(0)}{\text{p}},$$

де $f(0)$ – значення функції $f(t)$ при $t = O_+$;

$\varphi(0)$ – значення функції $\varphi(t)$ при $t = O_+$.

При рішенні системи операторних алгебраїчних рівнянь зображення невідомої функції звичайно отримують у вигляді

$$X(\text{p}) = \frac{y(\text{p})}{H(\text{p})} \ ,$$

де $y(\text{p}), H(\text{p})$ – поліноми від s, степені яких рівні відповідно m та n, причому $m < n$.

Для знаходження оригінала функції $x(t)$ по його зображенню $X(\text{p})$зручно прийняти формулу розпаду

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{y(\text{p}_k)}{H'(\text{p}_k)} e^{\text{p}_k t},$$

де p_k – корені знаменника $H(\text{p})$;

n – число коренів знаменника;

$y(\text{p}_k)$– значення функції $y(\text{p})$ при $\text{p} = \text{p}_k$,

$H'(\text{p}_k)$ –значення похідної функції $H(\text{p})$ по p при p $\text{p} = \text{p}_k$.

ПРИКЛАД 2. Розрахувати перехідний процес в схемі прикладу 2 операторним методом.

РОЗВ'ЯЗОК . Запишемо ще раз систему рівнянь, складеною по законам Кірхгофа:

$$i_1 = i_2 + i_3;$$
$$U = r_1 i_1 + (r_2 + r_3)i_2 + L\frac{di_1}{dt};$$
$$(r_2 + r_3)i_2 = u_c;$$
$$i_3 = C\frac{du_c}{dt}.$$

Враховуючи, що $i_1(t) \risingdotseq I_1(\text{p}), i_2(t) \risingdotseq I_2(\text{p}), i_3(t) \risingdotseq I_3(\text{p}), U_c(t) \risingdotseq U_c(\text{p})$ перепишемо цю систему в операторній формі :

$$I_1(\text{p}) = I_2(\text{p}) + I_3(\text{p});$$
$$\frac{U}{s} = r_1 I_1(\text{p}) + (r_2 + r_3)I_2(\text{p}) + L[\text{p}\, I_1(\text{p}) - i_1(0)];$$
$$(r_2 + r_3)I_2(\text{p}) = U_c(3);$$
$$I_3(\text{p}) = C[\text{p}\, U_c(\text{p}) - U_c(0)].$$

Замість диференційних рівнянь отримали алгебраїчне. Вирішуємо отриману систему відносно однієї невідомої, наприклад $v_c(\text{p})$:

$$U_c(\mathrm{p}) = \frac{CLu_c(0)\mathrm{p}^2 + [Li_1(0) + r_1Cu_c(0)]\mathrm{p} + U}{\mathrm{p}\left[LC\mathrm{p}^2 + \left(\frac{L}{r_2 + r_3} + r_1C\right)\mathrm{p} + \left(1 + \frac{r_1}{r_2 + r_3}\right)\right]},$$

де $i_1(0), u_c(0)$ – початкові умови.

Після підстановки числових значень

$$U_c(\mathrm{p}) = \frac{4{,}75\cdot10^{-3}\mathrm{p}^2 + 1{,}63\mathrm{p} + 290}{\mathrm{p}(2{,}5\cdot10^{-5}\mathrm{p}^2 + 4\cdot10^{-3}\mathrm{p} + 1{,}16)}$$

Для знаходження оригіналу функції $v_c(\mathrm{p})$ використовуємо формулу розкладу. Тоді

$$y(\mathrm{p}) = 4{,}75\cdot10^{-3}\mathrm{p}^2 + 1{,}63\mathrm{p} + 290;$$

$$H(\mathrm{p}) = \mathrm{p}(2{,}5\cdot10^{-5}\mathrm{p}^2 + 4\cdot10^{-3}\mathrm{p} + 1{,}16).$$

Прирівнюючи знаменник нулю, знаходимо його корні:

$$\mathrm{p}_1 = 0,\ \mathrm{p}_2 = -80 + j200,\ \mathrm{p}_3 = -80 - j200.$$

Так як знаменник має три корні, сума в формулі розпаду складає із трьох складових ($n = 3$):

$$u_c(t) = \frac{y(\mathrm{p}_1)}{H'(\mathrm{p}_1)}e^{\mathrm{p}_1t} + \frac{y(\mathrm{p}_2)}{H'(\mathrm{p}_2)}e^{\mathrm{p}_2t} + \frac{y(\mathrm{p}_3)}{H'(\mathrm{p}_3)}e^{\mathrm{p}_3t}.$$

Найдемо чисельник складових:

$$y(\mathrm{p}_1) = 4{,}75\cdot10^{-3}\mathrm{p}_1^2 + 1{,}63\mathrm{p}_1 + 290 = 290;$$
$$y(\mathrm{p}_2) = 4{,}75\cdot10^{-3}\mathrm{p}_2^2 + 1{,}63\mathrm{p}_2 + 290 = j174;$$
$$y(\mathrm{p}_3) = 4{,}75\cdot10^{-3}\mathrm{p}_3^2 + 1{,}63\mathrm{p}_3 + 290 = -j174.$$

Похідна знаменника

$$H'(\mathrm{p}) = (2{,}5\cdot10^{-5}\mathrm{p}^2 + 4\cdot10^{-3}\mathrm{p} + 1{,}16) + \mathrm{p}(5\cdot10^{-5}\mathrm{p} + 4\cdot10^{-3}),$$

тому

$$H'(\mathrm{p}_1) = 1{,}16;$$
$$H'(\mathrm{p}_2) = -2 - j0{,}8;$$
$$H'(\mathrm{p}_3) = -2 + j0{,}8.$$

Підставивши отримані значення в виразі для $u_c(t)$ маємо

$$u_c(t) = 250 + \frac{j174}{-2 - j0{,}8}e^{(-80+j200)t} + \frac{j174}{-2 - j0{,}8}e^{(-80-j200)t},$$

або

$$u_c(t) = 250 + 81e^{-j111°50'}e^{(-80+j200)t} + 81e^{-j111°50'}e^{(-80-j200)t} =$$

$$= 250 + 81e^{-80t}e^{j(200t-111°50')} + 81e^{-80t}e^{j(200t-111°50')}.$$

Замінимо показникові функції від матеріального аргументу тригонометричним, тоді

$$u_c(t) = 250 + 81e^{-80t}[\cos(200t - 111°50') + j\sin(200t - 111°50') +$$

$$+ \cos(200t - 111°50') - j\sin(200t - 111°50')] =$$

$$= 250 + 162e^{-80t}\cos(200t - 111°50'),$$

або

$$u_c(t) = [250 + 162e^{-80t}\sin(200t - 21°50')] \quad \text{В.}$$

Інші шукаючі величини визначаються аналогічно.