Перехідні процеси у лінійних електричних колах

Розділ 9. **Класичний метод розрахунку перехідних процесів**

9.1. Виникнення перехідних процесів

Перехідними називаються процеси, які відбуваються у електричних колах при переході від одного, усталеного режиму роботи, до іншого, теж усталеного.

В усталеному режимі роботи кола напруги та струми на його ділянках можуть бути або незмінними у часі (кола постійного струму), або ж змінюватися за періодичними законами (кола змінного струму). Усталені режими роботи електричного кола при дії постійних чи змінних у часі джерел енергії розглядалися у першій частині посібника. Відсутність струмів та напруг у колі теж є усталеним режимом роботи. Розподіл струмів та напруг на елементах електричного кола змінюється у тому випадку, коли відбуваються вмикання чи розмикання пасивних або активних віток, коротке замикання окремих ланок, перемикання різного роду і т. ін. Всі ці операції будемо надалі називати ***комутаціями***. Здійснюються комутації ключами-двополюсниками, опір яких у ідеальному випадку дорівнює нулю, якщо ключ замкнутий (рис. 9.1, *а*), та нескінчено великий, коли ключ розімкнутий (рис. 9.1, *б*). Електричні схеми з ключами прийнято зображувати до моменту комутації. Будемо вважати, що комутації відбуваються практично миттєво, тобто їх тривалість дорівнює нулю.

а) *б*)

Рис. 9.1

Фізично перехідні процеси можна трактувати як процеси переходу від енергетичного стану докомутаційного режиму кола до енергетичного стану кола після комутації.

Аналізуючи усталений режим роботи електричних кіл, ми відмічали, що такий режим характеризується коливанням енергії. У колах з реактивними елементами електрична енергія, яка підводиться до кола, може не тільки розсіюватися у резистивних елементах, але і запасатися у магнітному колі котушки ($w_м = Li_L^2/2$) чи електричному колі конденсатора ($w_е = Cu_C^2/2$). При цьому протягом певного проміжку часу ця енергія накопичується у реактивних елементах, а потім повертається назад у коло. Якщо у таких колах з реактивними елементами відбуваються комутації, то енергія, що накопичується у реактивних елементах, не може змінитися миттєво, стрибком, інакше потужність (швидкість зміни енергії у часі), досягла б нескінчених значень, що фізично неможливо, оскільки реальні джерела живлення не можуть забезпечити нескінченно велику потужність. Якщо, наприклад, розімкнути вітку з індуктивністю, то обов’язково виникне у місці розмикання іскра, через опір якої розсіюється енергія, накопичена у магнітному полі котушки. Аналогічним чином, якщо замкнути полюси конденсатора, зарядженого попередньо до певної напруги, то накопичена у ньому електрична енергія розсіюється у з’єднувальних проводах та між контактами. Отож, перехід від одного усталеного режиму роботи кола до іншого, теж усталеного, відбувається не миттєво, а протягом певного часу і за неперіодичними законами. У колах з тільки резистивними елементами перехід від одного усталеного режиму до іншого відбувається миттєво.

Перехідні процеси у одних випадках є небажаними і навіть небезпечними (наприклад, при коротких замиканнях у енергетичних системах). У інших випадках (наприклад, у системах автоматичного регулювання) перехідні процеси являють собою нормальний режим роботи. Через виникнення перехідних процесів спотворюється форма сигналів, що має важливе значення для синтезу пристроїв, призначених для обробки сигналів у цифрових системах.

Розподіл струмів, потенціалів чи напруг у електричному колі у будь-який момент часу описують диференційними рівняннями. Ці рівняння часто називаються ***рівняннями стану***.

У загальному випадку розрахунок перехідних процесів у лінійних електричних колах зводиться до розв'язку систем неоднорідних диференційних рівнянь. У залежності від способу розв'язку рівнянь розрізняють класичний та операторний методи розрахунку перехідних процесів, метод інтегралу Дюамеля, метод координат стану. Цей розділ присвячений розгляду особливостей класичного методу аналізу перехідних процесів, коли перехідні струми чи напруги розраховуються безпосередньо у часовій області.

9.2. Закони комутації та початкові умови

Будемо вважати, що початок відліку тривалості перехідного процесу $t = 0$ починається з моменту комутації. Момент часу безпосередньо перед комутацією прийнято позначати, як 0_-, а зразу ж після комутації – 0_+.

Приведені вище міркування щодо того, що запас енергії магнітного ($w_м = Li_L^2/2 = \left(\Psi_L^2\right)/2L$) чи електричного ($w_e = Cu_C^2/2 = \;= \left(q_C^2\right)/2C$) полів може змінюватися тільки плавно, без стрибків, покладені в основу ***двох законів комутації***.

Перший закон комутації стосується індуктивного елемента і формулюється так: ***потокозчеплення та струм у індуктивності у момент комутації дорівнюють потокозчепленню та струмові безпосередньо до комутації і надалі починають змінюватись саме з цих значень***. Аналітично перший закон комутації записується так:

$$\Psi_L\left(0_-\right) = \Psi_L\left(0_+\right);$$
$$i_L\left(0_-\right) = i_L\left(0_+\right). \qquad (9.1)$$

У другому законі комутації мова йде про заряд та напругу на конденсаторі: ***заряд та напруга на конденсаторі у момент комутації дорівнюють зарядові та напрузі безпосередньо до комутації і надалі починають змінюватися саме з цих значень***. Отже:

$$q_C\left(0_-\right) = q_C\left(0_+\right);$$
$$u_C\left(0_-\right) = u_C\left(0_+\right). \qquad (9.2)$$

Значення струму в індуктивності та напруги на ємності у момент комутації називають ***незалежними початковими умовами***.

Початкові умови визначають запаси енергії у електричному та магнітному полях пристроїв кола на момент комутації. Якщо у момент комутації напруга на всіх ємностях кола та струми у всіх індуктивностях кола дорівнюють нулю, то відповідні початкові умови називають ***нульовими***.

Якщо до комутації $i_L\left(0_-\right) = 0$ (нульові початкові умови), то і в момент комутації струм через індуктивність протікати не буде, тобто котушка у цьому випадку рівнозначна розриву кола. При нульових початкових умовах для конденсатора ($u_C(0_-)=0$) ємність рівнозначна короткому замиканню.

9.3. Загальна характеристика класичного методу розрахунку перехідних процесів

Розглянемо сутність класичного методу розрахунку перехідних процесів на прикладі схеми, зображеної на рис. 9.2.

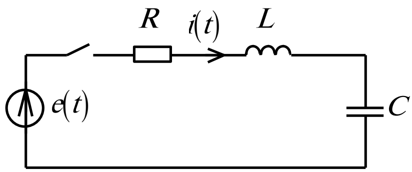


Рис. 9.2

Нехай коло R, L, C підключається до змінної у часі за якимось законом ЕРС $e(t)$.

Диференційне рівняння, яке описує роботу схеми у будь-який час – це рівняння другого закону Кірхгофа:

$$Ri(t)+L\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}\int i(t)dt=e(t). \tag{9.3}$$

Визначити перехідний струм $i(t)$ – означає розв’язати це інтегро-диференційне рівняння.

Продиференціювавши (9.3), отримаємо:

$$L\frac{d^2i(t)}{dt^2}+R\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}i(t)=\frac{de(t)}{dt}. \tag{9.4}$$

Маємо неоднорідне диференційне рівняння другого порядку, загальний інтеграл якого шукається у вигляді часткового розв'язку неоднорідного рівняння i' та загального розв'язку однорідного диференційного рівняння i'' :

$$i(t)=i'+i''.$$

У електротехніці частковий розв'язок неоднорідного рівняння i' називають ***вимушеною складовою*** $i'=i_{вим}(t)$. Виникає вимушена складова під дією зовнішньої сили (джерела енергії). Вона характеризує роботу схеми (при постійній чи періодичній ЕРС $e(t)$) в усталеному режимі після комутації, коли перехідні процеси вже закінчилися. Розрахунки цих складових розглядалися у першій частині посібники, коли ми не мали підозри про існування перехідних процесів.

