Чотириполюсники

Чотириполюсником називають частину електричного кола, яка має чотири полюси, за допомогою яких сполучається з джерелом енергії чи вузлами інших частин кола. Чотириполюсник – це передаточна ланка між джерелом живлення і навантаженням, які можуть змінюватися, але елементи чотириполюсника та схема їх внутрішнього з'єднання, залишаються незмінними.

Під таке визначення попадає багато електротехнічних та електронних пристроїв: трансформатори, підсилювачі, транзистори, фільтри, лінії передачі сигналів, кола регулювання різних параметрів машин і т. ін. Теорія чотириполюсників дає можливість єдиним методом аналізувати різні системи, не вдаючись до їх внутрішньої структури та принципу дії.

Виділяють наступні види чотириполюсників:

активні чотириполюсники мають у своєму складі джерела енергії (позначаються літерою А),

пасивні – джерел енергії в своєму складі не мають, складаються виключно з пасивних елементів (позначаються літерою П).

прохідні - чотириполюсники, з'єднані попарно своїм полюсами з двома зовнішніми електричними колами,

лінійні - чотириполюсники до складу яких входять тільки лінійні елементи,

нелінійні - чотириполюсники до складу яких входять тільки нелінійні елементи,

зворотні чотириполюсники – це такі чотириполюсники, для яких виконується принцип взаємності (відношення напруги на вході до струму на виході не залежить від того, яка пара затискачів обрана як вхідні).

Еквівалентні чотириполюсники – це такі чотириполюсники, при взаємній заміні яких вхідні та вихідні струми і напруги не змінюються.

Розрізняють чотириполюсники **симетричні та несиметричні.** Якщо при переміні місцями вхідних та вихідних полюсів струми та напруги у колі, що якого приєднаний чотириполюсник, не змінюються, то такий чотириполюсник називають ***симетричним***, в іншому разі – ***несиметричним***.

За схемою внутрішніх поєднань – Г-подібні, Т-подібні, П-подібні (рис. 1)

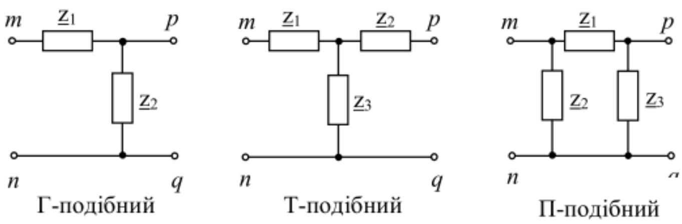

Рис.1 Типи чотириполюсників

Системи рівнянь чотириполюсників

Умовне зображення чотириполюсника показано на рис. 2. Він має два вхідних $(1, 1')$ та два вихідних $(2, 2')$ полюси. Напругу та струм на вході чотириполюсника позначають $\dot{U}_1, \dot{I}_1, \dot{I}'_1$, напругу та струм на виході – $\dot{U}_2, \dot{I}_2, \dot{I}'_2$. Запис $\dot{I}_1, \dot{I}_2$ використовують при прямій передачі чотириполюсника (зліва направо), при зворотній передачі використовують напрями струмів $\dot{I}'_1, \dot{I}'_2$ (справа наліво). Отже, робота чотириполюсника описується чотирма змінними величинами: двома напругами та двома струмами. Зв'язок між ними задається системою двох рівнянь, у яких дві величини вважаються заданими, дві інші – невідомими. Всього існує шість форм рівнянь чотириполюсника.

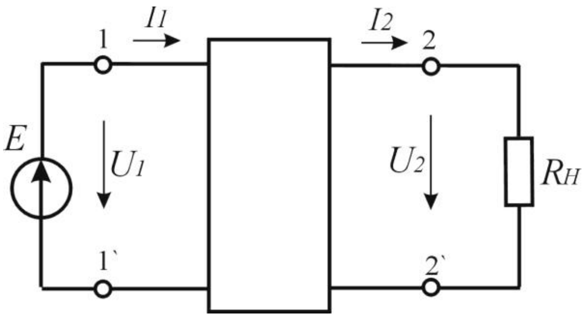

Рис. 2 Схема зображення чотириполюсника

Нехай схема чотириполюсника містить n незалежних контурів. За перший (рис. 2) оберемо контур, що містить джерело енергії на затискачах 1–1 , за другий – контур, що містить приймач, приєднаний до затискачів 2–2 . Будемо розглядати напругу на вхідних затискачах чотириполюсника $\dot{U}_1$ як вхідну напругу.Таке включення прийнято називати прямим.

$$
\begin{aligned}
&\dot{I}_1 = \dot{I}_{11}, \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_{22}, \\
&\underline{Z}_{11}\dot{I}_{11} + \underline{Z}_{12}\dot{I}_{22} + \underline{Z}_{13}\dot{I}_{33} + \ldots = \dot{U}_1, \\
&\underline{Z}_{21}\dot{I}_{11} + (\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{\text{н}})\dot{I}_{22} + \underline{Z}_{23}\dot{I}_{33} + \ldots = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\quad (1)
$$

Оскільки $\underline{Z}_{\text{н}}\dot{I}_{22} = \dot{U}_2$, то,

$$
\begin{aligned}
&\underline{Z}_{11}\dot{I}_{11} + \underline{Z}_{12}\dot{I}_{22} + \underline{Z}_{13}\dot{I}_{33} + \ldots = \dot{U}_1, \\
&\underline{Z}_{21}\dot{I}_{11} + \underline{Z}_{22}\dot{I}_{22} + \underline{Z}_{23}\dot{I}_{33} + \ldots = \underbrace{-\underline{Z}_{\text{н}}\dot{I}_{22}}_{-\dot{U}_2}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\quad (2)
$$

