

КОЛА З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

ПЕРВИННІ ПАРАМЕТРИ ТА ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ ОДНОРІДНОЇ ЛІНІЇ

У колах із зосередженими параметрами струми та напруги $i(t)$, $u(t)$ є функціями однієї змінної t . У колах з розподіленими параметрами струми та напруги є функціями двох змінних t, x , тобто: $i(t, x)$, $u(t, x)$. Спочатку теорія таких кіл була розроблена для ліній електропостачання та ліній зв'язку, тому кола з розподіленими параметрами ще називають довгими лініями. Якщо параметри вздовж лінії не змінюються, то вона називається однорідною.

Розглянемо елемент лінії dx (рис. 9.1):

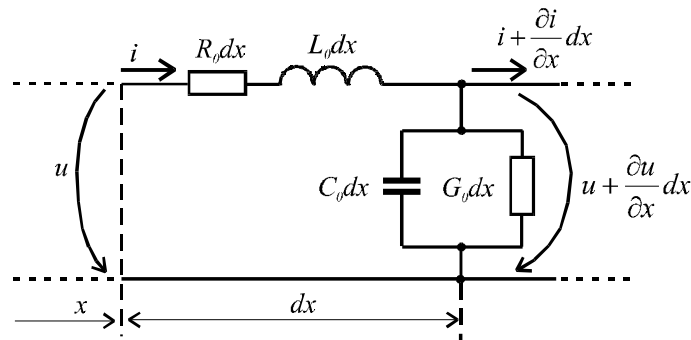


Рис. 9.1

Первинні параметри:

R_0 - активний опір двох дротів на одиницю довжини, Ом/м;

L_0 - індуктивність двох дротів на одиницю довжини, Гн/м;

G_0 - провідність між двома дротами на одиницю довжини, См/м;

C_0 - ємність між двома дротами на одиницю довжини, Ф/м.

Величини R_0 , L_0 називаються повздовжніми параметрами, а G_0 , C_0 - поперечними параметрами.

Зміна напруги зумовлена повздовжніми параметрами, а зміна струму – поперечними. Рівняння для спадів напруг і струмів (при нехтуванні величинами другого порядку малості) мають вигляд:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} dx = R_0 dx i + L_0 dx \frac{\partial i}{\partial t}; \quad -\frac{\partial i}{\partial x} dx = G_0 dx u + C_0 dx \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Після скорочення на dx отримаємо рівняння довгої лінії (або телеграфні рівняння):

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}; \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (9.1)$$

СИНУСОЇДАЛЬНИЙ РЕЖИМ ОДНОРІДНОЇ ЛІНІЇ

Відомо, що синусоїди струму та напруги мають комплексні зображення $i(t) \rightarrow \underline{I}$, $u(t) \rightarrow \underline{U}$. Змінна t в комплексні зображення не входить, тоді можна перейти від часткових похідних до звичайних, і рівняння (9.1) приймуть вигляд:

$$-\frac{d\underline{U}}{dx} = R_0 \underline{I} + j\omega L_0 \underline{I} = \underline{Z}_0 \underline{I}; \quad (9.2)$$

$$-\frac{d\underline{I}}{dx} = G_0 \underline{U} + j\omega C_0 \underline{U} = \underline{Y}_0 \underline{U}, \quad (9.3)$$

де $\underline{Z}_0 = R_0 + j\omega L_0$ - комплекс повздожнього опору;

$\underline{Y}_0 = G_0 + j\omega C_0$ - комплекс поперечної провідності.

З (9.2) та (9.3) отримаємо рівняння відносно \underline{U} . Для цього виразимо \underline{I} з (9.2): $\underline{I} = -\frac{1}{\underline{Z}_0} \frac{d\underline{U}}{dx}$ та підставимо його в (9.3)

$$\frac{1}{\underline{Z}_0} \frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} = \underline{Y}_0 \underline{U}, \quad \text{або} \quad \frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} - \underline{Z}_0 \underline{Y}_0 \underline{U} = 0 \quad (9.4)$$

Рівняння (9.4) є однорідним диференціальним рівнянням, його розв'язком є

$$\underline{U} = \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x}, \quad (9.5)$$

де $\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \alpha + j\beta$ - коефіцієнт розповсюдження;

α - коефіцієнт затухання, 1/м; β - коефіцієнт фази, рад/м.

Корені характеристичного рівняння $p^2 - \underline{\gamma}^2 = 0$ є

$$p_1 = -\underline{\gamma}, \quad p_2 = \underline{\gamma}.$$

Рівняння (9.5) описує розподіл напруги вздовж лінії. Після його підстановки в (9.2) отримаємо рівняння для струму

$$\underline{I} = -\frac{1}{\underline{Z}_0} \frac{d\underline{U}}{dx} = \frac{\underline{\gamma}}{\underline{Z}_0} (\underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} - \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x}), \quad (9.6)$$

$$\text{де} \quad \frac{\underline{\gamma}}{\underline{Z}_0} = \frac{1}{\underline{Z}_0} = \frac{1}{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{\gamma}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}}} = \frac{1}{\underline{Z}_C};$$

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \underline{Z}_C e^{j\theta} - \text{хвильовий опір.} \quad (9.7)$$

Для більшості повітряних ліній хвильовий опір знаходиться в межах 400 ± 100 Ом, а для кабельних – 50, 75, 100 (150) Ом. Параметри \underline{Z}_C та $\underline{\gamma}$ називаються вторинними параметрами лінії.

$$\text{Підставимо вираз } \underline{Z}_C \text{ в (9.6): } \underline{I} = \frac{1}{\underline{Z}_C} (\underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} - \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x}). \quad (9.8)$$

Визначимо постійні інтегрування \underline{A}_1 та \underline{A}_2 .