Загальний розв'язок однорідного диференційного рівняння (тобто рівняння без правої частини) називають у теорії кіл ***вільною складовою*** $i'' = i_{віл}(t)$. Вільна складова не залежить від дії джерела енергії у скомутованій схемі, і її виникнення обумовлене накопиченням енергії у реактивних елементах схеми.

Для однорідного диференційного рівняння:

$$L\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}i(t) = 0$$

маємо відповідне характеристичне рівняння:

$$Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} = 0\,.$$

Позначивши корені цього рівняння, як p_1 та p_2, вільну складову будемо шукати у вигляді суми показникових функцій:

$$i_{віл}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}\,, \tag{9.5}$$

де A_1 та A_2 – сталі інтегрування, які визначаються з початкових умов.

Вільні складові повинні згасати з часом, оскільки у колі відсутні джерела енергії, здатні протягом тривалого часу компенсувати теплові втрати від вільних складових.

Отже, ***перехідний*** (***або повний***) струм $i(t)$ маємо шукати у вигляді:

$$i(t) = i_{вим}(t) + i_{віл}(t)\,. \tag{9.6}$$

Розрахунок перехідних процесів класичним методом виконується у такій послідовності:

– складається рівняння стану електричного кола та відповідне однорідне диференційне рівняння;

– розраховується вимушена складова шуканої величини;

– складається характеристичне рівняння, визначаються його корені та записується загальний вигляд вільної складової шуканої величини;

– визначаються сталі інтегрування.

Порядок диференційних рівнянь, які описують перехідний процес у схемі, у загальному випадку визначається кількістю реактивних елементів у скомутованій схемі після її спрощення, тобто заміни послідовно чи паралельно з'єднаних індуктивностей (ємностей) однією, еквівалентною.

Із рівняння (9.6) видно, що струм у колі можна розглядати у вигляді двох складових, які накладаються одна на одну: усталеної, яка нібито установлюється зразу, та вільної, яка виникає тільки під час перехідного процесу. Власне, наявність цієї вільної складової і обумовлює при перехідних процесах безперервне наближення до усталеного режиму.

Звичайно, реально існують тільки перехідні струми та напруги, а умовне їх розкладання на дві складові, вимушену та вільну, є тільки зручним математичним прийомом, що полегшує аналіз перехідних процесів.

9.4. Перехідні процеси у колі *R*, *L*

9.4.1. Підключення кола *R, L* до джерела постійної ЕРС

Проаналізуємо перехідні процеси у найпростіших електричних колах з одним накопичувачем енергії.

Розрахуємо класичним методом перехідний струм $i(t)$ у схемі рис. 9.3, *а*, де $e(t) = E$ (постійна ЕРС).

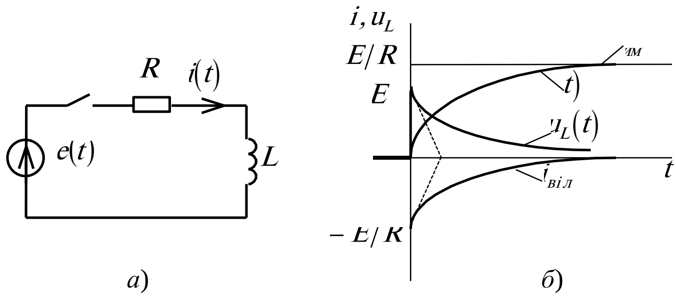


Рис. 9.3

Диференційне рівняння, яке описує стан електричного кола, має вигляд:

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} = E.$$

Перехідний струм шукаємо у вигляді суми вимушеної та вільної складових:

$$i(t) = i_{вим}(t) + i_{віл}(t). \qquad (9.7)$$

Вимушена складова $i_{вим}(t)$ – це струм у колі в усталеному режимі, коли перехідні процеси уже закінчилися. Оскільки у колах постійного струму $X_L = 0$, то:

$$i_{вим}(t) = E/R. \qquad (9.8)$$

Однорідне диференційне рівняння для скомутованого кола має вигляд:

$$Ri + L\frac{di}{dt} = 0.$$

Йому відповідає характеристичне рівняння:

$$R + pL = 0,$$

що має один корінь: $p = -R/L$.

Вільну складову струму шукаємо у вигляді:

$$i_{віл}(t) = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{R}{L}t}. \qquad (9.9)$$

Сталу інтегрування A будемо визначати з початкових умов, розглядаючи рівняння (9.7) в момент комутації, тобто при $t = 0$. Маємо:

$$i(0) = i_{вим}(0) + i_{віл}(0). \qquad (9.10)$$

За першим законом комутації струм у колі у момент комутації:

$$i(0) = i(0_-) = 0,$$

оскільки до комутації коло не було підключене до ЕРС.

Вимушена складова, згідно з (9.8), від часу не залежить: $i_{вим}(0) = E/R$. Вільна складова у момент комутації $t = 0$, як випливає з (9.9), дорівнює A: $i_{віл}(0) = A$. Виходить, що у момент комутації рівняння (9.10) має вигляд:

$$0 = E/R + A.$$

Звідси стала інтегрування $A = -E/R$.

Отже, перехідний струм у колі R, L змінюється за законом:

$$i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}. \qquad (9.11)$$

Графічна залежність перехідного струму від часу показана на рис. 9.3, *б*. Перехідний струм $i(t)$ монотонно зростає від нульового значення у момент комутації, асимптотично наближаючись до усталеного значення E/R при $t \to \infty$.

Тривалість перехідного процесу прийнято оцінювати за так званою ***сталою часу*** кола $\tau = 1/|p|$. Для кола R, L стала часу визначається як $\tau = L/R$, має розмірність часу і вимірюється у секундах.

Рівняння (9.11) можна записати у вигляді:

$$i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \tag{9.12}$$

Стала часу τ, як видно з (9.12), показує, за який час вільна складова перехідного струму зменшується за абсолютною величиною у $e = 2{,}718$ разів у порівнянні зі своїм початковим значенням. За час $t = \tau$ перехідний струм у колі досягає значення:

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-1}\right) \cong 0{,}632 \frac{E}{R}.$$

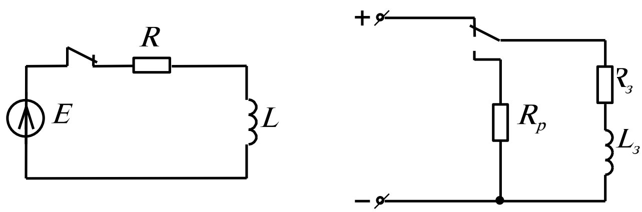
Вважається, що перехідний процес закінчується через відрізок часу $t = (3 \div 5)\,\tau$ після комутації. Графічно сталу часу можна визначити, провівши піддотичну до експоненційної функції у точці $t = 0$. Чим більший активний опір кола, тим менша стала часу і тим, відповідно, швидше закінчується перехідний процес. Це цілком логічно і з фізичної точки зору, оскільки на резисторі відбувається незворотне перетворення електричної енергії у теплову. Чим більша індуктивність L кола, тим більше енергії вона накопичить в усталеному режимі, і тим, відповідно, більшою буде тривалість перехідного процесу.

Напруга на індуктивності у схемі рис. 9.3, *а*:

$$u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} = -L\frac{E}{R}\left(-\frac{R}{L}\right)e^{-\frac{R}{L}t} = Ee^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{9.13}$$

До комутації (при $t = 0_-$) $u_L(0_-) = 0$, у момент комутації напруга на індуктивності стрибком зростає до значення ЕРС. Потім ця напруга за час $(3 \div 5)\,\tau$ зменшується практично до нульового значення в усталеному післякомутаційному режимі (рис. 9.3, *б*).

