Лекція 2
Розділ 1. Елементи лінійної алгебри
Тема 2. Матриці та визначники

1. Матриці та дії над ними

<u>**Означення 1**</u>. Прямокутну таблицю дійсних чисел вигляду

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

називають матрицею A розміру $m\times n$ (читається “ m ” на “ n ”).

Матриця A має m рядків і n стовпців. Елемент, який стоїть на перетині i -го рядка і j -го стовпця, позначають через a_{ij}. Часто використовується скорочений запис матриці $A=\{a_{ij}\}$ при $i=1,\ 2,\dots,m$ і $j=1,\ 2,\dots,n$.

Для позначення пропущених елементів матриці користуються трьома крапками. Так, наприклад, три крапки у першому рядку матриці A означають, що за елементами $a_{11},\ a_{12},\ a_{13}$ стоять a_{14}, a_{15} і так далі аж до a_{1j}, а потім від a_{1j} до a_{1n}. Аналогічно, у першому стовпці за елементами a_{11}, a_{21} послідовно стоять a_{31}, a_{41} і так далі до a_{i1}, а потім і до a_{m1}. Така форма запису дає чітке уявлення про елементи матриці, а також про її розміри, тобто про кількість рядків і стовпців.

Якщо $m=n$, тобто кількість рядків дорівнює кількості стовпців, матрицю A називають ***квадратною порядку*** m. У цьому випадку елементи $a_{11},\ a_{22},\ a_{33},\dots,a_{mm}$ називають діагональними, а їх суму $a_{11}+a_{22}+a_{33}+\dots+a_{mm}=\sum_{i=1}^{m}a_{ii}$ – слідом матриці.

Якщо всі недіагональні елементи квадратної матриці дорівнюють нулю, то таку матрицю називають ***діагональною***. Якщо всі діагональні елементи діагональної матриці дорівнюють 1, то таку діагональну матрицю називають ***одиничною*** матрицею порядку m :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ – одинична матриця.}$$

Матрицю, яка містить тільки один стовпчик, називають ***матрицею-стовпцем***. Наприклад, вираз $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ є матрицею-стовпцем m-го порядку або матрицею X розміру $m \times 1$. Матрицю, що містить тільки один рядок, називають матрицею-рядком. Наприклад, вираз $Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix}$ є матрицею-рядком n-го порядку або матрицею Y розміру $1 \times n$.

Матрицю, всі елементи якої дорівнюють нулю, називають ***нульовою***:

$$O = \{a_{ij} = 0\}, \quad i = 1,\ 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n.$$

Дві матриці $A = \{a_{ij}\}$ і $B = \{b_{ij}\}$ рівні, якщо вони одного розміру і відповідні елементи цих матриць співпадають: $a_{ij} = b_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, m;$ $i = 1, 2, \dots, n$.

Означення 1. Сумою двох прямокутних матриць $A = \{a_{ij}\}$ і $B = \{b_{ij}\}$ однакових розмірів ($i = 1,\ 2, \dots, m$; $j = 1,\ 2, \dots, n$) називається матриця $C = \{c_{ij}\}$ того ж розміру, кожен елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць A і B, тобто $C = A + B$, якщо

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \cdots, n.$$

Операція знаходження суми матриць називається додаванням матриць. Згідно з означенням 1 додавати можна тільки прямокутні матриці однакових розмірів. З означення додавання матриць безпосередньо випливає, що ця операція комутативна та асоціативна:

1. $A+B=B+A$;

2. $(A+B)+C=A+(B+C)$.

Операція додавання матриць природно поширюється на випадок будь-якої скінченної кількості доданків.

<u>Означення 2</u>. Добутком матриці $A=\{a_{ij}\}$, $i=1,\ 2,\ldots,m$; $j=1,\ 2,\ldots,n$ на дійсне число α називається матриця $C=\{c_{ij}\}$, $i=1,\ 2,\ldots,\ m$; $j=1,\ 2,\ldots,n$, кожен елемент якої дорівнює добутку відповідного елемента матриці A на число α, тобто $C=\alpha A$, якщо $c_{ij}=\alpha a_{ij}$, $i=1,\ 2,\ldots,m$; $j=1,\ 2,\ldots,n$.