У випадку, коли відомі напруга ($\underline{U} = \underline{U}_1$) та струм ($\underline{I} = \underline{I}_1$) на початку лінії ($x = 0$), використаємо (9.5) та (9.8):

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}_1 + \underline{A}_2 \\ \underline{I}_1 &= \frac{1}{\underline{Z}_C} (\underline{A}_1 - \underline{A}_2) \end{aligned} \right\} \rightarrow \underline{A}_{1,2} = \frac{\underline{U}_1 \pm \underline{I}_1 \underline{Z}_C}{2}. \quad (9.9)$$

Якщо задані напруга ($\underline{U} = \underline{U}_2$) та струм ($\underline{I} = \underline{I}_2$) в кінці лінії, то відлік x краще вести від кінця лінії в протилежному напрямку. Для цього в рівняннях (9.2) та (9.3) слід замінити x на $-x$, і рівняння (9.5) та (9.8) приймуть вигляд:

$$\underline{U} = \underline{A}_3 e^{\underline{\gamma}x} + \underline{A}_4 e^{-\underline{\gamma}x}; \quad (9.5,a)$$

$$\underline{I} = \frac{1}{\underline{Z}_C} (\underline{A}_3 e^{\underline{\gamma}x} - \underline{A}_4 e^{-\underline{\gamma}x}), \quad (9.8,a)$$

При $x = 0$ маємо:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_2 &= \underline{A}_3 + \underline{A}_4 \\ \underline{I}_2 &= \frac{1}{\underline{Z}_C} (\underline{A}_3 - \underline{A}_4) \end{aligned} \right\} \rightarrow \underline{A}_{3,4} = \frac{\underline{U}_2 \pm \underline{I}_2 \underline{Z}_C}{2}. \quad (9.10)$$

Отже, ми отримали рівняння, що описують розподіл комплексів напруг та струмів у будь-якій точці лінії.

Примітка. Іноді координати зворотного напрямку позначаються y , але зручніше використовувати одне позначення відстані - x , а залежно від початкових умов (задані $\underline{U}_1, \underline{I}_1$ чи $\underline{U}_2, \underline{I}_2$) будемо бачити, звідки ведеться відлік відстані.

БІЖУЧІ ХВИЛІ В ЛІНІЇ

Ще раз розглянемо рівняння (9.5). У ньому коефіцієнти \underline{A}_1 та \underline{A}_2 - це суть напруги. Позначимо їх \underline{U}_Π та \underline{U}_3 відповідно, тоді діюче значення напруги у будь-якій точці лінії можна визначити з рівняння

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{A}_1 e^{-\gamma x} + \underline{A}_2 e^{\gamma x} = \underline{U}_\Pi e^{-\gamma x} + \underline{U}_3 e^{\gamma x} = \\ &= \underline{U}_\Pi e^{j\Psi_\Pi} \cdot e^{-\alpha x} \cdot e^{-\beta x} + \underline{U}_3 e^{j\Psi_3} \cdot e^{\alpha x} \cdot e^{\beta x}, \end{aligned} \quad (9.11)$$

а миттєве значення цієї напруги

$$u = \sqrt{2} U_\Pi e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \Psi_\Pi - \beta x) + \sqrt{2} U_3 e^{\alpha x} \sin(\omega t + \Psi_3 + \beta x) = u_\Pi + u_3. \quad (9.12)$$

Перша складова $u_\Pi = \sqrt{2} U_\Pi e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \Psi_\Pi - \beta x)$ - це є біжуча в прямому напрямку хвиля із згасаючою амплітудою. Згасання характеризується коефіцієнтом α . Коефіцієнт β характеризує зміну фази хвилі у функції x . Побудуємо графіки $u = f(x)$ для часу t_1 та $t_2 > t_1$ (рис. 9.2.). Бачимо, що при $t = t_2$ хвиля змістилася вправо.

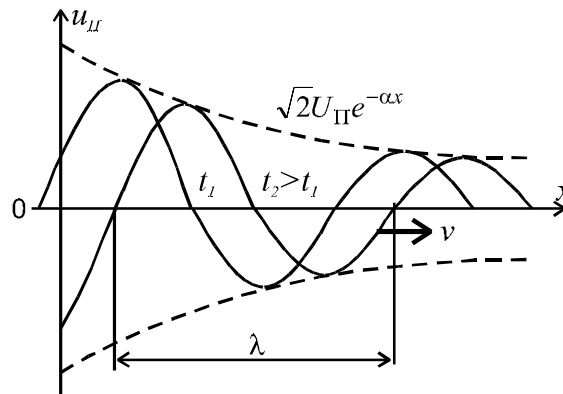


Рис. 9.2

Для визначення швидкості розповсюдження хвилі будемо вважати фазу коливань $(\omega t + \Psi_\Pi - \beta x)$ незмінною, що справедливо для спостерігача, який рухається зі швидкістю хвилі. Тоді

$$\frac{d}{dt} (\omega t + \Psi_\Pi - \beta x) = 0 \Rightarrow \omega - \beta \frac{dx}{dt} = 0,$$

а враховуючи, що $\frac{dx}{dt} = v$ є швидкість розповсюдження хвилі, отримаємо $\omega - \beta v = 0 \Rightarrow v = \frac{\omega}{\beta}$.

(9.13)

Аналогічно можна показати, що складова

$$u_3 = \sqrt{2} U_3 e^{\alpha x} \sin(\omega t + \Psi_\Pi + \beta x)$$

описує зворотну хвилю (рис. 9.3), яка розповсюджується від кінця лінії до її початку. Швидкість хвилі $v = -\frac{\omega}{\beta}$, а амплітуда хвилі згасає в міру віддалення від кінця лінії.