Отже, у колах постійного струму в результаті комутацій на індуктивних котушках виникає перехідна напруга $L\,di/dt$ Це явище потрібно враховувати при експлуатації електротехнічних пристроїв, коли виникає необхідність розмикати індуктивні вітки. При розмиканні такої вітки (рис. 9.4, *а*) у електричне коло включається великий опір повітряного проміжку ключа, стала часу τ зменшується майже до нуля. Струм у колі швидко падає, що веде до появи великої ЕРС самоіндукції на котушці. При цьому можливі пошкодження ізоляції між витками котушки та контактів. З цієї причини, наприклад, обмотку збудження генераторів постійного струму при необхідності швидко зняти збудження не відключають від джерела живлення, а перемикають на низькоомні розрядні опори (рис. 9.4, *б*).



а) *б*)

Рис. 9.4

9.4.2. Підключення кола *R*, *L* до джерела синусоїдної ЕРС

Розглянемо перехідний процес у схемі рис. 9.3, *а*, якщо $e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi_e)$. Як і для кола з постійною ЕРС, струм $i(t)$ має вимушену та вільну складові:

$$i(t) = i_{вим}(t) + i_{віл}(t) . \tag{9.14}$$

Усталений режим у схемі після комутації має струм синусоїдної форми:

$$i_{вим}(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_e - \varphi) , \tag{9.15}$$

де $I_m = E_m \big/ \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$, $\varphi = arctg(\omega L / R)$.

Оскільки розрахунки вільної складової – це розв'язок однорідного диференційного рівняння, що описує роботу кола, то вільна складова цього кола для ЕРС будь-якої форми шукається у вигляді (9.9), тобто:

$$i_{віл}(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t} .$$

Визначимо сталу інтегрування A, розглядаючи рівняння (9.14) у момент комутації:

$$0 = I_m \sin(\psi_e - \varphi) + A,$$

звідки

$$A = -I_m \sin(\psi_e - \varphi). \tag{9.16}$$

Отже, перехідний струм $i(t)$ змінюється за законом:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_e - \varphi) - I_m \sin(\psi_e - \varphi) e^{-\frac{R}{L}t}. \tag{9.17}$$

На рис. 9.5 побудовано залежності $i_{вим}(t)$, $i_{віл}(t)$ та $i(t)$.

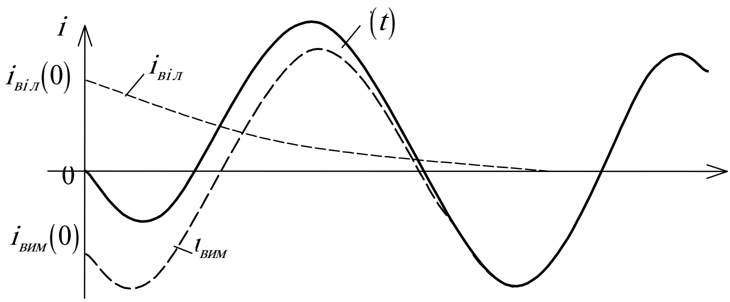


Рис. 9.5

У момент комутації струм у колі не протікає, оскільки $i_{вим}(0) = -i_{віл}(0) = I_m \sin(\psi_e - \varphi)$.

Вільна складова струму залежить від фази вмикання ЕРС. Як виходить з (9.16), найбільше значення вільна складова приймає при $\psi_e - \varphi = \pm\pi/2$. При цьому $i_{віл}(t) = \mu I_m$. За рахунок вільної складової максимальне значення перехідного струму в кінці першого напівперіоду може досягати майже подвійної амплітуди усталеного режиму кола. Якщо ж $\psi_e = \varphi$ або $\psi_e = \varphi \pm \pi$, то вільна складова дорівнює нулю, тобто перехідний процес не виникає, а у схемі зразу ж після комутації встановлюється усталений режим роботи.

9.5. Перехідні процеси у колі *RC*

9.5.1. Підключення кола *RC* до джерела постійної ЕРС

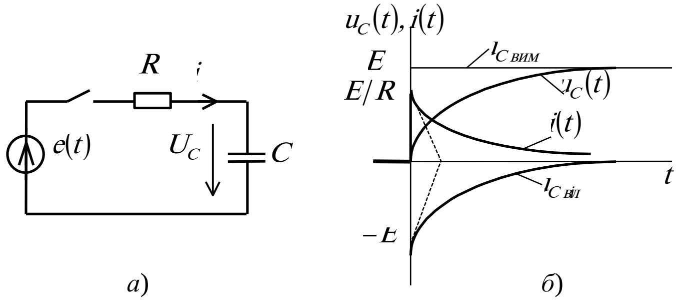
Розглянемо перехідний процес у колі $R,\ C$ (рис. 9.11, *а*) при підключенні його до джерела постійної ЕРС: $e(t) = E$. Диференційне рівняння, яке описує процеси у колі, має вигляд:

$$iR + u_C = E\,. \tag{9.18}$$

Враховуючи, що $i = C\dfrac{du_C}{dt}$, рівняння можна записати:

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = E\,. \tag{9.19}$$

Отже, розрахунок зводиться до розв’язку цього рівняння.



а) *б*)

Рис. 9.11

Перехідну напругу на конденсаторі будемо шукати у вигляді:

$$u_C(t) = u_{C\,вим} + u_{C\,віл}\,. \tag{9.20}$$

Вимушена складова напруги на конденсаторі в усталеному режимі після комутації:

$$u_{C\,вим} = E\,, \tag{9.21}$$

оскільки в усталеному режимі після комутації струм у колі не протікає, і вся напруга джерела енергії виявляється прикладеною до конденсатора.

Характеристичне рівняння, як видно з (9.19), має вигляд:

$$pRC + 1 = 0\,,$$

звідки $p = -\dfrac{1}{RC}$.

Отже, вільна складова напруги на конденсаторі має бути записана, як:

$$u_{C\,віл} = Ae^{pt} = A^{-\frac{1}{RC}t}. \qquad (9.22)$$

Визначимо сталу інтегрування A, розв'язавши рівняння (9.20) у момент комутації. Оскільки до комутації напруги на обкладках конденсатора не було, то, згідно з другим законом комутації, $u_C(0_-) = u_C(0) = 0$. Отже, маємо:

$$0 = E + A, \text{ тобто } A = -E.$$

Перехідна напруга на конденсаторі, таким чином, описується законом:

$$u_C(t) = E - Ee^{pt}.$$

Введемо сталу часу $\tau = 1/|p|$. Тоді маємо:

$$u_C(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \qquad (9.23)$$

Для RC-кола $\tau = RC$ і вимірюється у секундах. Як і у випадку кола RL, ця величина показує, за який час вільна складова напруги на конденсаторі зменшується за абсолютною величиною у $e = 2{,}72$ разів. Залежність $u_C(t)$ наведена на рис. 9.11, *б*.

Розрахуємо перехідний струм у колі:

$$i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} = ECpe^{pt} = \frac{E}{R}e^{pt} = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}. \qquad (9.24)$$

Графік залежності перехідного струму від часу приведений на рис. 9.11, *б*. У момент комутації маємо у схемі стрибок струму на величину E/R. Справді, оскільки при нульових незалежних початкових умовах конденсатор являє собою короткозамкнуту ділянку кола, то весь опір схеми у момент $t = 0$ визначається тільки резистором. Надалі струм асимптотично прямує до нульового значення в усталеному післякомутаційному режимі.

Чим більші параметри R та C, тим більша стала часу кола τ, і тим, відповідно, довше триває перехідний процес у RC-колі.

9.5.2. Підключення кола *RC* до джерела синусоїдної ЕРС

Нехай у схемі, зображеній на рис. 9.11, *а*, ЕРС змінюється у часі за гармонічним законом:

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi_e).$$

Розрахуємо перехідну напругу на конденсаторі $u_C(t)$.

$$u_C(t) = u_{C\,вим} + u_{C\,віл}\ .$$

Вимушену складову напруги в усталеному режимі після комутації шукаємо у вигляді:

$$u_{C\,вим} = I_m \frac{1}{\omega C} \sin\left(\omega t + \psi_e - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \\ = U_{m_C} \sin\left(\omega t + \psi_e - \varphi - \frac{\pi}{2}\right), \quad (9.25)$$

де $I_m = \dfrac{E_m}{\sqrt{R^2 + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}}}$, $\varphi = arctg\left(\dfrac{1}{\omega RC}\right)$.