Ураховуючи, що праві частини всіх рівнянь, крім перших двох, дорівнюють нулю, одержимо на підставі принципу накладення таке розв'язання

$$
\begin{aligned}
&\dot{I}_1 = \dot{I}_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta}\dot{U}_1 + \frac{\Delta_{21}}{\Delta}(-\dot{U}_2) + \frac{\Delta_{13}}{\Delta}\cdot 0 + \ldots + 0, \\
&\dot{I}_2 = \dot{I}_{22} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta}\dot{U}_1 + \frac{\Delta_{22}}{\Delta}(-\dot{U}_2) + \frac{\Delta_{13}}{\Delta}\cdot 0 + \ldots + 0.
\end{aligned}
\quad (3)
$$

Коефіцієнти в останніх виразах мають розмірність провідності, уведемо відповідні позначення:

$$
\frac{\Delta_{11}}{\Delta} = \underline{Y}_{11}, \quad -\frac{\Delta_{22}}{\Delta} = \underline{Y}_{22}, \quad -\frac{\Delta_{21}}{\Delta} = \underline{Y}_{12}, \quad \frac{\Delta_{12}}{\Delta} = \underline{Y}_{21}.
$$

Тоді рівняння чотириполюсника, записані в Y-*формі*, що зв'язують струми з напругами, мають вигляд

$$
\begin{cases}
\dot{I}_1 = \underline{Y}_{11}\dot{U}_1 + \underline{Y}_{12}\dot{U}_2, \\
\dot{I}_2 = \underline{Y}_{21}\dot{U}_1 + \underline{Y}_{22}\dot{U}_2.
\end{cases}
\quad (4)
$$

Із чотирьох Y-*параметрів* незалежних три, тому що $\underline{Y}_{12} = -\underline{Y}_{21}$.

Розв'язавши рівняння (3) відносно напруг $\dot{U}_1$, $\dot{U}_2$, одержимо рівняння чотириполюсника, записані в Z-*формі*, що зв'язують напруги на вході та виході через відповідні струми

$$
\begin{cases}
\dot{U}_1 = \underline{Z}_{11}\dot{I}_1 + \underline{Z}_{12}\dot{I}_2, \\
\dot{U}_2 = \underline{Z}_{21}\dot{I}_1 + \underline{Z}_{22}\dot{I}_2,
\end{cases}
\quad (5)
$$

$$\underline{Z}_{11} = \frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}}, \quad \underline{Z}_{22} = \frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}},$$

$$\underline{Z}_{12} = \frac{-\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}}, \quad \underline{Z}_{21} = \frac{-\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}},$$

при цьому $\underline{Z}_{12} = -\underline{Z}_{21}$.

Найпоширенішою формою запису рівнянь чотириполюсника є така, при якій вхідні струм і напруга виражаються через вихідні напругу й струм. З рівнянь (3) можна записати

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \frac{\Delta_{22} \cdot \Delta}{\Delta \cdot \Delta_{12}} + \dot{I}_2 \frac{1}{\frac{\Delta_{12}}{\Delta}} = \dot{U}_2 \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{12}} + \dot{I}_2 \frac{\Delta}{\Delta_{12}}.$$

Підставимо (5) у перше рівняння (3) та отримаємо

$$\dot{I}_1 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta}\left(\dot{U}_2 \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{12}} + \dot{I}_2 \frac{\Delta}{\Delta_{12}}\right) - \dot{U}_2 \frac{\Delta_{21}}{\Delta} =$$

$$= \dot{U}_2\left(\frac{\Delta_{11} \cdot \Delta_{22}}{\Delta \cdot \Delta_{12}} - \frac{\Delta_{21}}{\Delta}\right) + \dot{I}_2 \frac{\Delta_{11} \cdot \Delta}{\Delta \cdot \Delta_{12}}.$$

Уведемо позначення:

$A_{11} = \dfrac{\Delta_{22}}{\Delta_{12}}$ – величина безрозмірна;

$A_{12} = \dfrac{\Delta}{\Delta_{12}}$ – величина, вимірювана в омах;

$A_{21} = \dfrac{\Delta_{11} \cdot \Delta_{22}}{\Delta \cdot \Delta_{12}} - \dfrac{\Delta_{21}}{\Delta}$ – величина, вимірювана у сименсах;

$A_{22} = \dfrac{\Delta_{11}}{\Delta_{12}}$ – величина безрозмірна.

При цьому будуть виконуватися співвідношення

$$\dot{U}_1 = A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2,$$

$$\dot{I}_1 = A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2. \quad (6)$$

Рівняння (5) називають рівнянням чотириполюсника в *А-параметрах,* які визначають вхідні напругу та струм через вихідні струм та напругу.

Таким чином, знаючи, що *Y, Z, A* – параметри залежать від параметрів елементів і конфігурації схеми чотириполюсника, можна сформулювати зв'язок вхід–вихід, не застосовуючи розрахунки струмів й напруг у внутрішній частині чотириполюсника, яка може являти собою досить складне електричне коло.