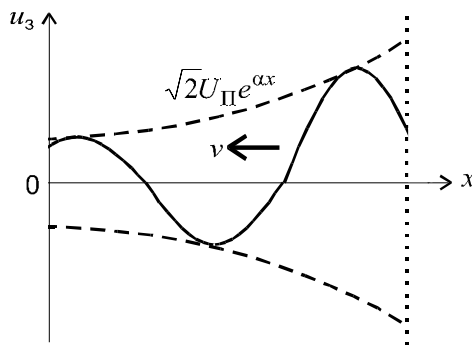


Рис. 9.3

Таким чином, миттєве значення напруги у будь якій точці лінії визначається сумою миттєвих значень напруг прямої та зворотної хвиль.

Відстань між двома точками лінії для однієї хвилі, фаза в яких відрізняється на 2π , є довжина хвилі λ .

Отримаємо формулу для визначення λ з рівняння

$$(\omega t + \Psi_{II} - \beta x) - [\omega t + \Psi_{II} - \beta(x + \lambda)] = 2\pi, \text{ звідки}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}. \quad (9.14)$$

З урахуванням (9.14) швидкість розповсюдження хвилі можна визначити, як $v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega\lambda}{2\pi} = f \cdot \lambda$.

Тоді довжину хвилі можна визначити як $\lambda = \frac{v}{f}$. Лінія вважається довгою, якщо її довжина порівнянна з довжиною хвилі.

Для повітряної лінії швидкість розповсюдження хвилі приблизно рівна швидкості світла $v = \frac{\omega}{\beta} \approx c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

При частоті $f = 50$ Гц довжина хвилі становить

$$\lambda = \frac{v}{f} \approx \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{50} = 6 \cdot 10^6 \text{ м, а при частоті } f = 100 \text{ МГц} - 3 \text{ м.}$$

Як бачимо, при великій частоті невеликий відрізок лінії потрібно вважати довгою лінією.

Аналогічно (9.11) та (9.12) можна отримати вирази для струмів:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_{II}}{\underline{Z}_C} e^{-\gamma x} - \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_C} e^{\gamma x} = \underline{I}_{II} e^{-\gamma x} - \underline{I}_3 e^{\gamma x}; \quad (9.15)$$

$$i = i_{II} - i_3. \quad (9.16)$$

Оскільки $\underline{I}_{II} = \frac{\underline{U}_{II}}{\underline{Z}_C}$, $\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_C}$; то $\underline{Z}_C = \frac{\underline{U}_{II}}{\underline{I}_{II}} = \frac{\underline{U}_3}{\underline{I}_3}$.

Тобто хвильовий опір є коефіцієнт пропорційності між напругою та струмом прямої чи зворотної хвилі. Це означає, що його можна розглядати як опір лінії для прямої чи зворотної хвилі окремо.

УЗГОДЖЕНИЙ РЕЖИМ

При такому режимі зворотна хвиля відсутня. Щоб встановити, за яких умов настає узгоджений режим, розглянемо постійні \underline{A}_3 та \underline{A}_4 , коли відлік x проводиться від кінця лінії

$$\underline{A}_3 = \frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_C}{2}; \quad \underline{A}_4 = \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \underline{Z}_C}{2}.$$

Виразимо \underline{U}_2 через струм у кінці лінії \underline{I}_2 та опір навантаження лінії \underline{Z}_H : $\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \underline{Z}_H$. Зворотна хвиля буде відсутня при $\underline{A}_4 = 0 \Rightarrow \underline{I}_2 \underline{Z}_H - \underline{I}_2 \underline{Z}_C = 0 \Rightarrow \underline{I}_2 \underline{Z}_H = \underline{I}_2 \underline{Z}_C$.

Значить умова узгодженого режиму

$$\underline{Z}_H = \underline{Z}_C.$$

При узгодженому режимі

$$\underline{U} = \underline{A}_3 e^{\gamma x} = \underline{U}_2 e^{\gamma x}; \quad \underline{I} = \frac{\underline{A}_3}{\underline{Z}_C} e^{\gamma x} = \underline{I}_2 e^{\gamma x}.$$

Розподіл діючих значень напруги та струму вздовж лінії показано на рис. 9.4.

У будь-якій точці лінії $\frac{U}{I} = \underline{Z}_C$ і вхідний опір лінії $\underline{Z}_{BX} = \underline{Z}_C$ незалежно від довжини лінії.

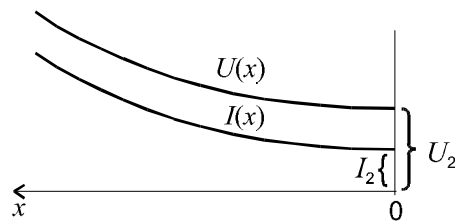


Рис. 9.4

Коефіцієнт корисної дії при узгодженому режимі

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{U_2 I_2 \cos \Theta}{U_1 I_1 \cos \Theta} = \frac{U_2 I_2}{U_2 e^{\alpha l} \cdot I_2 e^{\alpha l}} = e^{-2\alpha l}, \quad (9.17)$$

де l - довжина лінії.

Відсутність зворотної хвилі дає можливість всю енергію прямої хвилі передати в навантаження, в той час коли за наявності зворотної хвилі частина енергії відбивається від кінця лінії, повертається в лінію і втрачається в ній. Крім того, в лініях зв'язку відбита хвиля створює ефект відлуння.

Примітка. Одиниця згасання потужності в системі SI є непер [Нп]. Згасання дорівнює 1 Нп, якщо $\alpha L = 1$. На практиці в основному застосовується одиниця згасання потужності - децибелі [дБ]: 1 дБ = 0,115 Нп.