Вільна складова напруги на конденсаторі визначається співвідношенням (9.22). Перехідна напруга:

$$u_C(t) = U_{m_C} \sin\left(\omega t + \psi_e - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + Ae^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Сталу інтегрування A розраховуємо з початкових умов. При $t = 0$:

$$u_C(0) = U_{m_C} \sin\left(\psi_e - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + A.$$

Оскільки $u_C(0) = u_C(0_-) = 0$, то

$$A = -U_{m_C} \sin\left(\psi_e - \varphi - \frac{\pi}{2}\right). \quad (9.26)$$

З формули (9.26) видно, що при певних умовах (а саме, якщо $\psi_e - \varphi = \pm\pi/2$), стала інтегрування $A = 0$, а значить, вільної складової напруги при комутації не виникає. При таких умовах у схемі зразу ж без перехідного процесу встановлюється вимушений усталений режим.

Перехідна напруга на конденсаторі, таким чином, змінюється за законом:

$$u_C(t) = U_{m_C} \sin\left(\omega t + \psi_e - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) - \\ - U_{m_C} \sin\left(\psi_e - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}. \qquad (9.27)$$

Залежність $u_C(t)$ приведена на рис. 9.12.

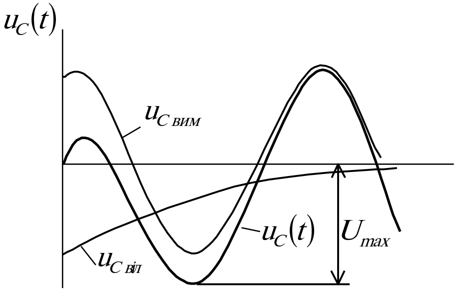


Рис. 9.12

Напруга на конденсаторі U_{max} може перевищувати амплітуду U_{m_C} усталеного режиму, але не більше ніж удвічі. Це характерно для RC-ланок з великим значенням сталої часу τ .

Завершуючи теоретичний розгляд класичного методу розрахунку перехідних процесів у колах з одним реактивним елементом, звернемо увагу на загальний вигляд характеристичного рівняння, складеного для пошуку вільної складової.

Для кола RL маємо:

$$pL + R = 0 .$$

Для кола RC:

$$\frac{1}{pC} + R = 0 .$$

Для кола RLC (див. рис. 9.2):

$$pL + \frac{1}{pC} + R = 0 .$$

Ці рівняння повторюють загальний вигляд виразів для комплексного опору схеми після комутації при заміні $j\omega \to p$.

Отже, найпростіший спосіб складання характеристичного рівняння для будь-якої схеми такий:

– записують формулу вхідного опору Z кола у комплексній формі;

– у формулі для Z виконують заміну співмножника $j\omega$ на p;

– отриманий вираз $Z(p)$ прирівнюють до нуля.

Характеристичне рівняння можна отримати, прирівнюючи до нуля вхідний опір $Z(p)$ відносно будь-яких віток кола. Якщо схема має джерело струму, то не слід складати рівняння відносно полюсів джерела струму, оскільки опір вітки з джерелом струму нескінченно великий.

9.6. Перехідні процеси у послідовному *RLC*-контурі

Проаналізуємо перехідний процес у RLC-колі (рис. 9.15) при підключенні його до джерела постійної ЕРС. Нехай конденсатор попередньо заряджений до напруги U_0, а $e(t) = E$.

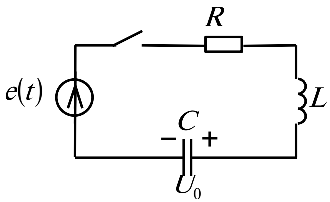


Рис. 9.15

Рівняння стану електричного кола має вигляд:

$$iR + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt + U_0 = E .$$

Розрахуємо перехідний струм $i(t)$:

$$i(t) = i_{вим} + i_{віл} .$$

Вимушена складова струму $i_{вим} = 0$ (у коло постійного струму включений конденсатор).

Запишемо характеристичне рівняння для схеми, скориставшись формулою для вхідного опору кола:

$$R + pL + \frac{1}{pC} = 0, \text{ або } p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0. \tag{9.28}$$

Рівняння має два корені:

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \tag{9.29}$$

де $\delta = \dfrac{R}{2L}$, а $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ – резонансна частота контуру.

Корені характеристичного рівняння (9.28) можуть бути дійсними різними, однаковими (кратними), комплексно-спряженими.

Для наочності міркувань щодо характеру перехідних процесів у теорії лінійних електричних кіл прийнято корені характеристичного рівняння зображувати точками на комплексній площині (рис. 9.16).

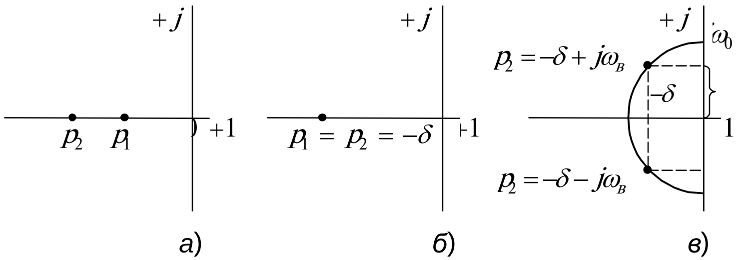


Рис. 9.16

Розглянемо три можливі варіанти розвитку перехідного процесу у нашому колі.

Корені дійсні різні.

Нулі функції $Z(p)$ лежать на дійсній осі в лівій напівплощині (рис. 9.16, *а*). Характер перехідного процесу у цьому випадку прийнято називати ***аперіодичним***. З формули (9.29) слідує, що дійсними різними корені характеристичного рівняння будуть при виконанні умови:

$$\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}, \text{ або } R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \tag{9.30}$$

Величину $R = 2\sqrt{L/C}$ часто називають ***критичним опором*** $R_{кр}$.

У цьому випадку вільна складова струму (загальний розв'язок однорідного диференційного рівняння) може бути записана у вигляді:

$$i_{віл} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}, \tag{9.31}$$

де A_1 та A_2 – сталі інтегрування, які визначаються з початкових умов.

Корені p_1 та p_2 повинні бути обов'язково від'ємними, оскільки вільна складова згасає з часом.

Для визначення двох сталих інтегрування A_1 та A_2 потрібно мати два рівняння. Продиференціюємо (9.31):

$$\frac{di_{віл}}{dt} = A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t}. \tag{9.32}$$

Розглянемо (9.31) та (9.32) у момент $t = 0$:

$$\left.\begin{aligned} &i_{віл}(0) = A_1 + A_2 \\ &\left.\frac{di_{віл}}{dt}\right|_{t=0} = A_1 p_1 + A_2 p_2 \end{aligned}\right\}. \tag{9.33}$$

Для розрахунку лівих частин рівнянь (9.33) звернемося до початкових умов. Оскільки $i(0_-) = 0$, $i_{вим} = 0$, то $i_{віл}(0) = 0$. Для вільних складових напруг у колі можна записати:

$$Ri_{віл}(0) + L\left.\frac{di_{віл}}{dt}\right|_{t=0} + u_{C\,віл}(0) = 0. \tag{9.34}$$

Оскільки, $u_C(t) = u_{C\,вим} + u_{C\,віл}$, а при $t = 0$:

$$u_C(0) = u_{C\,вим}(0) + u_{C\,віл}(0),$$

то, враховуючи, що $u_C(0) = u_C(0_-) = U_0$, $u_{C\,вим} = E$, маємо:

$$u_{C\,віл}(0) = U_0 - E.$$

Підставивши отримані результати у (9.34), отримаємо:

$$\left.\frac{di_{віл}}{dt}\right|_{t=0} = \frac{E - U_0}{L}.$$

Рівняння (9.33) приймають вигляд:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= A_1 + A_2 \\ \frac{E-U_0}{L} &= A_1 p_1 + A_2 p_2 \end{aligned}\right\}. \tag{9.35}$$

Отже:

$$A_1 = -A_2 = \frac{E-U_0}{L(p_1 - p_2)}.$$

Перехідний струм $i(t)$ у розглянутому випадку змінюється за законом:

$$i(t) = \frac{E-U_0}{L(p_1 - p_2)}\left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right). \tag{9.36}$$

Графік $i(t)$, побудований згідно з (9.36), приведений на рис. 9.17. Струм у колі не змінює свого напряму, змінюючись за аперіодичним законом.