Існують інші співвідношення, що зв'язують у змішаній формі струми та напруги на вході і виході чотириполюсника. Наведемо без вивення рівняння чотириполюсника в *H* – і *G* – параметрах:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}.$$

У рівняннях типу B визначаються вихідні величини $\dot{U}_2,, \dot{I}'_2$ через задані величини на вході

$\dot{U}_1, \dot{I}'_1$:

$$\left.\begin{aligned}\dot{U}_2 = B_{11}\dot{U}_1 + B_{12}\dot{I}'_1\\ \dot{I}'_2 = B_{21}\dot{U}_1 + B_{22}\dot{I}'_1\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Коефіцієнти матриць усіх форм рівнянь - величини комплексні, оскільки зв'язують між собою комплексні напруги та струми. Один і той самий чотириполюсник можна описати всіма варіантами рівнянь, тому коефіцієнти матриць усіх шести форм зв'язані між собою. Формули взаємного зв'язку коефіцієнтів матриць чотириполюсника приведені у додатку 4. Рівняння чотириполюсника використовуються при описанні з'єднання чотириполюсників між собою. Яку з шести математичних моделей того чи іншого чотириполюсника застосовувати, залежить від конкретних обставин.

Рівняння чотириполюсника в *A*-формі

Тип A рівнянь чотириполюсника зручно використовувати для аналізу передачі енергії від вхідних полюсів до вихідних. Крім того, така форма рівнянь чотириполюсника використовується при описанні каскадного з'єднання чотириполюсників.

Коефіцієнти A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} часто також позначають відповідно A, B, C, D. Як комплексні величини, вони у загальному випадку залежать від частоти. Для пасивного прохідного чотириполюсника:

$$A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1,$$

тобто тільки три коефіцієнти у рівняннях (6.1) є незалежними. Для симетричного чотириполюсника, крім того: $A_{11} = A_{22}$

Якщо змінити напрям передачі енергії на протилежний, тобто від полюсів $2-2'$ до полюсів $1-1'$, то рівняння чотириполюсника у A- формі приймуть вигляд:

$$\dot{U}_1 = A_{11}\dot{U}_2 - A_{12}\dot{I}_2,$$

$$-\dot{I}_1 = A_{21}\dot{U}_2 - A_{22}\dot{I}_2.$$

$$\dot{U}_2 = \Delta_1 = A_{22}\dot{U}_1 + A_{12}\dot{I}_1,$$

$$\dot{I}_2 = \Delta_2 = A_{21}\dot{U}_1 + A_{11}\dot{I}_1,$$

Коефіцієнти A_{11} та A_{22} – безрозмірні, A_{12} має розмірність опору, A_{21} – провідності.

Коефіцієнти A чотириполюсника можна визначити експериментально, використовуючи режими холостого ходу та короткого замикання чотириполюсника. Розглянемо рівняння для прямого підключення:

$$\left.\begin{aligned}\dot{U}_1 = A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2\\ \dot{I}_1 = A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2\end{aligned}\right\}$$

Для розімкнених вихідних полюсів $2-2'$ струм $\dot{I} = 0$. Розділивши перше з рівнянь чотириполюсника на друге, отримаємо:

$$\underline{Z}_{1\text{х}} = \frac{\dot{U}_{1\text{х}}}{\dot{I}_{1\text{х}}} = \frac{A_{11}}{A_{21}}.$$

У режимі короткозамкнених полюсів $2-2'$:

$$\underline{Z}_{1\text{к}} = \frac{\dot{U}_{1\text{к}}}{\dot{I}_{1\text{к}}} = \frac{A_{12}}{A_{22}}.$$

Враховуючи, що при зворотному живленні A_{11} і A_{22} міняються місцями, можна одержати ще два рівняння. Вхідний опір з боку виводів 2-2 у режимі холостого ходу

$$\underline{Z}_{2\text{х}} = \frac{\dot{U}_{2\text{х}}}{\dot{I}_{2\text{х}}} = \frac{A_{22}}{A_{21}}.$$

Вхідний опір чотириполюсника з боку виводів 2-2 у режимі короткого замикання

$$\underline{Z}_{2к} = \frac{\dot{U}_{2к}}{\dot{I}_{2к}} = \frac{A_{12}}{A_{11}}.$$

Опори $Z_{1к}$, $Z_{1х}$, $Z_{2к}$, $Z_{2х}$ називають *параметрами короткого замикання та холостого ходу*. Виразимо *A*–параметри через ці опори.

$$\underline{Z}_{2х} - \underline{Z}_{2к} = \frac{A_{22}}{A_{21}} - \frac{A_{12}}{A_{11}} = \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}{A_{21}A_{11}} = \frac{1}{A_{21}A_{11}}.$$

Після спрощення

$$\frac{\underline{Z}_{1х}}{\underline{Z}_{2х} - \underline{Z}_{2к}} = \frac{A_{11}/A_{21}}{1/A_{21}A_{11}} = A_{11}^2,$$

$$A_{11} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1х}}{\underline{Z}_{2х} - \underline{Z}_{2к}}}. \quad A_{12} = A_{11}\underline{Z}_{2к}, \quad A_{21} = \frac{A_{11}}{\underline{Z}_{1х}}, \quad A_{22} = \frac{A_{11}}{\underline{Z}_{1х}}\underline{Z}_{2х}.$$

Параметри холостого ходу та короткого замикання зв'язані між собою. Дійсно:

$$Z_{1x} = \frac{A_{11}}{A_{21}} = \frac{Z_{1k}Z_{2x}}{Z_{2k}}$$

Тобто:

$$\frac{Z_{1x}}{Z_{1k}} = \frac{Z_{2x}}{Z_{2k}}$$

Для симетричного чотириполюсника:

$$Z_{1x} = Z_{2x}, Z_{1k} = Z_{2k}$$

Параметри холостого ходу та короткого замикання – комплексні вхідні опори. Для вимірювання їх величини та фази використовують схему, зображену на рис. 3.