ЛІНІЯ БЕЗ СПОТВОРЕНЬ

Це лінія, в якій форма сигналу на виході повторює форму сигналу на вході. Відомо, що несинусоїдальний сигнал можна представити сумою гармонік. Для того, щоб форма сигналу не змінювалась, потрібно:

1. Щоб амплітуди всіх гармонік при проходженні вздовж лінії не змінювались або змінювались однаково. А це означає, що коефіцієнт згасання α не повинен залежати від частоти, тобто

$$\alpha = const. \quad (9.18)$$

2. Гармоніки при проходженні вздовж лінії не повинні зсуватись одна відносно одної, тобто повинні розповсюджуватись з однаковою швидкістю. З виразу для швидкості $v = \frac{\omega}{\beta} = const$ отримаємо

$$\beta \cong \omega, \quad (9.19)$$

тобто, коефіцієнт фази β повинен бути пропорційний частоті ω .

Хевісайд показав, що умови (9.18) та (9.19) виконуються при

$$\frac{L_0}{R_0} = \frac{C_0}{G_0}. \quad (9.20)$$

При цьому $\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \cdot \underline{Y}_0} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} =$

$$= \sqrt{R_0 \cdot G_0} \sqrt{\left(1 + j\omega \frac{L_0}{R_0}\right) \left(1 + j\omega \frac{C_0}{G_0}\right)};$$

з урахуванням (9.20) отримаємо

$$\underline{\gamma} = \sqrt{R_0 \cdot G_0} + j\omega \sqrt{L_0 \cdot C_0} = \alpha + j\beta, \quad (9.21)$$

тобто, $\alpha = const$, $\beta \cong \omega$.

Хвильовий опір з урахуванням (9.20)

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = Z_C \quad \text{є чисто активним.}$$

$$\text{Швидкість розповсюдження хвиль } v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 \cdot C_0}}. \quad (9.22)$$

На практиці $\frac{L_0}{R_0} < \frac{C_0}{G_0}$, тоді для забезпечення в кінці лінії неспотвореної форми сигналу викорис-

товуються:

1. Забезпечення умови (9.20) ввімкненням в лінію котушок зосередженої індуктивності.
2. Установкою в кінці лінії фільтрів, які будують з урахуванням параметрів реальної лінії і які усувають можливі спотворення.
3. Передачу імпульсних сигналів здійснюють, модулюючи ними гармонійний сигнал (modem - demodem).

БЕЗВТРАТНА ЛІНІЯ

Якщо $\omega L_0 \gg R_0$ і $\omega C_0 \gg G_0$, то вважають, що $R_0 = 0$ і $G_0 = 0$, і розглядають лінію без втрат. Вторинні параметри такої лінії: $\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \cdot \underline{Y}_0} = \sqrt{j\omega L_0 \cdot j\omega C_0} = j\omega \sqrt{L_0 \cdot C_0}$, тобто, $\alpha = 0$, $\beta = \omega \sqrt{L_0 \cdot C_0}$. Значить безвтратна лінія є лінією без спотворень.

$$\text{Хвильовий опір } Z_C = \sqrt{\frac{j\omega L_0}{j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \quad \text{є чисто активним.}$$

$$\text{З теорії поля відомо, що } L_0 = \frac{\mu}{\pi} \ln \frac{d}{R}; \quad C_0 = \frac{\varepsilon \cdot \pi}{\ln \frac{d}{R}}.$$

$$\text{Тоді фазова швидкість } v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}},$$

$$\text{де } \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon'; \quad \mu = \mu_0 \mu'.$$

Для повітря $\varepsilon' = 1$; $\mu' = 1$, тоді швидкість

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

Для кабелю $\varepsilon' = 4 \dots 5$ і швидкість розповсюдження хвилі в два рази менша.

Якщо $\alpha = 0$ і $\underline{\gamma} = j\beta$, то рівняння лінії приймають вигляд:

$$\underline{U} = \frac{U_2 + I_2 Z_C}{2} e^{j\beta x} + \frac{U_2 - I_2 Z_C}{2} e^{-j\beta x} = U_2 \cos \beta x + j I_2 Z_C \sin \beta x;$$

(9.23)

$$\underline{I} = \frac{U_2 + I_2 Z_C}{2 Z_C} e^{j\beta x} - \frac{U_2 - I_2 Z_C}{2 Z_C} e^{-j\beta x} = j \frac{U_2}{Z_C} \sin \beta x + I_2 \cos \beta x.$$

СТОЯЧІ ХВИЛІ В ЛІНІЇ

Неробочий режим

Розглянемо випадок, коли лінія розімкнута на кінці ($Z_H = \infty$, $I_2 = 0$). При цьому $A_3 = A_4 = \frac{U_2}{2}$, тобто амплітуди прямої та зворотної хвилі однакові. Рівняння (9.23) для цього випадку будуть мати вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \frac{U_2}{2} e^{j\beta x} + \frac{U_2}{2} e^{-j\beta x} = \underline{U}_2 \cos\beta x; \\ \underline{I} &= \frac{U_2}{2Z_C} e^{j\beta x} - \frac{U_2}{2Z_C} e^{-j\beta x} = j \frac{U_2}{Z_C} \sin\beta x. \end{aligned} \right\} \quad (9.24)$$

Миттєві значення напруги та струму:

$$\left. \begin{aligned} u &= \sqrt{2} \cdot U_2 \sin\omega t \cdot \cos\beta x; \\ i &= \sqrt{2} \frac{U_2}{Z_C} \cos\omega t \cdot \sin\beta x. \end{aligned} \right\} \quad (9.25)$$

Рис. 9.5 ілюструє розподіл $u(x)$, $i(x)$ при різних значеннях часу t .