Операція знаходження добутку матриці на число називається множенням матриці на число.

З означення добутку матриці на число випливає, що

1. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$;

2. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$;

3. $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$,

де A і B – прямокутні матриці однакових розмірів, а α і β – дійсні числа.

Різниця $A-B$ двох прямокутних матриць $A=\{a_{ij}\}$ і $B=\{b_{ij}\}$, $i=1,2,\ldots,m$; $j=1,2,\ldots,n$ вводиться за правилом

$$A-B=A+(-1)B\,,\quad A-B=\{a_{ij}-b_{ij}\}.$$

Добуток матриці A на матрицю B визначається тільки в тому випадку, коли кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B. Нехай дано матриці

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \quad \ldots \quad a_{in}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & \boxed{\begin{matrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{matrix}} & \ldots & b_{1r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & & \ldots & b_{nr} \end{pmatrix},$$

в яких виділено i рядок матриці A і j стовпчик матриці B.

Означення 3. Добутком двох прямокутних матриць A і B називається матриця $C = \{c_{ij}\}$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, r$, елемент c_{ij} якої дорівнює сумі добутків елементів *i*-го рядка матриці A на відповідні елементи *j*-го стовпця матриці B

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\ .$$

Операція знаходження добутку матриць називається множенням матриць.

З означення випливає, що матриця C має стільки рядків, скільки їх у матриці A і стільки стовпців, скільки стовпців у матриці B.

Приклад 1. Дано матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю $C = AB$.

Розв'язання. Добуток AB існує, оскільки число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B.

Тому $C = AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot4+0\cdot6 & 3\cdot7+0\cdot8 \\ 1\cdot4+1\cdot6 & 1\cdot7+1\cdot8 \\ 5\cdot4+2\cdot6 & 5\cdot7+2\cdot8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 21 \\ 10 & 15 \\ 32 & 51 \end{pmatrix}$.

Зауважимо, що для квадратних матриць A і B однакового порядку множення можливе. Проте, навіть у цьому частинному випадку множення матриць не є комутативним.

Так, наприклад,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}; \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Бачимо, що $AB \neq BA$.

Якщо $AB = BA$, то матриці A і B будемо називати перестановними або комутативними між собою.

Приклад 2. Дано матриці

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ і } D=\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}.$$

Знайти матриці AD і DA.

Розв'язання.

$$AD=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d_1a_{11} & d_2a_{12} & \dots & d_na_{1n} \\ d_1a_{21} & d_2a_{22} & \dots & d_na_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_1a_{n1} & d_2a_{n2} & \dots & d_na_{mn} \end{pmatrix}.$$

Аналогічно, $DA=\begin{pmatrix} d_1a_{11} & d_1a_{12} & \dots & d_1a_{1n} \\ d_2a_{21} & d_2a_{22} & \dots & d_2a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_na_{n1} & d_na_{n2} & \dots & d_na_{mn} \end{pmatrix}.$

Якщо $D=E$, тобто $d_1=d_2=\ldots=d_n=1$, отримуємо $AE=EA=A$.

Операція множення матриць асоціативна та дистрибутивна:

1. $(AB)C=A(BC)$;

2. $(A+B)C=AC+BC$;

3. $A(B+C)=AB+AC$.

Означення 4. Якщо рядки матриці A записати як стовпці (зберігаючи порядок), то отриману матрицю називають ***транспонованою*** до матриці A і позначають A^T. Відзначимо, що якщо A – матриця розміру $m\times n$, то A^T – матриця розміру $n\times m$.

2. Визначники другого та третього порядку

2.1. Перервемося тимчасово у дослідженні матриць з тим, щоб розвинути деякі аспекти теорії визначників, які знадобляться нам у подальшому вивченні властивостей матриць. Поняття визначника виникло у зв'язку з проблемою запису розв'язку системи лінійних рівнянь у вигляді формул.

Виклад теорії визначників доцільно розпочати з розгляду визначників другого порядку, які виникли при розв'язуванні та дослідженні системи двох лінійних алгебраїчних рівнянь з двома невідомими.