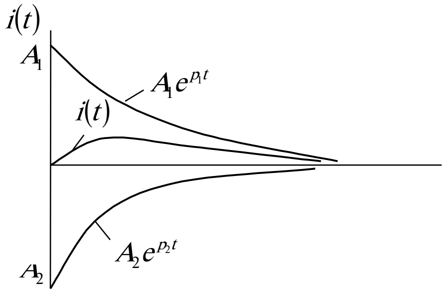


Рис. 9.17

Прийнявши, що індекс 1 відповідає верхньому знаку перед коренем (див. (9.29)), маємо: $|p_1| < |p_2|$, і тому крива $A_1 e^{p_1 t}$ спадає з часом повільніше, ніж $A_2 e^{p_2 t}$.

Корені дійсні однакові (кратні).

Це спостерігається при $\delta = \omega_0$, або $R = 2\sqrt{L/C} = R_{кр}$. Нулі функції $Z(p)$ суміщені у одній точці: $p_1 = p_2 = p = -R/(2L) = -\delta$ (рис. 9.16, *б*). Характер перехідного процесу називають ***критичним***.

Загальний розв'язок однорідного диференційного рівняння у випадку кратних коренів шукають у вигляді:

$$i_{вil} = (B_1 + B_2 t)e^{pt} = (B_1 + B_2 t)e^{-\delta t}. \qquad (9.37)$$

Визначимо сталі інтегрування B_1 та B_2, скориставшись застосованим у попередньому випадку підходом та вже визначеними у (9.35) величинами $i_{вil}(0)$ та $\left.\frac{di_{вil}}{dt}\right|_{t=0}$.

Розв'яжемо відносно сталих інтегрування B_1 та B_2 систему

$$\left.\begin{aligned} i_{вil} &= (B_1 + B_2 t)e^{-\delta t} \\ \frac{di_{вil}}{dt} &= (-\delta B_1 + B_2 - \delta t B_2)e^{-\delta t} \end{aligned}\right\}.$$

При $t = 0$ отримаємо:

$$0 = B_1,$$

$$\frac{E - U_0}{L} = B_2.$$

Вираз для перехідного струму $i(t)$ набуває вигляду:

$$i(t) = \frac{E - U_0}{L} t e^{-\delta t}. \qquad (9.38)$$

Крива зміни $i(t)$ по формі не відрізняється від приведеної на рис. 9.17.

Корені комплексно-спряжені.

При виконанні умови $\delta < \omega_0$, або $R < 2\sqrt{L/C}$ нулі функції $Z(p)$ комплексно-спряжені (рис. 9.16, *в*). Корені характеристичного рівняння записують у вигляді:

$$p_{1,2} = -\delta \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta \pm j\omega_в. \qquad (9.39)$$

Перехідний процес у цьому випадку називають ***коливальним***, а величину $\omega_в = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ – кутовою частотою власних або вільних коливань контуру.

Вільну складову перехідного струму записують у вигляді коливань зі згасаючою амплітудою:

$$i_{вil} = Ae^{-\delta t}\sin(\omega_в t + \psi).$$

Шукаємо сталі інтегрування A та ψ за процедурою та початковими умовами, уже використаними у двох попередніх випадках. Похідна від функції $i_{віл}(t)$:

$$\frac{di_{віл}}{dt} = Ae^{-\delta t}\left[-\delta\, sin(\omega_в t+\psi)+\omega_в\, cos(\omega_в t+\psi)\right].$$

У момент комутації:

$$\left.\begin{aligned} &0 = A sin\psi \\ &(E-U_0)/L = -A\delta\, sin\psi + A\omega_в\, cos\psi \end{aligned}\right\}.$$

Розв'язавши систему, отримаємо: $\psi = 0$, $A = \dfrac{E-U_0}{L\omega_в}$.

Перехідний струм у колі змінюється за законом:

$$i(t) = \frac{E-U_0}{L\omega_в}\, e^{-\delta t}\, sin\,\omega_в t. \tag{9.40}$$

Отриманий вираз свідчить, що при підключенні кола RLC до постійної напруги, якщо $R < 2\sqrt{L/C}$, у колі виникають згасаючі синусоїдні коливання з періодом $T_в = 2\pi/\omega_в$. Це обумовлено періодичним перетворенням енергії магнітного поля в енергію електричного поля і навпаки. Коливання супроводжуються втратами енергії у резисторі.

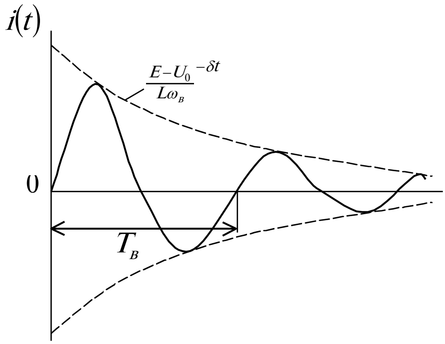


Рис. 9.18

Частота вільних коливань $\omega_в$ завжди менша резонансної частоти ω_0. Зі зменшенням величини δ частота вільних коливань збільшується, а при $\delta = 0$ коливання у колі не згасають і $\omega_в = \omega_0$. Величина $\delta = R/(2L)$ визначає швидкість спадання вільних коливань і має назву ***коефіцієнта згасання***.

При $t = 1/\delta$ ордината огинаючої амплітуду коливань кривої у 2,72 рази менша, ніж у початковий момент часу. Тому величина $1/\delta = (2L)/R$ називається ***сталою часу*** коливального кола.

Використовуючи поняття добротності кола $Q = \sqrt{L/C}/R$, характер перехідного процесу можна визначити, виходячи з оцінки величини Q. Так, при $Q > 0{,}5$ ($R < 2\sqrt{L/C}$) перехідний процес у послідовному RLC-контурі розвивається за коливальним законом. Коефіцієнт згасання $\delta = R/2L = (R\omega_0)/(2L\omega_0) = \omega_0/2Q$ обернено пропорційний добротності контура, а частота власних коливань

$$\omega_в = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{\delta^2}{\omega_0^2}} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}\,. \tag{9.41}$$

тим ближча до резонансної частоти контура ω_0, чим більш добротним є цей контур.

Якщо добротність $Q < 0{,}5$ ($R > 2\sqrt{L/C}$), то RLC-коло набуває властивості інерційності, струм при комутації змінюється за аперіодичним законом.

У кожному з розглянутих випадків ***корені характеристичного рівняння є спільними для вільних складових усіх перехідних величин***. Тому характер перехідного процесу визначає особливості вільних складових і струму, і усіх напруг у колі.

Розрахунок перехідних процесів у послідовному RLC-колі при підключенні його до джерела синусоїдної ЕРС відрізняється від викладеного вище лише визначенням вимушеної складової.

В усталеному режимі при $e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi_e)$ (рис. 9.15) вимушені складові струму та напруги на конденсаторі мають бути записані у вигляді:

$$i_{вим} = \frac{E_m}{z}\sin(\omega t + \psi_e - \varphi) = I_m \sin(\omega t + \psi_e - \varphi);$$

$$U_{C\,вим} = \frac{E_m X_C}{z}\sin\left(\omega t + \psi_e - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = U_{m_C}\sin\left(\omega t + \psi_e - \varphi - \frac{\pi}{2}\right),$$

де $z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$, $\varphi = arctg\frac{X_L - X_C}{R}$.