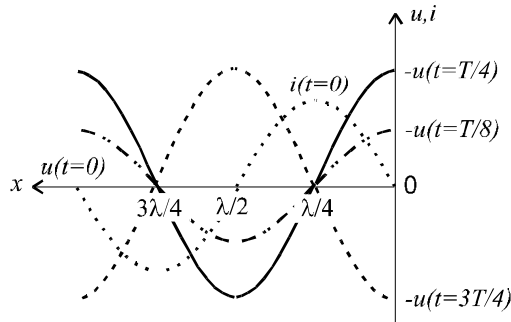


Рис. 9.5

Бачимо, що при $x = \lambda/4; 3\lambda/4; 5\lambda/4 \dots$ спостерігаються вузли напруг, а при $x = \lambda/2; 3\lambda/2; 5\lambda/2 \dots$ - пучності.

Розподіл діючих значень напруги та струму вздовж лінії показано на рис. 9.6 і описується формулами

$$U(x) = |U_2 \cos\beta x|; \quad I(x) = \left| \frac{U_2}{Z_C} \sin\beta x \right|.$$

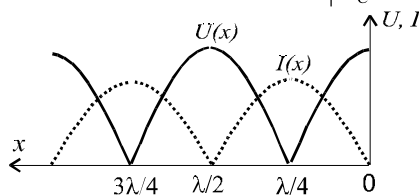


Рис. 9.6

Вхідний опір лінії отримаємо, підставивши $x = l$ в (9.24), $Z_{BX} = \frac{U}{I} = -j \cdot Z_C \cdot \text{ctg}\beta l = -jX_l$. Цей

опір є реактивним, а його величина та характер (індуктивний чи ємнісний) залежать від довжини лінії, що ілюструє рис. 9.7.

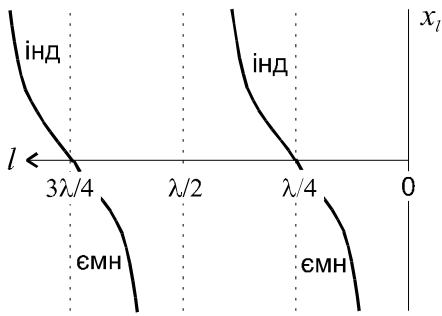


Рис. 9.7

дуть мати вигляд:

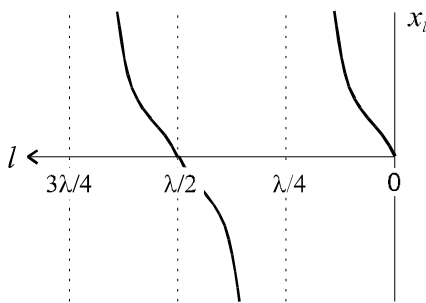


Рис. 9.8

тись як індуктивний чи ємнісний опори (рис. 9.8).

Реактивне навантаження

Розглянуті в цьому параграфі випадки розімкнутої та замкнутої накоротко лінії дозволяють зробити висновок, що будь-яке реактивне навантаження лінії можна замінити відрізком цієї ж лінії потрібної довжини. Звідси випливає, що при реактивному навантаженні лінії в ній також будуть спостерігатися стоячі хвилі, тільки в кінці лінії не буде ні вузла, ні пучності напруги та струму (рис. 9.9).

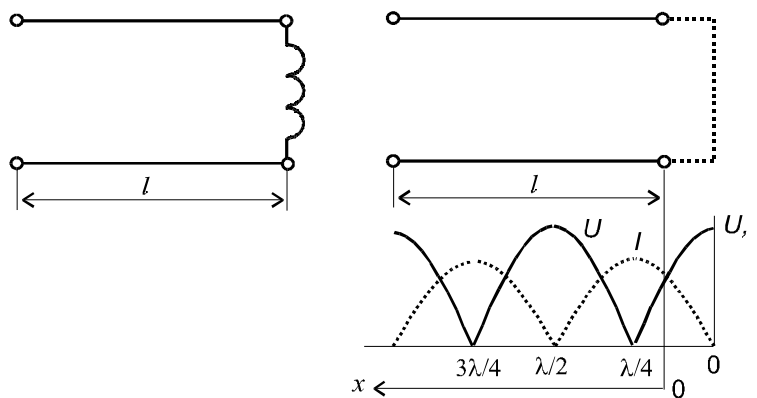


Рис. 9.9

Загальним для всіх трьох розглянутих режимів є те, що від джерела не споживається енергія. В лінії у всіх випадках спостерігаються стоячі хвилі.

УЗГОДЖЕНИЙ РЕЖИМ БЕЗВТРАТНОЇ ЛІНІЇ

Розглянемо випадок, коли в кінці лінії приєднано активне навантаження $R_H = Z_C$:

$$\underline{A}_3 = \frac{U_2 + \underline{I}_2 R_H}{2} = \underline{U}_2; \quad \underline{A}_4 = 0 - \text{зворотної хвилі немає.}$$

Із сказаного випливає, що відрізок розімкнутої лінії може використовуватись замість зосереджених L або C , тобто як індуктивний чи ємнісний опори. При їх використанні в діапазоні надвисоких частот (НВЧ) втрати будуть меншими, оскільки відрізки лінії мають значно вищу добротність.

Режим короткого замикання

Тепер розглянемо випадок, коли лінія в кінці замкнута накоротко ($\underline{Z}_H = 0, \underline{U}_2 = 0$). У цьому випадку $\underline{A}_3 = -\underline{A}_4 \Rightarrow \underline{A}_3 = \frac{\underline{I}_2 \underline{Z}_C}{2}, \underline{A}_4 = -\frac{\underline{I}_2 \underline{Z}_C}{2}$. Рівняння (9.23) для цього випадку бу-

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= j \underline{I}_2 \underline{Z}_C \sin \beta x \\ \underline{I} &= \underline{I}_2 \cos \beta x \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} u &= \sqrt{2} \underline{I}_2 \underline{Z}_C \cos \omega t \cdot \sin \beta x; \\ i &= \sqrt{2} \cdot \underline{I}_2 \sin \omega t \cdot \cos \beta x. \end{aligned} \right\} \quad (9.25)$$

Ми знову спостерігаємо стоячі хвилі в лінії, але порівняно з неробочим режимом вузли та пучності u та i поміняються місцями.