Нехай дано систему

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \qquad (1)$$

Пара чисел $x = x_0$, $y = y_0$ називається розв'язком системи (1), якщо вона перетворює в тотожність обидва рівняння цієї системи після заміни невідомих x, y відповідно числами x_0, y_0.

Для знаходження розв'язку системи (1) перетворимо її в таку систему, де кожне рівняння містить тільки одне невідоме. Для цього спочатку помножимо перше рівняння на b_2, друге – на $(-b_1)$ і додамо ці помножені рівняння почленно; потім перше рівняння помножимо на $(-a_2)$, друге – на a_1 і знову додамо. Після простих перетворень отримаємо

$$\begin{cases} (a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1 \\ (a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1. \end{cases} \qquad (2)$$

Покажемо, що за умови $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ система (2) рівносильна системі (1). Для цього помножимо перше рівняння системи (2) на a_1, друге – на b_1 і додамо; потім помножимо перше рівняння на a_2, друге – на b_2 і знову додамо. В результаті отримаємо

$$\begin{cases} (a_1b_2 - a_2b_1)(a_1x + b_1y) = (a_1b_2 - a_2b_1)c_1 \\ (a_1b_2 - a_2b_1)(a_2x + b_2y) = (a_1b_2 - a_2b_1)c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \qquad (3)$$

Отже, ми від системи (1) перейшли до системи (2), а від неї – знову до системи (1). Звідси випливає, що системи (1) і (2) рівносильні, тобто кожний розв'язок системи (1) одночасно є розв'язком системи (2) і навпаки.

Із системи (2) отримуємо єдиний розв'язок системи (1)

$$x_0 = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}; \quad y_0 = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}. \tag{4}$$

Перейдемо до встановлення правила, згідно з яким можна скласти дроби (4). Для цього з коефіцієнтів при невідомих системи (1) утворимо квадратну матрицю другого порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Перший рядок цієї матриці містить коефіцієнти першого рівняння, другий – коефіцієнти другого рівняння. Складемо два добутки "хрест – нахрест": $a_1 b_2$ і $a_2 b_1$. Якщо від першого добутку відняти другий, то ми отримаємо знаменник дробів (4)

$$D = a_1 b_2 - a_2 b_1. \tag{6}$$

Означення 1. Число D, яке визначається за формулою (6), називається визначником або детермінантом другого порядку матриці (5).

Визначник D прийнято позначати так:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \quad \text{або} \quad D = \det A. \tag{7}$$

Слід особливо наголосити на відмінності поняття матриці від поняття визначника матриці. Матриця A – це система 4-х чисел, а її визначник – це конкретне число, яке знаходиться за формулою (7).

Означення 2. Визначник D називається визначником системи (1).

У позначеннях визначників другого порядку чисельники формул (4) запишуться у такому вигляді

$$c_1 b_2 - c_2 b_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad a_1 c_2 - a_2 c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Тоді для формул (4) будемо мати

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}; \ y_0 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \qquad (9)$$

Формули (9) називаються формулами Крамера для системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими.

Отже, нами доведено наступну теорему.

Теорема 1. Якщо визначник системи (1) не дорівнює нулю, то ця система має єдиний розв'язок. Кожне невідоме є часткою двох визначників. Дільник цієї частки дорівнює визначнику системи, ділене – визначнику, який отримується з визначника системи заміною стовпця коефіцієнтів, що відповідає шуканому невідомому, стовпцем вільних членів рівнянь системи.

Користуючись формулою (7) легко довести наступні властивості визначника другого порядку.

Властивість 1. Визначник не змінить свого значення, якщо його рядки замінити стовпцями з тими ж номерами, тобто

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

<u>*Доведення*</u>. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_2 & b_2 \end{vmatrix}$, що й потрібно було довести.

Перетворення, яке полягає в заміні рядків визначника стовпцями з тими ж номерами, називається ***транспонуванням визначника***. Доведену властивість 1 можна сформулювати ще так.

Властивість 1′. Визначник не змінюється при транспонуванні.