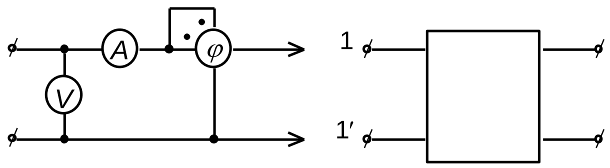

Рис. 3

Застосування фазометра у такій схемі має переваги перед використанням ватметра, оскільки за показами ватметра знак фази комплексного опору визначити не можливо.

Отже, для пасивного прохідного чотириполюсника можна скласти його математичну модель у формі рівнянь типу A, не знаючи його внутрішньої структури, а тільки маючи доступ для двох пар полюсів, щоб виміряти параметри холостого ходу та короткого замикання.

Навантажувальний режим чотириполюсника.

Нехай до виводів 2–2 чотириполюсника підключений опір навантаження Z_2. Від'єднаємо опір Z_2 (режим холостого ходу). Відрегулюємо вхідну напругу $\dot{U}_{1x}$ так, щоб напруга на вихідних розімкнутих затискачах $\dot{U}_{2x}$ дорівнювала напрузі $\dot{U}_2$ у навантажувальному режимі:

$$\dot{U}_{1х} = A_{11}\dot{U}_2, \quad \dot{I}_{1х} = A_{21}\dot{U}_2.$$

Замкнемо виводи 2–2 ($\dot{U}_2 = 0$, режим короткого замикання). Відрегулюємо вхідну напругу $\dot{U}_{1к}$ так, щоб струм на вихідних затискачах $\dot{I}_{2к}$ дорівнював струму $\dot{I}_2$ у навантажувальному режимі. Тоді

$$\dot{U}_{1к} = A_{12}\dot{I}_2, \quad \dot{I}_{1к} = A_{22}\dot{I}_2.$$

$$\dot{U}_{1х} + \dot{U}_{1к} = \dot{U}_1, \quad \dot{I}_{1х} + \dot{I}_{1к} = \dot{I}_1.$$

Отримані співвідношення показують, що робочий режим чотириполюсника (навантаження Z_2 підключено до виводів 2–2) можна відтворити шляхом накладення режимів холостого ходу та короткого замикання, тобто можна змоделювати навантажувальний режим, у деяких випадках потребуючий джерел великої потужності, накладенням крайніх навантажувальних режимів (холостого ходу та короткого замикання), коли так джерела не потрібні (навантаження не споживає потужності!).

Схеми заміщення чотириполюсника

Будь-який чотириполюсник можна звести до опорів або провідностей, з'єднаним за Т– або П–подібною схемою (рис.4). Еквівалентною схемою заміщення реального чотириполюсника називається найпростіший триелементний чотириполюсник (Т– або П–подібний), що має такі самі *Z*, *Y* або *A*–параметри, як і заданий чотириполюсник Одержимо елементи Z_1, Z_2 та Z_3 T - подібної схеми заміщення чотириполюсника. Позначивши вхідні та вихідні напруги та струми, запишемо рівняння законів Кірхгофа.

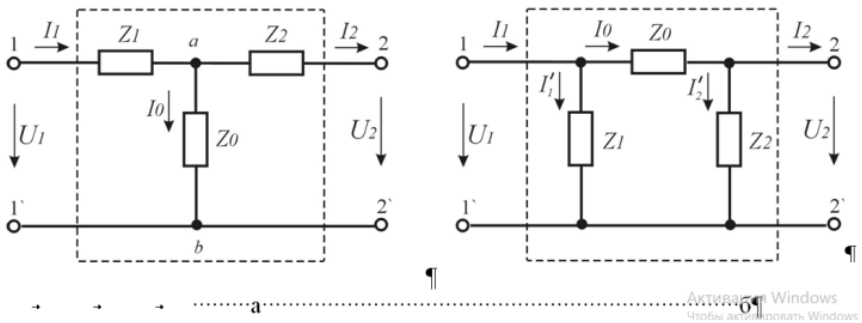

Рис. 4 Схеми заміщення чотириполюсників:
а) – Т-подібна, б) – П-подібна

За другим законом Кірхгофа:

$$\dot{U}_1 = Z_2\dot{I}_2 + Z_1\dot{I}_1 + \quad \dot{U}_2$$

За першим законом Кірхгофа: $\dot{I}_1 = \dot{I}_0 + \dot{I}_2$

За законом Ома:

$$\dot{I}_0 = \frac{Z_2\dot{I}_2 + \dot{U}_2}{Z_0}$$

Підставивши значення струму $\dot{I}_0$ у перше та друге рівняння, одержимо:

$$\dot{U}_1 = \left(\dot{I}_2 + \frac{Z_2\dot{I}_2 + \dot{U}_2}{Z_0}\right)Z_1 + Z_2\dot{I}_2 + \quad \dot{U}_2$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_2\frac{Z_2}{Z_0} + \frac{\dot{U}_2}{Z_0}$$

Згрупуємо коефіцієнти і прирівняємо їх до коефіцієнтів A:

$$\dot{U}_1 = \left(1 + \frac{Z_1}{Z_0}\right)\dot{U}_2 + (Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1Z_2}{Z_0})I_2$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2(1 + \frac{Z_2}{Z_0}) + \frac{\dot{U}_2}{Z_0}$$

Отже:

$$A_{11} = 1 + \underline{Z}_1\underline{Y}_0, \quad A_{12} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1\underline{Z}_2\underline{Y}_0,$$

$$A_{21} = \underline{Y}_0, \quad A_{22} = 1 + \underline{Z}_2\underline{Y}_0.$$

$$Z_1 = \frac{A_{11} - 1}{A_{21}},\ Z_2 = \frac{A_{22} - 1}{A_{21}},\ Z_0 = \frac{1}{A_{21}}$$

Для симетричного чотириполюсника ($A_{11} = A_{22}$) $Z_1 = Z_2$.