Розподіл діючих значень:

$$\begin{aligned} U(x) &= \underline{I}_2 \underline{Z}_C |\sin \beta x|; \\ I(x) &= \underline{I}_2 |\cos \beta x|. \end{aligned}$$

Вхідний опір лінії $\underline{Z}_{BX} = j \cdot \underline{Z}_C \cdot \operatorname{tg} \beta l$, тобто також є чисто реактивним.

Отже, і відрізок короткозамкнутої лінії може використовуватись як індуктивний чи ємнісний опори (рис. 9.8).

Комплекси напруги та струму описуються формулами:

$$\underline{U} = \underline{U}_2 e^{j\beta x}; \quad \underline{I} = \frac{\underline{U}_2}{R_H} e^{j\beta x}.$$

З цих формул виходить, що у будь-який момент часу, у будь-якій точці лінії напруга та струм збігаються у фазі.

Діючі значення напруг та струмів уздовж лінії не змінюються (рис. 9.10).

$$\left. \begin{aligned} U(x) &= U_2; \\ I(x) &= \frac{U_2}{R_H} = I_2. \end{aligned} \right\}$$

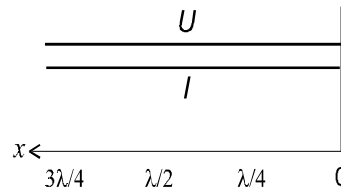


Рис. 9.10

струмів уздовж лінії не змінюються (рис. 9.10).

Якщо $Z_C \neq R_H$, амплітуда прямої хвилі Наприклад, при значень струму та рис. 9.11. При $Z_C < R_H$

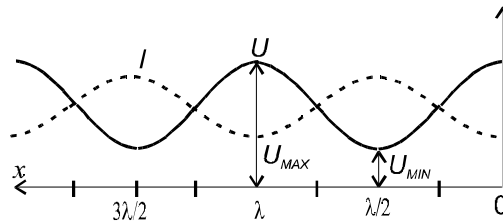


Рис. 9.11

то в лінії є зворотні хвилі, але більша амплітуди зворотної. $Z_C > R_H$ розподіл діючих напруги має вигляд, показаний на криві міняються місцями. біжучої хвилі (КБХ)

Коефіцієнт $k_B = \frac{U_{MIN}}{U_{MAX}}$ може

При $R_H > Z_C$: $k_B = \frac{Z_C}{R_H}$; при $R_H < Z_C$: $k_B = \frac{R_H}{Z_C}$.

приймати значення від 0 до 1.

УЗГОДЖЕННЯ БЕЗВТРАТНОЇ ЛІНІЇ З НАВАНТАЖЕННЯМ, ЧВЕРТЬ ХВИЛЕВИЙ ТРАНСФОРМАТОР

Розглянемо відрізок лінії довжиною $l = \lambda/4$ з активним навантаженням R_H на кінці, для якого:

$$e^{j\beta l} = e^{j \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4}} = e^{j\frac{\pi}{2}} = j; \quad e^{-j\beta l} = -j;$$

$$\underline{U}_1 = \underline{A}_3 e^{j\beta l} + \underline{A}_4 e^{-j\beta l} = j \frac{\underline{U}_2 + I_2 Z_C}{2} - j \frac{\underline{U}_2 - I_2 Z_C}{2} = j I_2 Z_C;$$

$$\underline{I}_1 = j \frac{\underline{U}_2 + I_2 Z_C}{2 Z_C} - (-j) \frac{\underline{U}_2 - I_2 Z_C}{2 Z_C} = j \frac{\underline{U}_2}{Z_C}.$$

Вхідний опір

$$\underline{Z}_{BX} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{j I_2 Z_C}{j \frac{\underline{U}_2}{Z_C}} = \frac{Z_C^2}{\frac{\underline{U}_2}{I_2}} = \frac{Z_C^2}{R_H} = \left(\frac{Z_C}{R_H} \right)^2 R_H = K^2 R_H.$$

Як бачимо, вхідний опір має активний характер. Якщо $\frac{Z_C}{R_H} = k$ - коефіцієнт трансформації, то та-

ка лінія трансформує R_H в k^2 разів (на вході!). Цю властивість відрізка лінії довжиною $l = \lambda/4$, який називають чверть хвильовим трансформатором, використовують для узгодження лінії з навантаженням при $R_H \neq Z_C$.

Розглянемо декілька прикладів використання чверть хвильового трансформатора.

1. Навантаження має чисто активний характер, але його опір не рівний хвильовому опору лінії: $R_H = Z_H$, $R_H \neq Z_C$. У такому випадку чверть хвильовий трансформатор вмикається між навантаженням та лінією (рис. 9.12).

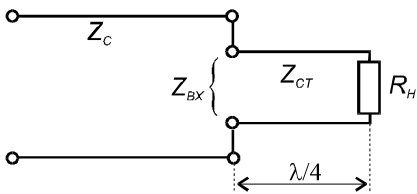


Рис. 9.12

Зворотних хвиль в основній лінії не буде при $Z_{BX} = Z_C$ або

$$\frac{Z_{CT}^2}{R_H} = Z_C, \text{ звідки } Z_{CT} = \sqrt{R_H \cdot Z_C}.$$

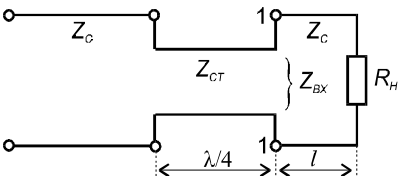


Рис. 9.13

2. Навантаження має комплексний характер. Тоді чверть-хвильовий трансформатор вмикається в розрив лінії (рис. 9.13).