Із властивості 1 випливає, що будь-яке твердження, яке стосується рядків визначника, буде справедливим для його стовпців і навпаки, тобто у визначнику рядки і стовпці є рівноправними. Виходячи з цього, нижче будемо формулювати і доводити властивості тільки для рядків визначника.

Властивість 2. При переставленні рядків (стовпців) визначник змінює лише знак, тобто

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}.$$

Доведення.

$$-\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = -\left(a_2 b_1 - a_1 b_2\right) = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Властивість 3. Визначник дорівнює нулю, якщо всі елементи деякого з його рядків (стовпців) дорівнюють нулю, наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Доведення. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = a_1 0 - b_1 0 = 0$.

Властивість 4. Визначник дорівнює нулю, якщо в ньому пропорційні (або рівні) відповідні елементи його рядків (стовпців), тобто

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ \alpha a_1 & \alpha b_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Доведення. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ \alpha a_1 & \alpha b_1 \end{vmatrix} = \alpha a_1 b_1 - \alpha a_1 b_1 = 0$, що й потрібно було довести.

Зауважимо, що рівність рядків маємо при $\alpha = 1$.

Властивість 5. Для того щоб помножити визначник на довільне число, достатньо помножити на це число елементи якогось одного рядка (стовпця), наприклад,

$$k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Доведення. $k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \left(ka_1\right) b_2 - a_2\left(kb_1\right) = \begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, що й потрібно було довести.

Проводячи доведення у зворотному напрямку, приходимо до такої властивості.

Властивість 6. Спільний множник елементів рядка (стовпця) можна винести за знак визначника.

Властивість 7. Визначник не змінить свого значення, якщо до елементів деякого рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне і те саме число, наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + ka_2 & b_1 + kb_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

<u>*Доведення*</u>.

$$\begin{vmatrix} a_1 + ka_2 & b_1 + kb_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 + ka_2 b_2 - a_2 b_1 - ka_2 b_2 = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Властивість 8. Якщо кожен елемент деякого рядка (стовпця) є сумою двох доданків, то такий визначник можна подати у вигляді суми двох визначників. У одного з цих визначників відповідний рядок (стовпець) складається з перших доданків, а у другого – з других доданків, наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_1' + a_1'' & a_2' + a_2'' \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1' & a_2' \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1'' & a_2'' \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

<u>*Доведення*</u>.

$$\begin{vmatrix} a_1' + a_1'' & a_2' + a_2'' \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \left(a_1' b_2 - b_1 a_2' \right) + \left(a_1'' b_2 - b_1 a_2'' \right) = \begin{vmatrix} a_1' & a_2' \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1'' & a_2'' \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

що і потрібно було довести.

Ця властивість поширюється на довільну кількість доданків.

Властивість 9. Якщо визначник другого порядку дорівнює нулю, але серед його елементів є відмінні від нуля, то елементи одного з його рядків дорівнюють відповідним елементам другого рядка, помноженим на один і той же множник, тобто рядки пропорційні:

$$a_2 = \alpha a_1, \; b_2 = \alpha b_1. \qquad (10)$$

<u>*Доведення*</u>. Нехай $a_1 \neq 0$ і $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \Leftrightarrow\; b_2 - \dfrac{a_2}{a_1} b_1 = 0 \;\Leftrightarrow\; b_2 = \dfrac{a_2}{a_1} b_1$. Позначимо $\dfrac{a_2}{a_1} = \alpha$, тоді $b_2 = \alpha b_1$. Отже, $a_2 = \alpha a_1$, $b_2 = \alpha b_1$, що й потрібно було довести.

Нехай визначник системи (1) $D=0$. Тоді згідно з властивістю 9 справедливі рівності (10). Тому для лівих частин рівнянь системи (1), можна записати

$$a_2x+b_2y=\alpha\left(a_1x+b_1y\right). \tag{11}$$

Можливі такі випадки.