Провівши аналогічні дії, можна одержати подібні співвідношення для П-подібної схеми чотириполюсника:

$$A_{11} = 1 + \underline{Y}_2 \underline{Z}_0, \qquad A_{12} = \underline{Z}_0,$$
$$A_{21} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_1 \underline{Y}_2 \underline{Z}_0, \quad A_{22} = 1 + \underline{Y}_1 \underline{Z}_0.$$

Параметри елементів П- подібної схеми заміщення

$$\underline{Z}_0 = A_{12}, \quad \underline{Y}_1 = \frac{A_{22} - 1}{A_{12}}, \quad \underline{Y}_2 = \frac{A_{11} - 1}{A_{12}}.$$

Два чотириполюсники еквівалентні, якщо у них однакові *А*–параметри. Отже, якщо відомі *А*–параметри якогось чотириполюсника, то його можна замінити на еквівалентну йому Т– або П–подібну схеми заміщення, якщо визначити параметри цих схем заміщення

$$A_{11} = 1 + \frac{Z_1}{Z_3}; \; A_{12} = Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3}; \quad A_{21} = \frac{1}{Z_3}; \; A_{22} = 1 + \frac{Z_2}{Z_3}.$$

Для симетричного чотириполюсника $A_{11} = A_{22}$, тому $Z_1 = Z_2$. Отже, для симетричного чотириполюсника A_{11} та A_{22}. Таким чином, симетричний чотириполюсник характеризується двома незалежними параметрами.

Характеристичні параметри чотириполюсника

У роботі багатьох пристроїв використовують чотириполюсники, які, будучи включеними між джерелом енергії та навантаженням, мають вхідний опір рівним опору навантаження, тобто не трансформують опір навантаження.

Прохідний чотириполюсник характеризується двома опорами Z_{c1} та Z_{c2}, які зв'язані між собою такою умовою: якщо один із цих двох опорів використати як навантаження чотириполюсника ($Z_н = Z_{c2}$), то вхідний опір чотириполюсника буде дорівнювати другому із цих опорів ($Z_{вх1} = Z_{c1}$). Такі два опори називають ***характеристичними***.

Якщо чотириполюсник навантажений на характеристичний опір, то таке навантаження називають ***узгодженим***.

Запишемо рівняння для режиму узгодженого навантаження:

$$Z_{c1} = \frac{A_{11} Z_{c2} + A_{12}}{A_{21} Z_{c2} + A_{22}}, \quad Z_{c2} = \frac{A_{22} Z_{c1} + A_{12}}{A_{21} Z_{c1} + A_{11}}$$

Спільний розв'язок цих рівнянь відносно величин Z_{c1} та Z_{c2} дає:

$$Z_{c1} = \sqrt{\frac{A_{11} A_{12}}{A_{21} A_{22}}}; \; Z_{c2} = \sqrt{\frac{A_{22} A_{12}}{A_{21} A_{11}}}.$$

Для симетричного чотириполюсника $A_{11} = A_{22}$, тому такий чотириполюсник має один характеристичний опір $Z_{c1} = Z_{c2} = Z_c = \sqrt{A_{12}/A_{21}}$.

Проаналізувавши роботу симетричного чотириполюсника у режимі узгодженого навантаження. Дійшли висновку, що вхідні величини зв'язані з вихідними єдиним коефіцієнтом: $A_{11} + \sqrt{A_{12} A_{21}}$. Цю величину позначають як e^{Γ}, де Г – ***стала передачі*** чотириполюсника.

Отже:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 e^{\Gamma},$$
$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 e^{\Gamma}$$

де $e^{\Gamma} = A_{11} + \sqrt{A_{12} A_{21}}$, або $\Gamma = ln\left(A_{11} + \sqrt{A_{12} A_{21}}\right)$.

Стала передачі Г – величина комплексна, тобто: Г=А+jВ

Тут A називають ***сталою згасання*** чи коефіцієнтом згасання, B – ***сталою*** чи коефіцієнтом ***фази***.

Стала згасання A дає можливість оцінити зміну величини напруги після проходження сигналу через чотириполюсник. Одиниця вимірювання згасання – непер (Нп). Стала згасання $A = 1$ Нп, якщо напруга (струм) на виході чотириполюсника, який навантажений узгоджено, у $e \approx 2{,}72$ рази менше, чим на вході.

У багатьох випадках для інженерних підрахунків використовується позасистемна одиниця згасання – децибел:

$$A_{дБ} = 20lg\frac{U_1}{U_2} = 20lg\frac{I_1}{I_2} = 10lg\frac{P_1}{P_2}$$

Якщо U_1 більша за U_2 у десять разів, то згасання складає 20 дБ, якщо $U_1/U_2 = 100$, то $A_{дБ} = 40$ і т.д.

Коефіцієнт фази B з рівнянь: $B = \psi_{u_1} - \psi_{u_2} = \psi_{i_1} - \psi_{i_2}$ показує зсув фаз між напругами (чи струмами) на вході та на виході чотириполюсника. Одиниця вимірювання B – радіани.

Характеристичний опір та сталу передачі часто називають вторинними параметрами чотириполюсника.

Для несиметричного чотириполюсника стала передачі A визначається за формулою:

$$\Gamma = ln\left(\sqrt{A_{11}A_{22}} + \sqrt{A_{12}A_{21}}\right)$$

Схеми з'єднання чотириполюсників

Чотириполюсники можуть з'єднуватися між собою певним чином. Наявність у чотириполюсників двох пар незалежних полюсів дозволяє здійснити п'ять можливих схем з'єднань: паралельна, послідовна, паралельно-послідовна, послідовно-паралельна та каскадна. Виконуючи операції еквівалентного перетворення, два чи кілька з'єднаних між собою чотириполюсники можна замінити одним еквівалентним і отримати для нього відповідну систему рівнянь. Коротко розглянемо способи сполучення чотириполюсників.