Величину l вибирають таким чином, щоб у точках 1-1 Z_{BX} було активним.

Тут спостерігається два недоліки:

1. Розрив лінії.

2. Все-таки потрібен відрізок лінії з $Z_{CT} \neq Z_C$.

Тому краще використовувати замкнутий або розімкнутий відрізки такої ж лінії (рис. 9.14). Довжини l_1 та l_2 підбирають, виходячи з

умови: $Z_{BX_{l-1}} = Z_C$.

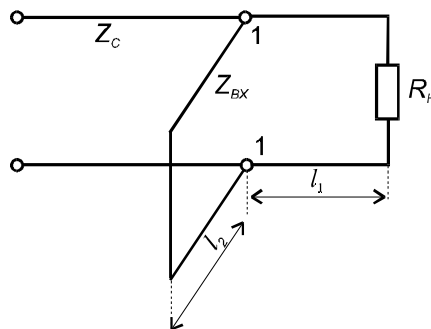


Рис. 9.14

Приклад 9.1. Безвтратна лінія довжиною $l = 16,75$ км має параметри: $L_0 = 10 \cdot 10^{-3}$ Гн/км, $C_0 = 5,75 \cdot 10^{-9}$ Ф/км. Напряга в кінці лінії $U_2 = 55,4$ В, частота - $f = 5000$ Гц. Навантаження $Z_H = R_H = 2770$ Ом. Визначити струм і напряга на початку лінії, довжину електромагнітної хвилі, побудувати графік розподілу напруги $U(x)$ уздовж лінії.

Розв'язок

1. Якщо лінія безвтратна, то $R_0 = 0$ та $G_0 = 0$.

2. Хвильовий опір $Z_C = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 10^{-3}}{5,75 \cdot 10^{-9}}} = 1318$ Ом.

3. Коефіцієнт фази

$$\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0} = 2\pi \cdot 5000 \sqrt{10 \cdot 10^{-3} \cdot 5,75 \cdot 10^{-9}} = 0,238 \text{ рад/м};$$

$$\beta L = 0,238 \cdot 16,75 = 4 \text{ рад} = 229^\circ.$$

4. Струм в кінці лінії $I_2 = \frac{U_2}{R_H} = \frac{55,4}{2770} = 0,02$ А.

5. Постійні інтегрування $\underline{A}_{3,4} = \frac{U_2 \pm I_2 Z_C}{2}$;

$$\underline{A}_3 = \frac{55,4 + 0,02 \cdot 1318}{2} = 41 \text{ В}; \quad \underline{A}_4 = \frac{55,4 - 0,02 \cdot 1318}{2} = 14,5 \text{ В}.$$

6. Напряга на початку лінії $\underline{U}_1 = \underline{A}_3 e^{j\beta L} + \underline{A}_4 e^{-j\beta L} =$

$$= 41 \cdot e^{j229^\circ} + 14,5 e^{-j229^\circ} = -28 - j29 - 10,1 + j10,2 =$$

$$= -38,1 - j18,2 = 42,2 e^{j205^\circ} \text{ В}.$$

7. Струм на початку лінії $\underline{I}_1 = \frac{1}{Z_C} (\underline{A}_3 e^{j\beta L} - \underline{A}_4 e^{-j\beta L}) =$

$$= \frac{1}{1318} (41 \cdot e^{j229^\circ} - 14,5 e^{-j229^\circ}) = \frac{1}{1318} (-28 - j29 + 10,1 - j10,2) =$$

$$= \frac{1}{1318} (-17,9 - j39,2) = 0,033 e^{-j118^\circ} \text{ А.}$$

8. Довжина електромагнітної хвилі

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{6,28}{0,238} = 26,4 \text{ км.}$$

9. Графік розподілу напруги вздовж лінії показано на рис. 9. 15.

Оскільки $R_H > Z_C$, то в кінці лінії та в точках $x = \lambda/2, 3\lambda/2 \dots$ від кінця лінії будуть максимуми напруги, а в точках $x = \lambda/4, 3\lambda/4 \dots$ від кінця лінії – мінімуми напруги. Відношення мінімумів до максимумів складає $\frac{U_{min}}{U_{max}} = \frac{Z_C}{R_H} = \frac{1318}{2770} = 0,48$.

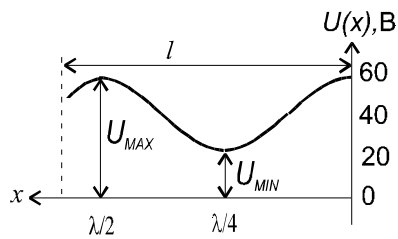


Рис. 9.15

Враховуючи, що $U_{max} = U_2 = 55,4 \text{ В}$, то $U_{min} = 55,4 \cdot 0,48 = 26,6 \text{ В}$.

Приклад 9.2. За заданими вторинними параметрами лінії $Z_C = 621 e^{-j13,5^\circ} \text{ Ом}$, $\underline{\gamma} = 0,018 e^{j75,5^\circ} \text{ 1/км}$ та частоті $\omega = 5 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ визначити первинні параметри цієї лінії.

Розв'язок

1. З урахуванням формул

$$\underline{\gamma} = \sqrt{Z_0 \cdot Y_0}; \quad Z_C = \sqrt{Z_0 / Y_0}$$

добуток $\underline{\gamma}$ та Z_C дає комплекс повздовжнього опору

$$Z_0 = \underline{\gamma} \cdot Z_C = 621 e^{-j13,5^\circ} \cdot 0,018 e^{j75,5^\circ} = 11,18 e^{j62^\circ} \text{ Ом.}$$

$$Z_0 = R_0 + j\omega L_0 = 11,18 \cos 62^\circ + j11,18 \sin 62^\circ = 5,4 + j10,2 \text{ Ом.}$$

Отже, $R_0 = 5,4 \text{ Ом/км}$; $L_0 = \frac{(\omega L_0)}{\omega} = \frac{10,2}{5 \cdot 10^3} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Гн/км}$.