1. Вільні члени системи (1) c_1 і c_2 зв'язані тим же співвідношенням, тобто $c_2=\alpha c_1$. У цьому випадку друге рівняння системи (1) є наслідком першого, тобто система (1) зводиться до одного незалежного рівняння – першого. Одне рівняння з двома невідомими має безліч розв'язків. Дійсно, одному з невідомих, наприклад y, можна надати довільного значення і визначити з першого рівняння системи (1) відповідне значення x; ці значення будуть задовольняти також і другому рівнянню системи (1), отже, будуть розв'язком системи (1).

2. Вільні члени c_1 і c_2 зв'язані іншим співвідношенням, тобто $c_2\neq\alpha c_1$. Покажемо, що в цьому випадку система (1) не має розв'язків.

Нехай числа x_0, y_0 задовольняють першому рівнянню системи (1)

$$a_1x_0+b_1y_0=c_1. \tag{12}$$

Помножимо тотожність (12) на α:

$$\alpha\left(a_1x_0+b_1y_0\right)=\alpha c_1. \tag{13}$$

Враховуючи рівність (11), рівність (13) можна подати у вигляді

$$a_2x_0+b_2y_0=\alpha c_1\neq c_2. \tag{14}$$

Отже, жоден з розв'язків першого рівняння системи (1) не задовольняє другому рівнянню системи (1) і навпаки. Система (1) у цьому випадку не має розв'язку.

Приклад 1. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases}2x-3y=-7\\5x-4y=12.\end{cases}$$

Розв'язання. Складемо матрицю з коефіцієнтів при невідомих:

$A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 5 & 4\end{pmatrix}$. Знайдемо визначник цієї матриці: $D=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 5 & 4\end{vmatrix}=2\cdot4-(-3)\cdot5=23$. Оскільки $D\neq0$, то можна скористатись формулами (9). Визначимо чисельники формул (9):
$D_1=\begin{vmatrix}-7 & -3\\ 12 & 4\end{vmatrix}=-28+36=8$, $D_2=\begin{vmatrix}2 & -7\\ 5 & 12\end{vmatrix}=24+35=59$. Отже, $x=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{8}{23}$, $y=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{59}{23}$.

2.2. Вище ми розглянули операцію, яка кожній квадратній матриці другого порядку ставить у відповідність дійсне число – визначник цієї матриці.

Розглянемо тепер квадратну матрицю A третього порядку

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}. \tag{1}$$

<u>Означення 1</u>. Визначником третього порядку матриці A називається число, яке визначається за формулою

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}. \tag{2}$$

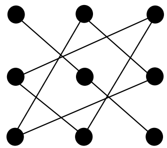
Рівність (2) називається розкладом визначника D за елементами першого рядка.

Розкриємо кожен з визначників другого порядку в рівності (2). В результаті отримаємо такий вираз для визначника третього порядку:

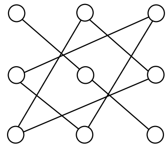
$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}. \tag{3}$$

Спробуємо розібратися зі структурою визначника третього порядку. Права частина рівності (3) містить три добутки чисел зі знаком плюс і три добутки чисел зі знаком мінус. Існує закономірність, яка називається ***правилом***

діагоналей і полягає в наступному: добуток чисел, розташованих на головній діагоналі визначника (добуток чисел a_{11}, a_{22}, a_{33}), береться зі знаком плюс. Зі знаком плюс беруться також два добутки чисел, розташованих у вершинах двох рівнобедрених трикутників з основами, паралельними головній діагоналі, і з вершинами у протилежних кутах. Три добутки, які знаходяться за тим же правилом, але по відношенню другої діагоналі визначника, беруться зі знаком мінус. Схематично описане правило можна зобразити так:



"+"



"–"

Наприклад,

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}=1\cdot1\cdot5+2\cdot2\cdot3+2\cdot4\cdot(-1)-(-1)\cdot1\cdot3-1\cdot2\cdot4-2\cdot2\cdot5=-16.$$

<u>Означення 2</u>. Мінором деякого елемента визначника третього порядку називається визначник другого порядку, який отримується з визначника третього порядку шляхом викреслення рядка і стовпця, на перетині яких знаходиться даний елемент.