Послідовне сполучення передбачає, що вхідні та вихідні струми чотириполюсників є однаковими.

Послідовне з'єднання чотириполюсників

Послідовне з'єднання двох чотириполюсників зображене на рис. 5. Для такого виду з'єднання справедливі співвідношення

$$I_1 = I_{1a} = I_{1b},\ I_2 = I_{2a} = I_{2b},\ U_1 = U_{1a} + U_{1b},\ U_2 = U_{2a} + U_{2b}.$$

Для знаходження U_{1a}, U_{2a}, U_{1b}, U_{2b} доцільно скористатися Z-параметрами пасивного чотириполюсника

$$\begin{Vmatrix} \dot{U}_{1a} \\ \dot{U}_{2a} \end{Vmatrix} = \|\underline{Z}_a\| \cdot \begin{Vmatrix} \dot{I}_{1a} \\ \dot{I}_{2a} \end{Vmatrix},\ \text{де}\ \|\underline{Z}_a\| = \begin{Vmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{Vmatrix};$$

$$\begin{Vmatrix} \dot{U}_{1b} \\ \dot{U}_{2b} \end{Vmatrix} = \|\underline{Z}_b\| \cdot \begin{Vmatrix} \dot{I}_{1b} \\ \dot{I}_{2b} \end{Vmatrix},\ \text{де}\ \|\underline{Z}_b\| = \begin{Vmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{Vmatrix}.$$

На основі одержаних співвідношень маємо

$$\begin{Vmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{Vmatrix} = (\|\underline{Z}_a\| + \|\underline{Z}_b\|) \cdot \begin{Vmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{Vmatrix} = \|\underline{Z}_e\| \cdot \begin{Vmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{Vmatrix}$$

У цьому виразі матриця еквівалентного чотириполюсника Z_e дорівнює сумі матриць окремих чотириполюсників, з'єднаних послідовно. Таким чином, цю матрицю можна представити як параметри деякого одного еквівалентного чотириполюсника, одержаного послідовним з'єднанням двох вихідних.

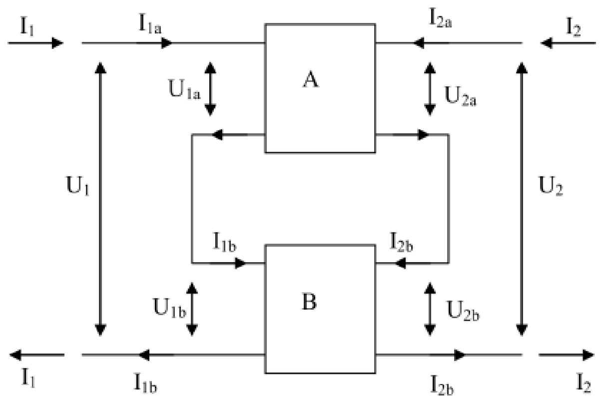

Рис. 5 Послідовне з’єднання чотириполюсників

Отже, при послідовному з’єднанні чотириполюсників додаються їх Z-параметри.

Паралельне з’єднання чотириполюсників

Паралельне з’єднання двох чотириполюсників зображено на рис. 6. З рисунка видно, що

$U_1 = U_{1a} = U_{1b}$, $U_2 = U_{2a} = U_2 b$, $I_1 = I_{1a} + I_{1b}$, $I_2 = I_{2a} + I_{2b}$.

У такому випадку скористуємося рівнянням чотириполюсника в Y-формі:

$$\begin{Vmatrix} \dot{I}_{1a} \\ \dot{I}_{2a} \end{Vmatrix} = \|\underline{Y}_a\| \cdot \begin{Vmatrix} \dot{U}_{1a} \\ \dot{U}_{2a} \end{Vmatrix}, \text{ де } \|\underline{Y}_a\| = \begin{Vmatrix} \underline{Y}_{11} \, \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} \, \underline{Y}_{22} \end{Vmatrix};$$

$$\begin{Vmatrix} \dot{I}_{1b} \\ \dot{I}_{2b} \end{Vmatrix} = \|\underline{Y}_b\| \cdot \begin{Vmatrix} \dot{U}_{1b} \\ \dot{U}_{2b} \end{Vmatrix}, \text{ де } \|\underline{Y}_b\| = \begin{Vmatrix} \underline{Y}_{11} \, \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} \, \underline{Y}_{22} \end{Vmatrix}.$$

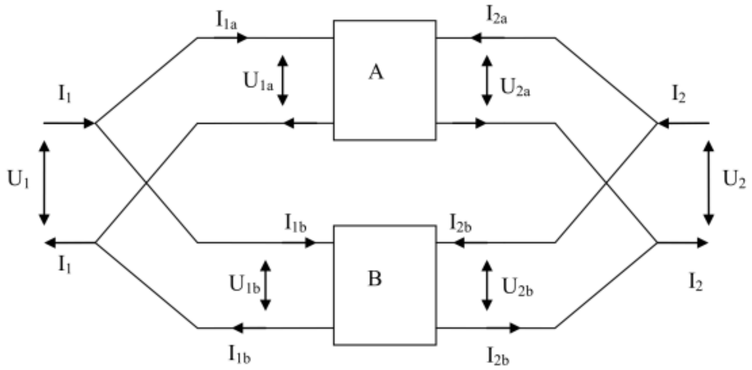

Рис. 6. Паралельне з’єднання чотириполюсників

На основі одержаних співвідношень запишемо

$$\begin{Vmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{Vmatrix} = (\|\underline{Y}_a\| + \|\underline{Y}_b\|) \cdot \begin{Vmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{Vmatrix} = \|\underline{Y}_e\| \cdot \begin{Vmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{Vmatrix}$$

У цьому виразі матрицю Y_e можна розглядати як параметри деякого одного еквівалентного чотириполюсника, одержаного паралельним з’єднанням двох вихідних. Отже, при паралельному з’єднанні чотириполюсників додаються Y-параметри.