Вільні складові перехідних величин не залежать від форми вхідної дії, визначаються тільки параметрами кола та початковими умовами (енергією, накопиченою у реактивних елементах).

Для аперіодичного характеру перехідних процесів (випадок дійсних і різних коренів p_1 та p_2 характеристичного рівняння (9.28)):

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_e - \varphi) + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t};$$

$$u_C(t) = U_{m_C} \sin\left(\omega t + \psi_e - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t}.$$

Криві вимушеного, вільного та перехідного струмів для аперіодичного характеру перехідного процесу приведені на рис. 9.19, *а*.

У випадку коливального перехідного процесу перехідні величини приймають вигляд:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_e - \varphi) + I_0 e^{-\delta t} \sin(\omega_в t + \psi_i);$$

$$u_C(t) = U_{m_C} \sin\left(\omega t + \psi_e - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + U_0 e^{-\delta t} \sin(\omega_в t + \psi_u).$$

Як приклад, на рис. 9.19, *б* приведені вимушена та вільна складова $i(t)$, а також перехідний струм для коливального перехідного процесу. Частота вільних коливань $\omega_в$ може бути, в залежності від параметрів R, L та C, меншою, більшою або дорівнювати частоті ω джерела енергії. Якщо ці частоти близькі, то при суперпозиції вільної та вимушеної складових виникає биття коливань (рис. 9.19, *в*). Якщо згасання вільних коливань незначне, а усталений режим роботи кола близький до резонансу напруг ($\omega \cong \omega_0$), то, як свідчить більш детальний аналіз, наближено можна записати:

$$i(t) \cong I_m\left(1 - e^{-\delta t}\right)\sin(\omega t + \psi_e - \varphi);$$

$$u_C(t) \cong U_{m_C}\left(1 - e^{-\delta t}\right)\sin\left(\omega t + \psi_e - \varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Амплітуди струму та напруги у цьому випадку зростають від нуля до своїх усталених значень $I_m = E_m / z$ та $U_{m_C} = \left(E_m X_C\right) / z$ (рис. 9.19, *г*). Оскільки контур для нашого припущення високодобротний і при близькій до резонансної частоти $z \cong R$, то $X_C >> z$, і амплітуда напруги на конденсаторі може значно перевищити амплітуду E_m ЕРС джерела.

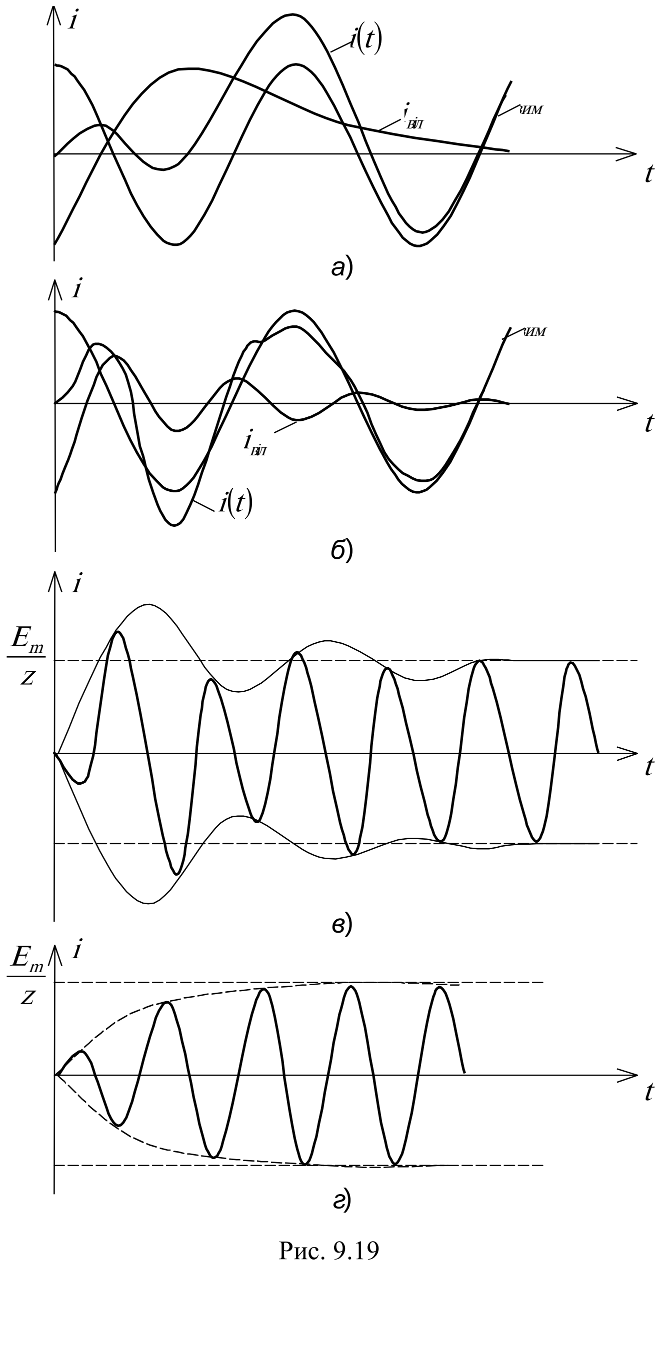


Рис. 9.19

9.7. Розрахунок перехідних процесів у розгалужених колах класичним методом

Розрахунки, приведені у попередніх параграфах даного розділу, показують, що перехідні процеси у простих електричних колах з одним та двома реактивними елементами описують розв'язком звичайних лінійних, у загальному випадку, неоднорідних диференційних рівнянь зі сталими коефіцієнтами відповідно першого та другого порядків. До рівнянь цього ж типу, тільки більш високого порядку, приводить і задача аналізу перехідних процесів у лінійних електричних колах з певним числом зосереджених елементів. Їх загальний розв'язок для заданих початкових умов знаходять за правилами, проілюстрованими на прикладах аналізу перехідних процесів у простих електричних колах.

Розглянемо більш детально загальні засади такого розрахунку.

Перехідний процес у розгалуженому електричному колі n-го порядку описують системою диференційних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, загальний розв'язок яких шукають у вигляді суми вимушеної та вільної складових.

Під ***порядком кола*** мають на увазі найбільший порядок диференційних рівнянь, якими описують змінні величини кола. Порядок диференційних рівнянь кола n визначається кількістю індуктивностей та ємностей, для яких можна визначити незалежні одне від одного початкові умови. Маючи n початкових умов, можна розрахувати n сталих інтегрування, які містяться у розв'язку рівнянь n-го порядку.

Необхідну кількість рівнянь першого та другого законів Кірхгофа записують, виходячи з тих самих міркувань, що і при розрахунку усталених режимів у колах постійного чи змінного струмів. За тими ж правилами вибирають і незалежні контури та складають рівняння електричної рівноваги.

Усталений режим роботи кола після комутації обумовлює ***вимушені складові*** перехідних струмів та напруг. Для розрахунку цього режиму застосовують усі відомі методи розрахунку лінійних електричних кіл. Відмітимо лише, що вимушені складові не залежать від початкових умов, а параметри навантаження у колі впливають тільки на кількісні характеристики вимушених складових, але не на їх характер. Закон зміни у часі цих складових визначається вхідною вимушуючою дією – джерелом енергії.

Найскладніший етап розрахунку перехідних процесів у розгалуженому колі – визначення ***вільних складових***. Як відомо, ці складові є загальним розв'язком системи однорідних диференційних рівнянь кола. Щоб знайти цей розв'язок, необхідно скласти характеристичне рівняння та знайти його корені. Характеристичне рівняння можна отримати різними способами. Розглянемо їх на прикладі схеми, наведеної на рис. 9.20.