Так, наприклад, мінором елемента a_{32} є визначник $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$. Мінор елемента a_{ij} будемо позначати M_{ij}.

<u>Означення 3</u>. Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} називається його мінор, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$. Алгебраїчне доповнення будемо позначати A_{ij}.

Згідно з означенням 3 маємо

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}. \qquad (4)$$

Наприклад, алгебраїчним доповненням елемента a_{11} є число $A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, а алгебраїчним доповненням елемента a_{23} – число $A_{23}=\left(-1\right)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

Запишемо розклад визначника D за елементами першого рядка (див. (2)) у термінах алгебраїчних доповнень

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}= \qquad (5)$$

$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}.$$

Доведемо справедливість формули (5) для будь-якого рядка (стовпця) визначника третього порядку.

Теорема 1. Визначник третього порядку можна розкласти за елементами довільного його рядка або стовпця, іншими словами, визначник третього порядку дорівнює сумі добутків елементів довільного його рядка або стовпця на їх алгебраїчні доповнення, тобто

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}; \qquad D=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31};$$
$$D=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}; \qquad D=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}; \qquad (6)$$
$$D=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}; \qquad D=a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}.$$

Доведення. Доведення всіх формул (6) (справедливість 1-ї випливає з означення) проводиться за однією і тією ж схемою. Доведемо, наприклад, рівність

$$D=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}. \qquad (7)$$

Маємо

$$a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}=-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}= \qquad (8)$$

$$=-a_{21}a_{12}a_{33}+a_{21}a_{13}a_{32}+a_{22}a_{11}a_{33}-a_{22}a_{13}a_{31}-a_{23}a_{11}a_{32}+a_{23}a_{12}a_{31}.$$

Порівнюючи рівності (8) і (3), переконуємося у справедливості рівності (7). Теорему доведено.

Теорема 2. Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю, тобто

$$\begin{aligned}
&a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=0, \quad && a_{11}A_{12}+a_{21}A_{22}+a_{31}A_{32}=0,\\
&a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}=0, && a_{11}A_{13}+a_{21}A_{23}+a_{31}A_{33}=0,\\
&a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13}=0, && a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+a_{32}A_{31}=0,\\
&a_{21}A_{31}+a_{22}A_{32}+a_{23}A_{33}=0, && a_{12}A_{13}+a_{22}A_{23}+a_{32}A_{33}=0,\\
&a_{31}A_{11}+a_{32}A_{12}+a_{33}A_{13}=0, && a_{13}A_{11}+a_{23}A_{21}+a_{33}A_{31}=0,\\
&a_{31}A_{21}+a_{32}A_{22}+a_{33}A_{23}=0, && a_{13}A_{12}+a_{23}A_{22}+a_{33}A_{32}=0.
\end{aligned} \tag{9}$$

<u>*Доведення*</u>. Доведення проводиться за тією ж схемою, що і доведення теореми 1. Доведемо, наприклад, рівність

$$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=0.$$

Справді,

$$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=-a_{11}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{12}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{13}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=$$

$$=-a_{11}a_{12}a_{33}+a_{11}a_{13}a_{32}+a_{12}a_{11}a_{33}-a_{12}a_{13}a_{31}-a_{13}a_{11}a_{32}+a_{13}a_{12}a_{31}=0.$$

Легко перевірити, що властивості 1–6, 8 визначників другого порядку, викладені в п.2.1., залишаються справедливими і для визначників третього порядку. Метод доведення цих властивостей такий же, як і при доведенні теорем 1 і 2. Покажемо це на прикладі властивості 1′ з п.2.1.

Властивість 1′. При транспонуванні визначник не змінюється , тобто

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}. \tag{10}$$

<u>*Доведення*</u>. За означенням

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11} = D,$$

що й потрібно було довести.

Щодо властивості 7 з п.2.1, то вона отримує розширене тлумачення. Перед тим, як сформулювати цю властивість, введемо важливе поняття лінійної комбінації рядків.