Послідовно-паралельне з’єднання чотириполюсників

Послідовно-паралельне з’єднання чотириполюсників зображене на рис. 7.

При такому способі з’єднання з боку первинних затискачів чотириполюсники з’єднані послідовно, а з боку вторинних –паралельно. Для такого з’єднання виконуються співвідношення

$I_1 = I_{1a} = I_{1b}$, $U_1 = U_{1a} + U_{1b}$, $U_2 = U_{2a}$, $I_2 = I_{2a} + I_{2b}$.

Ця умова свідчить про доцільність використання H-параметрів для того, щоб виразити U_{1a}, I_{2a}; U_{1b}, I_{2b} через h-параметри та U_{2a}, I_{1a}; U_{2b}, I_{1b} відповідних чотириполюсників.

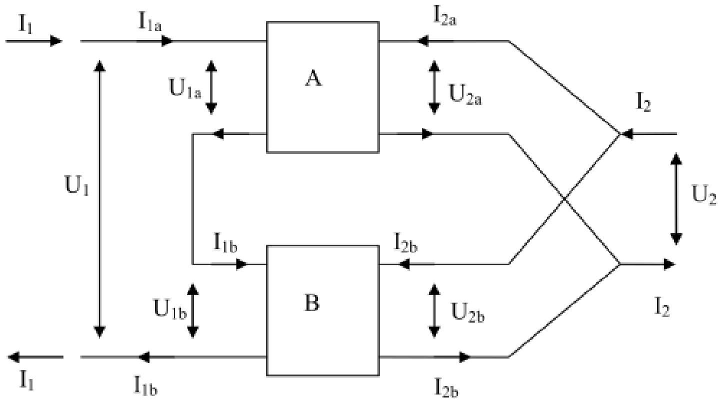

Рис. 7. Послідовно-паралельне з’єднання чотириполюсників

$$\begin{Vmatrix}\dot{U}_{1a}\\ \dot{I}_{2a}\end{Vmatrix} = \|\underline{H}_a\| \cdot \begin{Vmatrix}\dot{I}_{1a}\\ \dot{U}_{2a}\end{Vmatrix}, \text{ де } \|\underline{H}_a\| = \begin{Vmatrix}\underline{H}_{11}\,\underline{H}_{12}\\ \underline{H}_{21}\,\underline{H}_{22}\end{Vmatrix};$$

$$\begin{Vmatrix}\dot{U}_{1b}\\ \dot{I}_{2b}\end{Vmatrix} = \|\underline{H}_b\| \cdot \begin{Vmatrix}\dot{I}_{1b}\\ \dot{U}_{2b}\end{Vmatrix}, \text{ де } \|\underline{H}_b\| = \begin{Vmatrix}\underline{H}_{11}\,\underline{H}_{12}\\ \underline{H}_{21}\,\underline{H}_{22}\end{Vmatrix}.$$

Відповідно до одержаних співвідношень одержуємо

$$\begin{Vmatrix}\dot{U}_{1}\\ \dot{I}_{2}\end{Vmatrix} = (\|\underline{H}_a\| + \|\underline{H}_b\|) \cdot \begin{Vmatrix}\dot{I}_{1}\\ \dot{U}_{2}\end{Vmatrix} = \|\underline{H}_e\| \cdot \begin{Vmatrix}\dot{I}_{1}\\ \dot{U}_{2}\end{Vmatrix}.$$

У цьому виразі H_e можна розглядати як параметри деякого одного еквівалентного чотириполюсника, одержаного послідовно-паралельним з’єднанням двох вхідних. Отже, для аналізу такого виду з’єднання чотириполюсників додаються *H*-параметри.

Паралельно-послідовне з’єднання чотириполюсників

Паралельно-послідовне з’єднання чотириполюсників зображене на рис. 8.

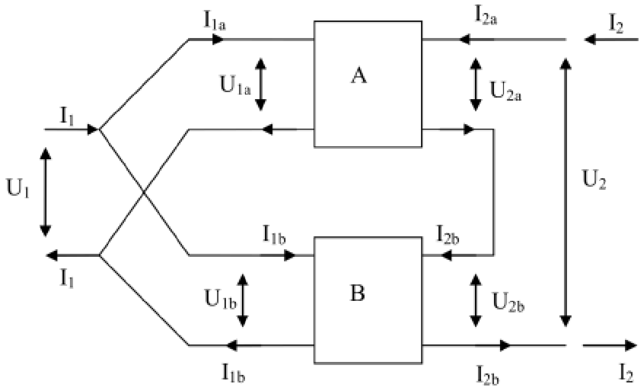

Рис. 8. Паралельно-послідовне з’єднання чотириполюсників

При такому способі з’єднання із боку первинних затискачів чотириполюсники з’єднані паралельно, а з боку вторинних – послідовно. Для такого з’єднання виконуються співвідношення

$$U_1 = U_{1a} = U_{1b},\ I_1 = I_{1a} + I_{1b},\ I_2 = I_{2a},\ U_2 = U_{2a} + U_2b.$$