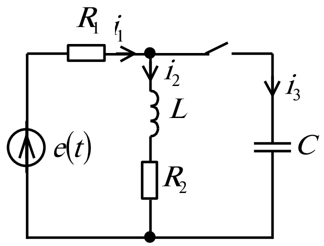


Рис. 9.20

Диференційні рівняння законів Кірхгофа для скомутованого кола мають вигляд:

$$\left.\begin{aligned} & i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\ & i_1 R_1 + L\frac{di_2}{dt} + i_2 R_2 = e(t) \\ & \frac{1}{C}\int i_3 dt - i_2 R_2 - L\frac{di_2}{dt} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{9.42}$$

Система однорідних диференційних рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} & i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\ & i_1 R_1 + L\frac{di_2}{dt} + i_2 R_2 = 0 \\ & \frac{1}{C}\int i_3 dt - i_2 R_2 - L\frac{di_2}{dt} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{9.43}$$

Далі користуємося стандартними прийомами, відомими з курсу математики. Приводимо систему диференційних рівнянь до одного рівняння відносно однієї невідомої величини. Виразимо струми i_1 та i_3 через i_2. Із другого рівняння системи (9.43):

$$i_1 = -\frac{L}{R_1}\frac{di_2}{dt} - \frac{R_2}{R_1}i_2 .$$

Продиференціюємо третє рівняння з системи (9.43):

$$\frac{1}{C}i_3 - R_2\frac{di_2}{dt} - L\frac{d^2 i_2}{dt^2} = 0\,.$$

Звідси:

$$i_3 = CR_2\frac{di_2}{dt} + LC\frac{d^2 i_2}{dt^2} = 0\,.$$

Підставивши i_1 та i_3 у рівняння першого закону Кірхгофа, маємо:

$$\frac{L}{R_1}\frac{di_2}{dt} + \frac{R_2}{R_1}i_2 + i_2 + CR_2\frac{di_2}{dt} + LC\frac{d^2 i_2}{dt^2} = 0\,.$$

Остаточно можна записати:

$$LC\frac{d^2 i_2}{dt^2} + \left(\frac{L}{R_1} + CR_2\right)\frac{di_2}{dt} + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)i_2 = 0\,. \qquad (9.44)$$

Цьому диференційному рівнянню другого порядку відповідає характеристичне рівняння:

$$LCp^2 + \left(\frac{L}{R_1} + CR_2\right)p + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) = 0\,.$$

Після нескладних перетворень характеристичне рівняння приймає вигляд:

$$p^2 R_1 LC + p\left(CR_1 R_2 + L\right) + R_1 + R_2 = 0\,. \qquad (9.45)$$

Можна одержати характеристичне рівняння дещо іншим способом. Для цього необхідно алгебраїзувати систему рівнянь (9.43), замінивши символом p операцію диференціювання, а символом $1/p$ – операцію інтегрування.

$$\left.\begin{array}{l} i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\ R_1 i_1 + \left(R_2 + pL\right)i_2 = 0 \\ -\left(R_2 + pL\right)i_2 + \dfrac{1}{pC}i_3 = 0 \end{array}\right\}. \qquad (9.46)$$

Ця система має ненульовий розв'язок, якщо її визначник дорівнює нулю, тобто:

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 + pL & 0 \\ 0 & -(R_2 + pL) & \dfrac{1}{pC} \end{vmatrix} = 0,$$

або $\dfrac{1}{pC}(R_2 + pL) + R_1(R_2 + pL) + R_1 \dfrac{1}{pC} = 0$.

Звідси характеристичне рівняння отримуємо у вигляді:

$$p^2 R_1 LC + p(CR_1 R_2 + L) + R_1 + R_2 = 0, \qquad (9.47)$$

що повністю співпадає з рівнянням (9.45).

Одначе існує значно простіший спосіб складання характеристичного рівняння, про який вже згадувалося при аналізі кіл першого порядку, з одним реактивним елементом. Для цього записують формулу для вхідного опору кола у комплексній формі $Z(j\omega)$, потім замінюють $j\omega$ на p і прирівнюють отриманий вираз $Z(p)$ до нуля. Характеристичне рівняння можна отримати, прирівнюючи до нуля вхідний опір $Z(p)$ відносно будь-якої вітки кола, вважаючи джерела ЕРС закороченими. Якщо у розгалуженому колі є джерело струму, то характеристичний опір відносно вітки з цим джерелом розглядати не можна. $Z(p)$ розраховують відносно будь-якої іншої вітки кола, вважаючи вітку з джерелом струму розімкненою. Для схеми, зображеної на рис. 9.20, можна записати:

$$Z(j\omega) = R_1 + \frac{(R_2 + j\omega L)\dfrac{1}{j\omega C}}{R_2 + j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C}},$$

або

$$Z(j\omega) = \frac{1}{j\omega C} + \frac{R_1(R_2 + j\omega L)}{R_1 + R_2 + j\omega L},$$

або, нарешті, у формі

$$Z(j\omega) = R_2 + j\omega L + \frac{R_1 \dfrac{1}{j\omega C}}{R_1 + \dfrac{1}{j\omega C}}.$$

Замінивши $j\omega = p$, прирівняємо $Z(p) = 0$ і отримаємо:

$$Z(p) = R_1 + \frac{(pL + R_2)\dfrac{1}{pC}}{pL + R_2 + \dfrac{1}{pC}} = 0 .$$

Звідси характеристичне рівняння:

$$p^2 R_1 LC + p(R_2 R_1 C + L) + R_1 + R_2 = 0 . \tag{9.48}$$

Неважко переконатися, що всі три варіанти запису $Z(j\omega)$ дають врешті одне і те ж саме характеристичне рівняння (9.45), (9.47), (9.48).

Отже, для кола n-го порядку характеристичне рівняння має вигляд:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0 = 0 . \tag{9.49}$$

Це рівняння має n коренів, серед яких можуть бути корені дійсні різні, дійсні однакові, комплексні спряжені. Дійсні частини коренів характеристичного рівняння завжди від'ємні, оскільки вільні складові перехідного процесу з часом згасають. Виходячи з цього, усі коефіцієнти a характеристичного рівняння повинні бути дійсними і додатними. Характеристичне рівняння непарного степеня завжди має хоча б один дійсний корінь, решта коренів можуть бути чи дійсними, чи комплексними спряженими. Характеристичне рівняння парного степеня має парну кількість дійсних чи комплексно спряжених коренів. Корені рівняння єдині для вільних складових будь-якого із струмів чи напруг електричного кола.

Степінь n характеристичного рівняння не може бути більша кількості накопичувачів енергії у колі після комутації. При цьому послідовно чи паралельно з'єднані індуктивності чи ємності еквівалентуються. Якщо характеристичне рівняння n-го порядку має n дійсних коренів, то вільна складова, наприклад, струму у будь-якій вітці:

$$i_{віл}(t)=\sum_{k=1}^{n}A_k e^{p_k t}\ . \tag{9.50}$$

Коли $p_k=-\delta_k$ – дійсний корінь кратності s, то розв'язок для цього кореня шукають у вигляді:

$$e^{-\delta_k t}\sum_{i=1}^{s}B_i t^{i-1}\ .$$

Для комплексно спряжених коренів $p_{k,k+1}=-\delta_k\pm j\omega_k$ відповідна складова вільного струму записується:

$$Ce^{-\delta_k t}\sin(\omega_k t+\psi).$$

Якщо характеристичне рівняння має порядок n, то для розв'язку необхідно знайти n сталих інтегрування. Для цього $n-1$ раз диференціюють рівняння виду (9.50) та розв'язують отриману систему для моменту часу $t=0$, використовуючи початкові умови, незалежні та залежні. Незалежними початковими умовами, нагадуємо, є значення струмів індуктивних котушок $i_L(0_-)$ та напруг на конденсаторах $u_C(0_-)$ на момент комутації.

Початкові значення струмів віток без індуктивностей та напруг на всіх елементах навантаження, крім конденсаторів, у момент комутації можуть змінюватися стрибкоподібно. Це – залежні початкові умови, які розраховують, виходячи із законів Кірхгофа та законів комутації.