<u>Означення 4</u>. Будь-який рядок визначника матриці (1), наприклад третій, є лінійною комбінацією двох інших рядків, якщо його елементи пов'язані з відповідними елементами двох інших рядків співвідношеннями

$$a_{31} = \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21}, \quad a_{32} = \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22}, \quad a_{33} = \lambda_1 a_{13} + \lambda_2 a_{23}, \tag{11}$$

де λ_1, λ_2 – дійсні числа.

Властивість 7′. Визначник третього порядку не зміниться, якщо до елементів деякого рядка (стовпця) додати довільну лінійну комбінацію інших рядків (стовпців), наприклад

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} & a_{32} + \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} & a_{33} + \lambda_1 a_{13} + \lambda_2 a_{23} \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Доведення рівності (12) аналогічне доведенню рівностей (6).

Властивість 9. Якщо визначник третього порядку дорівнює нулю, але серед його мінорів є відмінні від нуля, то в цьому визначнику один з його рядків (стовпців) є лінійною комбінацією інших рядків (стовпців). Якщо ж всі мінори рівні нулю, але є елементи, відмінні від нуля, то всі рядки (всі стовпці) пропорційні між собою.

3. Поняття про визначники довільного порядку

Нехай задано квадратну матрицю A порядку n

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

<u>Означення 1</u>. Визначником матриці A (визначником порядку n) називається число, яке визначається рівністю

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}- \qquad (1)$$

$$-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}+\ldots+(-1)^{n+1}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2\,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,n-1} \end{vmatrix}.$$

Рівність (1) називається розкладом визначника D за елементами першого рядка.

Аналогічно визначникам третього порядку вводяться поняття мінорів та алгебраїчних доповнень елементів визначника порядку n і показується, що цей визначник дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка (стовпця) на алгебраїчні доповнення цих елементів.

Всі розглянуті нами властивості визначників другого і третього порядку поширюються і на випадок визначника n-го порядку. Використовуючи, наприклад, властивість 7, обчислення цього визначника можна звести до обчислення одного визначника $(n-1)$-го порядку, а не обчислювати n визначників, як це вимагається в означенні 1. Конкретний спосіб зведення визначника до потрібного вигляду пояснимо на такому прикладі.

Приклад 1. Обчислити визначник 5-го порядку

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & \boxed{1} & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

У другому рядку визначника вже є два нулі, тому розглянемо саме цей рядок. Будемо намагатися, не змінюючи величини визначника, перетворити його так, щоб у другому рядку всі елементи, крім a_{24} зробити нулями. Для цього достатньо до другого стовпця додати четвертий, помножений на 2, а до третього стовпця додати четвертий, помножений на (–2). Після цих перетворень отримуємо визначник

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 7 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо цей визначник за елементами другого рядка

$$D=1\cdot\left(-1\right)^{2+4}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 7 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 7 & 1 \end{vmatrix}.$$

В отриманому визначнику зручно зупинитись на другому стовпці, оскільки в ньому вже є один нуль і, крім того, його елементи невеликі. Перетворимо визначник так, щоб всі елементи другого стовпця, крім елемента $a_{12}=-1$, стали рівними нулю. Для цього від третього рядка віднімемо перший, а від четвертого – подвоєний перший. В результаті отримуємо визначник, що дорівнює початковому

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Розклавши його за елементами другого стовпця, знаходимо

$$D=(-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Отриманий визначник третього порядку можна обчислити безпосередньо. Однак простіше розкласти його за елементами першого стовпця:

$$D=(-1)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=1.$$

Додаток 1. *Приклади дій над матрицями*

Приклад 1. Знайти матрицю $2A$, якщо $A=\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

<u>*Розв'язання.*</u> $2A=\begin{pmatrix} 2(-1) & 2\cdot 5 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 3 & 2\cdot(-3) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 10 & 4 \\ 4 & 6 & -6 \end{pmatrix}$.

Приклад 2. Знайти матрицю $A+B$, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 \\ -1 & -2 & 6 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>*Розв'язання.*</u> $A+B=\begin{pmatrix} 0+(-2) & 1+2 & 8+(-1) \\ -1+(-3) & -2+0 & 6+4 \\ 3+1 & -4+(-3) & 0+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 7 \\ -4 & -2 & 10 \\ 4 & -7 & 1 \end{pmatrix}$.