2. Комплекс поперечної провідності

$$\frac{Y_0}{Z_C} = \frac{\underline{\gamma}}{\sqrt{Z_0 / Y_0}} = \frac{\sqrt{Z_0 \cdot Y_0}}{\sqrt{Z_0 / Y_0}} = \frac{0,018 e^{j75,5^\circ}}{621 e^{-j13,5^\circ}} = 3 \cdot 10^{-5} e^{-j89^\circ} =$$

$$= 4 \cdot 10^{-7} + j3 \cdot 10^{-5} \text{ См/км.}$$

Отже, $G_0 = 4 \cdot 10^{-7} \text{ См/км}$; $C_0 = \frac{(\omega C_0)}{\omega} = \frac{3 \cdot 10^{-5}}{5 \cdot 10^3} = 0,6 \cdot 10^{-8} \text{ Ф/км}$.

Приклад 9.3. Реалізувати відрізком безвтратної лінії опір 900 Ом ємнісного характеру, якщо відомі вторинні параметри лінії:

$$Z_C = 600 \text{ Ом}; \quad \beta = 5,9 \text{ 1/м.}$$

Розв'язок

1. Краще це зробити відрізком розімкнутої лінії, оскільки він у порівнянні з короткозамкнутим буде коротшим при тому ж вхідному опорі.

2. Вхідний опір розімкнутої лінії

$$\underline{Z}_{BX} = -jZ_C \text{ctg}\beta l = -j \frac{Z_C}{\text{tg}\beta l} \Rightarrow -jX_C = -j \frac{Z_C}{\text{tg}\beta l}.$$

Отже, модуль шуканого опору $X_C = \frac{Z_C}{\operatorname{tg}\beta l}$,

звідки $\operatorname{tg}\beta l = \frac{Z_C}{X_C} = \frac{600}{900} = \frac{2}{3}$; $\beta l = \operatorname{arctg} \frac{2}{3} = 0,59 \text{ рад}$.

Довжина відрізка $l = \frac{(\beta l)}{\beta} = \frac{0,59}{5,9} = 0,1 \text{ м}$.

Зауважимо, що цей відрізок має такий опір тільки для заданої частоти.

Приклад 9.4. Для однорідної лінії відомо: $l = 100 \text{ км}$; $R_0 = 2,52 \text{ Ом/км}$; $L_0 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Гн/км}$; $G_0 = 10^{-6} \text{ См/км}$; $C_0 = 6 \cdot 10^{-9} \text{ Ф/км}$; $f = 800 \text{ Гц}$; $\underline{U}_2 = 30 \text{ В}$; $I_2 = 0,1e^{j6^\circ} \text{ А}$. Визначити хвильовий опір, коефіцієнт розповсюдження, швидкість розповсюдження хвилі, напругу \underline{U}_1 на вході лінії.

Розв'язок

1. Хвильовий опір лінії

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{2,52 + j2\pi \cdot 800 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{10^{-6} + j2\pi \cdot 800 \cdot 6 \cdot 10^{-9}}} = 585e^{-j6^\circ} \text{ Ом}.$$

2. Коефіцієнт розповсюдження $\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \cdot \underline{Y}_0} =$

$$= \sqrt{(2,52 + j2\pi \cdot 800 \cdot 2 \cdot 10^{-3})(10^{-6} + j2\pi \cdot 800 \cdot 6 \cdot 10^{-9})} = 17,6 \cdot 10^{-3} e^{-j82^\circ} = 2,44 \cdot 10^{-3} + j17,4 \cdot 10^{-3}, \text{ км}^{-1},$$

де $\alpha = 2,44 \cdot 10^{-3} \text{ км}^{-1}$ - коефіцієнт згасання;

$\beta = 17,4 \cdot 10^{-3}, \text{ км}^{-1}$ - коефіцієнт фази.

3. Фазова швидкість

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \cdot 800}{17,4 \cdot 10^{-3}} = 289000 \text{ км/с}.$$

4. Напруга на вході лінії

$$\underline{U}_1 = \underline{A}_3 e^{\underline{\gamma} l} + \underline{A}_4 e^{-\underline{\gamma} l} = \underline{A}_3 e^{\alpha l} \cdot e^{j\beta l} + \underline{A}_4 e^{-\alpha l} \cdot e^{-j\beta l},$$

де $\underline{A}_3 = \frac{\underline{U}_2 + I_2 \underline{Z}_C}{2} = \frac{30 + 0,1e^{j6^\circ} \cdot 585e^{-j6^\circ}}{2} = 44,25 \text{ В}$;

$$\underline{A}_4 = \frac{\underline{U}_2 - I_2 \underline{Z}_C}{2} = \frac{30 - 0,1e^{j6^\circ} \cdot 585e^{-j6^\circ}}{2} = -14,25 \text{ В}.$$

При $l = 100 \text{ км}$:

$$\alpha l = 2,44 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 0,244;$$

$$\beta l = 17,4 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 1,74 \text{ рад} = 100^\circ.$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді } \underline{U}_1 &= 44,25e^{0,244} e^{j100^\circ} - 14,25e^{-0,244} e^{-j100^\circ} = \\ &= 56,2e^{j100^\circ} - 11,12e^{-j100^\circ} = -7,86 + j66,28 = 66,74e^{j97^\circ} \text{ В}. \end{aligned}$$

Завдання на самостійну роботу:

1. Законспекуйте матеріал.

2. Перегляньте та доповніть конспект відповідним матеріалом з підручника

Каргополова Н.П. Теорія електричних та магнітних кіл ст. 208-227

3. Вишліть фото конспекту викладачу.