Для визначення сталих інтегрування, як правило, необхідно мати значення похідних від змінних струмів та напруг на момент комутації. Якщо коло має котушку індуктивності, то значення похідної $i'_L(0_+)$ можна розрахувати через напругу на індуктивності у момент комутації, оскільки $u_L(0_+)=Li'_L(0_+)$. Якщо ж коло має вітку з конденсатором, то доцільно розрахунок розпочинати з визначення напруги u_C. У цьому випадку досить просто можна розрахувати $u_C(0_+)$ та $u'_C(0_+)=i_C(0_+)/C$.

9.8. Перехідні процеси при "некоректних" комутаціях

У всіх розглянутих нами раніше схемах розрахунок перехідних процесів виконувався з використанням законів комутації, які стверджують, що струм через індуктивність та напруга на ємності стрибком змінюватися не можуть. Але, разом з тим, у ряді випадків при комутаціях у електричних колах стрибки i_L та u_C відбуваються. Такі комутації називають "некоректними".

Для розрахунку перехідних процесів при “некоректних” комутаціях застосовують ***узагальнені закони комутації***:

$$\left.\begin{aligned}\psi_L(0_-) &= \psi_L(0_+)\\ q_C(0_-) &= q_C(0_+)\end{aligned}\right\}. \tag{9.51}$$

Перше з цих рівнянь свідчить про те, що потокозчеплення замкнутого контуру в перший момент після комутації ($t = 0_+$) дорівнює алгебричній сумі потокозчеплень індуктивних елементів цього контура, які вони мали безпосередньо до комутації, при $t = 0_-$.

За другим узагальненим законом комутації сума зарядів паралельно підключених конденсаторів до комутації ($t = 0_-$) дорівнює сумі їх зарядів безпосередньо після комутації ($t = 0_+$).

Розглянемо схему, приведену на рис. 9.27. У момент $t = 0$ у колі постійного струму вітка з резистором відключається.

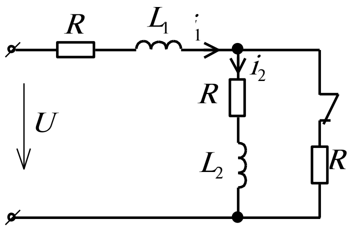


Рис. 9.27

Визначимо струм у скомутованій нерозгалуженій схемі.

$$i(t) = i_{вим} + i_{віл}.$$

Вимушена складова:

$$i_{вим} = \frac{U}{2R}.$$

Характеристичний опір кола:

$$Z(p) = 2R + p(L_1 + L_2).$$

Корінь характеристичного рівняння один:

$$p = -\frac{2R}{L_1 + L_2}.$$

Вільна складова:

$$i_{віл} = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{2R}{L_1+L_2}t}.$$

Розглянемо тепер початкові умови. До комутації у момент часу $t = 0_-$:

$$i_1(0_-) = \frac{U}{R + R/2} = \frac{2U}{3R};$$

$$i_2(0_-) = i_1(0_-)\frac{R}{2R} = \frac{U}{3R}.$$

У момент часу зразу ж після комутації:

$$i_1(0_+) = i_2(0_+) = i(0_+).$$

Отже, при комутації відбувається стрибкоподібна зміна струмів i_1 та i_2, що повинна супроводжуватися виникненням нескінченно великих напруг на індуктивностях. Це припущення правомірне, якщо вважати, що загальна тривалість комутації дорівнює нулю. Насправді ж $\Delta t = t_{0_-} - t_{0_+} > 0$. Це, а також існування міжвиткових ємностей, опору іскри між контактами при розмиканні контактів та інших факторів, приводить до того, що струми стрибком не змінюються і нескінченно великі напруги не виникають. Значення струму у колі у момент комутації $i(0_+)$ розраховують, використовуючи узагальнений закон комутації.

Для нашої схеми сумарне потокозчеплення до комутації, при $t = 0_-$:

$$\psi(0_-) = L_1 i_1(0_-) + L_2 i_2(0_-).$$

У момент часу після комутації:

$$\psi(0_+) = (L_1 + L_2) i(0_+).$$

Прирівнявши потокозчеплення, визначимо значення $i(0_+)$, необхідне для розрахунку сталої інтегрування A:

$$i(0_+) = \frac{L_1 i_1(0_-) + L_2 i_2(0_-)}{L_1 + L_2} = \frac{U}{3R}\left(\frac{2L_1 + L_2}{L_1 + L_2}\right).$$

Маємо у момент комутації:

$$i(0_+) = i_{вим} + A;$$

$$A = i(0_+) - i_{вим} = \frac{U}{3R}\left(\frac{2L_1 + L_2}{L_1 + L_2}\right) - \frac{U}{2R} = \frac{U}{R}\frac{L_1 - L_2}{6(L_1 + L_2)}.$$

Перехідний струм у колі, таким чином, можна записати у вигляді:

$$i(t) = \frac{U}{2R} + \frac{U}{R}\frac{L_1 - L_2}{6(L_1 + L_2)}e^{-\frac{2R}{L_1 + L_2}t}.$$

Проаналізуємо тепер перехідний процес у схемі, показаній на рис. 9.28, де U – постійна напруга.

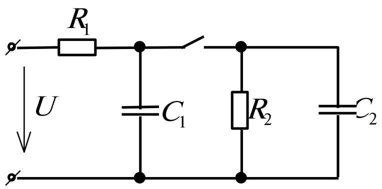


Рис. 9.28

Перехідну напругу на конденсаторі C_1 (чи, що одне і те саме, на C_2) записують у вигляді:

$$u_C(t) = u_{C\,вим} + u_{C\,віл}.$$

Вимушена складова:

$$u_{C\,вим} = \frac{U}{R_1 + R_2}R_2.$$

Характеристичне рівняння можна записати так:

$$Z(p) = \frac{R_1\frac{1}{pC_1}}{R_1 + \frac{1}{pC_1}} + \frac{R_2\frac{1}{pC_2}}{R_2 + \frac{1}{pC_2}} = \frac{pR_1R_2(C_1 + C_2) + R_1 + R_2}{(1 + pC_1R_1)(1 + pC_2R_2)}.$$

Корінь цього рівняння:

$$p = -\frac{R_1 + R_2}{R_1R_2(C_1 + C_2)}.$$

Вільна складова ємнісної напруги:

$$u_{C\,віл} = Ae^{pt}.$$

Для знаходження сталої інтегрування A необхідно розв'язати рівняння:

$$U_C(0) = \frac{U}{R_1 + R_2} R_2 + A.$$

Застосування другого закону комутації у вигляді $U_C(0_-) = U_C(0_+)$ приводить до ознак "некоректної" комутації. Справді, до комутації: $U_{C_1}(0_-) = U$; $u_{C_2}(0_-) = 0$, а для моменту $t = 0_+$ при паралельному з'єднанні конденсаторів напруга на їх обкладках повинна бути однаковою.

Використаємо для пошуків значення $U_C(0_+)$ узагальнений другий закон комутації:

$$q(0_-) = q(0_+).$$

До замикання ключа був заряджений лише конденсатор C_1, тому $q(0_-) = C_1 U_{C_1}(0_-) = C_1 U$.

Після комутації сумарний заряд конденсаторів схеми:

$$q(0_+) = C_1 U_{C_1}(0_+) + C_2 U_{C_2}(0_+) = (C_1 + C_2) U_C(0_+).$$

Прирівнявши заряди, отримаємо:

$$U_C(0_+) = \frac{U_{C_1}(0_-) C_1}{C_1 + C_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U.$$

Перехідна напруга на конденсаторі приймає вигляд:

$$u_C(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U + \frac{C_1 R_1 - C_2 R_2}{(C_1 + C_2)(R_1 + R_2)} U e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} t}.$$

Припущення про можливість стрибкоподібної зміни напруги на конденсаторах допускає виникнення нескінченно великих ємнісних струмів. Але, як і у випадку з індуктивними колами, врахуванні індуктивності з'єднувальних проводів, опорів контактів ключа, опорів проводів і т.д. унеможливлює появу нескінченних струмів у колі.