Ця умова свідчить про доцільність використання G-параметрів для того, щоб виразити I_{1a}, U_{2a}, I_{1b}, U_{2b} через g-параметри та I_{2a}, U_{1a}, I_2b, U_{1b} відповідних чотириполюсників.

$$\left\|\begin{matrix}\dot{U}_{2a}\\ \dot{I}_{1a}\end{matrix}\right\| = \left\|\underline{G}_a\right\| \cdot \left\|\begin{matrix}\dot{U}_{1a}\\ \dot{I}_{2a}\end{matrix}\right\|, \text{ де } \left\|\underline{G}_a\right\| = \left\|\begin{matrix}\underline{G}_{11}\,\underline{G}_{12}\\ \underline{G}_{21}\,\underline{G}_{22}\end{matrix}\right\|;$$

$$\left\|\begin{matrix}\dot{U}_{2b}\\ \dot{I}_{1b}\end{matrix}\right\| = \left\|\underline{G}_b\right\| \cdot \left\|\begin{matrix}\dot{U}_{1b}\\ \dot{I}_{2b}\end{matrix}\right\|, \text{ де } \left\|\underline{G}_b\right\| = \left\|\begin{matrix}\underline{G}_{11}\,\underline{G}_{12}\\ \underline{G}_{21}\,\underline{G}_{22}\end{matrix}\right\|.$$

Відповідно до одержаних співвідношень одержуємо

$$\left\|\begin{matrix}\dot{U}_{2}\\ \dot{I}_{1}\end{matrix}\right\| = (\left\|\underline{G}_a\right\| + \left\|\underline{G}_b\right\|) \cdot \left\|\begin{matrix}\dot{U}_{1}\\ \dot{I}_{2}\end{matrix}\right\| = \left\|\underline{G}_e\right\| \cdot \left\|\begin{matrix}\dot{U}_{1}\\ \dot{I}_{2}\end{matrix}\right\|.$$

У цьому виразі Ge можна розглядати як параметри деякого одного еквівалентного чотириполюсника, одержаного паралельно-послідовним з’єднанням двох вхідних. Отже, для аналізу такого виду з’єднання чотириполюсників додаються G-параметри.

Каскадне з’єднання чотириполюсників

Каскадне з’єднання чотириполюсників зображене на рис. 9. Каскадне з’єднання чотириполюсника – це таке з’єднання, за якого вихідні затискачі попереднього чотириполюсника з’єднуються з вхідними затискачами наступного. Для такого виду з’єднання справедливі співвідношення

$$I_1 = I_{1a},\ I_{2a} = I_{1b},\ U_1 = U_{1a},\ U_{2a} = U_{1b},\ U_2 = U_{2b},\ I_2 = I_{2b}.$$

Для каскадного виду з’єднання доцільно використовувати A-параметри чотириполюсника. Виразимо вхідну напругу та вхідний струм кожного чотириполюсника через A-параметри:

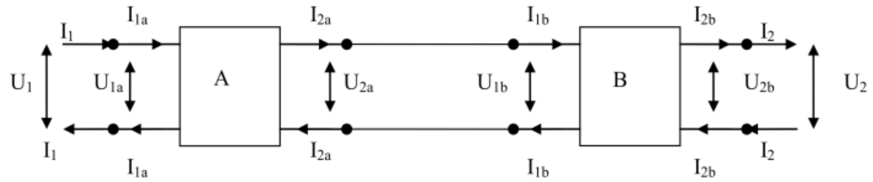

Рис. 9 Каскадне з’єднання чотириполюсників

$$\left\|\begin{matrix}\dot{U}_{1a}\\ \dot{I}_{1a}\end{matrix}\right\| = \left\|\underline{A}_a\right\| \cdot \left\|\begin{matrix}\dot{U}_{2a}\\ \dot{I}_{2a}\end{matrix}\right\|, \text{ де } \left\|\underline{A}_a\right\| = \left\|\begin{matrix}\underline{A}_{11}\,\underline{A}_{12}\\ \underline{A}_{21}\,\underline{A}_{22}\end{matrix}\right\|;$$

$$\left\|\begin{matrix}\dot{U}_{1b}\\ \dot{I}_{1b}\end{matrix}\right\| = \left\|\underline{A}_b\right\| \cdot \left\|\begin{matrix}\dot{U}_{2b}\\ \dot{I}_{2b}\end{matrix}\right\|, \text{ де } \left\|\underline{A}_b\right\| = \left\|\begin{matrix}\underline{A}_{11}\,\underline{A}_{12}\\ \underline{A}_{21}\,\underline{A}_{22}\end{matrix}\right\|.$$

На основі одержаних співвідношень запишемо

$$\left\|\begin{matrix}\dot{U}_{1}\\ \dot{I}_{1}\end{matrix}\right\| = (\left\|\underline{A}_a\right\| \times \left\|\underline{A}_b\right\|) \cdot \left\|\begin{matrix}\dot{U}_{2}\\ \dot{I}_{2}\end{matrix}\right\| = \left\|\underline{A}_e\right\| \cdot \left\|\begin{matrix}\dot{U}_{2}\\ \dot{I}_{2}\end{matrix}\right\|.$$

Отже, при каскадному з’єднанні параметри еквівалентного чотириполюсника знаходяться перемноженням матриць A-параметрів чотириполюсника, що утворюють цей каскад. Порядок перемноження повинен відповідати порядку включення чотириполюсників.

Таким чином, якщо два або кілька чотириполюсників з’єднані між собою, то коефіцієнти еквівалентного чотириполюсника можуть бути визначені через коефіцієнти складових чотириполюсників за формулами, які залежать від їх з’єднання.