Приклад 3. Знайти $A-B$, якщо $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

<u>*Розв'язання.*</u> $A-B=\begin{pmatrix} 5-(-2) & 4-1 \\ -2-(-1) & 0-6 \\ 1-3 & 3-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -1 & -6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Приклад 4. Обчислити AB, якщо $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. $AB=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2) & 2\cdot1+(-1)\cdot1 \\ (-1)\cdot(-1)+1\cdot(-2) & (-1)\cdot1+1\cdot1 \\ 0\cdot(-1)+3\cdot(-2) & 0\cdot1+3\cdot1 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$.

Приклад 5. Знайти A^T, якщо: а) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. а) Записуючи перший та другий рядки матриці A відповідно як перший та другий стовпці, дістанемо $A^T=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

б) Аналогічно знаходимо $A^T=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Додаток 2. ***Доведення властивості 9 з п.2.2.***

<u>*Доведення*</u>. Нехай

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0 \quad \text{і} \quad A_{33}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0 .$$

Помножимо визначник D на довільне число w і запишемо результат згідно з 5-ою властивістю у вигляді

$$wD=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & wa_{13} \\ a_{21} & a_{22} & wa_{23} \\ a_{31} & a_{32} & wa_{33} \end{vmatrix}=0 .$$

До елементів третього стовпця останнього визначника додамо відповідні елементи перших двох стовпців, помножені на u і v відповідно:

$$wD=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ua_{11}+va_{12}+wa_{13} \\ a_{21} & a_{22} & ua_{21}+va_{22}+wa_{23} \\ a_{31} & a_{32} & ua_{31}+va_{32}+wa_{33} \end{vmatrix}=0 .$$

Розкладемо цей визначник за елементами останнього стовпця:

$$\begin{gathered} A_{13}\left(ua_{11}+va_{12}+wa_{13}\right)+A_{23}\left(ua_{21}+va_{22}+wa_{23}\right)+ \\ +A_{33}\left(ua_{31}+va_{32}+wa_{33}\right)=0 . \end{gathered} \tag{13}$$

За умовою $A_{33}\neq 0$. Поділивши рівність (13) на A_{33} і ввівши позначення $\lambda_1=-\dfrac{A_{13}}{A_{33}}$; $\lambda_2=-\dfrac{A_{23}}{A_{33}}$, знаходимо

$$ua_{31}+va_{32}+wa_{33}=\lambda_1\left(ua_{11}+va_{12}+wa_{13}\right)+\lambda_2\left(ua_{21}+va_{22}+wa_{23}\right). \qquad (14)$$

Рівність (14) справедлива для будь-яких u,v,w. Якщо $u=1$, $v=0$, $w=0$, то $a_{31}=\lambda_1 a_{11}+\lambda_2 a_{21}$. Поклавши в рівності (14) по черзі: 1) $u=0, v=1, w=0$ і 2) $u=0, v=0, w=1$, отримуємо $a_{32}=\lambda_1 a_{12}+\lambda_2 a_{22}$, $a_{33}=\lambda_1 a_{13}+\lambda_2 a_{23}$, що й доводить першу частину властивості 9.

Другу частину доведемо, скориставшись властивістю 9 визначника другого порядку.

У нашому випадку всі мінори дорівнюють нулю, тому одночасно маємо $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}=0$. Тоді згідно з першою рівністю $a_{21}=\lambda a_{11}$, $a_{22}=\lambda a_{12}$, а згідно з другою – $a_{21}=\mu a_{11}$, $a_{23}=\mu a_{13}$.

Із порівняння рівностей $a_{21}=\lambda a_{11}$ і $a_{21}=\mu a_{11}$ випливає, що $\lambda=\mu$, а тому $a_{23}=\lambda a_{13}$. Отже, елементи другого рядка пропорційні елементам першого рядка. Аналогічно доводиться пропорційність відповідних елементів першого і третього рядка: $a_{31}=\sigma a_{11}$, $a_{32}=\sigma a_{12}$, $a_{33}=\sigma a_{13}$, що й доводить другу частину властивості 9.