ЛЕКЦІЯ 1. Комплексні числа

П.1. Побудова множини комплексних чисел

Появу комплексних чисел пов'язують із задачею добування квадратного кореня з від'ємного числа $\sqrt{-a}$, $a>0$. Оскільки квадрат дійсного числа завжди додатний, то така задача на множині дійсних чисел розв'язку не має.

Необхідність у строгому обґрунтуванні теорії комплексних чисел зумовлюється ще й тим, що ці числа є важливими у цілому ряді питань як самої математики, так і її застосувань у фізиці, механіці, радіотехніці, гідродинаміці тощо.

Означення 1. Комплексним числом назвемо будь-яку упорядковану пару $(a;b)$ дійсних чисел. Множину всіх комплексних чисел позначимо C.

Означення 2. Два комплексних числа $(a;b)$ і $(a_1;b_1)$ назвемо рівними і будемо писати $(a;b)=(a_1;b_1)$, якщо $a=a_1$, $b=b_1$.

Комплексні числа будемо позначати грецькими буквами і писати $\alpha_1=(a_1;b_1)$, $\alpha_2=(a_2;b_2)$ тощо.

Означення 3. Нехай $\alpha_1=(a_1;b_1)$ і $\alpha_2=(a_2;b_2)$ – два комплексних числа. Суму $\alpha_1+\alpha_2$ визначимо рівністю

$$\alpha_1+\alpha_2=(a_1+a_2;\ b_1+b_2), \tag{1}$$

а добуток $\alpha_1\alpha_2$ – рівністю.

$$\alpha_1\alpha_2=(a_1a_2-\ b_1b_2;\ a_1b_2+a_2b_1). \tag{2}$$

Операції додавання і множення комплексних чисел мають такі властивості:

1. $\alpha_1+\alpha_2=\alpha_2+\alpha_1$ (комутативність додавання).
2. $\alpha_1\alpha_2=\alpha_2\alpha_1$ (комутативність множення).
3. $(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_3=\alpha_1+(\alpha_2+\alpha_3)$ (асоціативність додавання).
4. $(\alpha_1\alpha_2)\alpha_3=\alpha_1(\alpha_2\alpha_3)$ (асоціативність множення).

5. $\alpha_1(\alpha_2+\alpha_3)=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3$ (дистрибутивність множення відносно додавання).

Властивості 1 і 2 є наслідками відповідних властивостей дійсних чисел. Доведення властивостей 3, 4, 5 проводиться за однією і тією ж схемою. Доведемо, наприклад, властивість 5. Нехай $\alpha_3=(a_3;b_3)$.

Тоді

$$\alpha_1(\alpha_2+\alpha_3)=(a_1;b_1)\cdot(a_2+a_3;\ b_2+b_3)=$$
$$=(a_1(a_2+a_3)-b_1(b_2+b_3);a_1(b_2+b_3)+b_1(a_2+a_3))= \quad (3)$$
$$=(a_1a_2+a_1a_3-b_1b_2-b_1b_3;a_1b_2+a_1b_3+b_1a_2+b_1a_3);$$
$$\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3=(a_1a_2-b_1b_2;a_1b_2+a_2b_1)+(a_1a_3-b_1b_3;a_1b_3+a_3b_1)=$$
$$=(a_1a_2-b_1b_2+a_1a_3-b_1b_3,\ a_1b_2+a_2b_1+a_1b_3+a_3b_1). \quad (4)$$

Порівнюючи рівності (3) і (4), отримуємо властивість 5.

Введені операції додавання і множення дозволяють розглядати комплексні числа як узагальнення дійсних чисел, а на дійсні числа дивитись як на частинний випадок комплексних чисел. Розглянемо не всі комплексні числа, а тільки числа вигляду $(a;0)$, тобто розглянемо точки площини, які лежать на осі абсцис. Кожному дійсному числу a поставимо у відповідність комплексне число $(a;0)$, тобто $a\to(a;0)$. Ця відповідність є взаємнооднозначною.

Для будь-яких двох дійсних чисел a і b маємо

$$a+b\to(a+b;0). \quad (5)$$

Оскільки $(a+b;0)=(a;0)+(b;0)$, то умову (5) можна записати у наступному вигляді

$$a+b\to(a;0)+(b;0). \quad (6)$$

Це означає, що сумі дійсних чисел a і b відповідає сума відповідних їм комплексних чисел.

Те ж саме можна сказати і про добуток. Дійсно, $ab\to(ab,0)$ і $(ab;0)=(a;0)(b;0)$ (див. формулу (2)).

Отже, добутку дійсних чисел a і b відповідає добуток відповідних їм комплексних чисел.

Викладене вище дозволяє ототожнити комплексне число $(a;0)$ з дійсним числом a і записати $(a;0)=a$. Наприклад, $(0;0)=0$, $(4;0)=4$, $(-5;0)=-5$.

Множина дійсних чисел стає при цьому підмножиною множини комплексних чисел.

Отже, множина R дійсних чисел з її звичайною арифметикою є ніби “вкладеною” у множину комплексних чисел C. Ще кажуть, що множина комплексних чисел є розширенням множини дійсних чисел.

2. Алгебраїчна форма комплексного числа.

Особливу роль серед комплексних чисел відіграє число $(0;1)$, тобто число, якому відповідає точка осі ординат, що лежить на одиницю вище початку координат O. Позначимо це комплексне число буквою i, тобто $(0;1)=i$.

Кожне комплексне число $z=(a;b)$ можна подати у вигляді

$$z=(a;b)=(a;0)+(0;b)=(a;0)+(b;0)(0;1)\cdot$$

Враховуючи те, що $(a;0)=a$, $(b;0)=b$, $(0;1)=i$, отримуємо

$$z=(a;b)=a+bi \qquad (7)$$

<u>Означення 4</u>. Запис комплексного числа z у вигляді (7) називають алгебраїчною формою запису комплексного числа. Дійсне число a називають дійсною частиною комплексного числа (7) і позначають $a=\operatorname{Re} z$. Дійсне число b називають уявною частиною комплексного числа (7) і позначають $b=\operatorname{Im} z$.

Скористаємось алгебраїчним записом комплексного числа b в операціях додавання і множення комплексних чисел. Формули (1), (2) приймають вигляд

$$\alpha_1+\alpha_2=(a_1+b_1 i)+(a_2+b_2 i)=a_1+a_2+(b_1+b_2)i, \qquad (8)$$

$$\alpha_1\alpha_2=(a_1+b_1 i)(a_2+b_2 i)=a_1a_2-b_1b_2+(a_1b_2+a_2b_1)i.$$

Покладаючи в останній формулі $a_1 = a_2 = 0$, $b_1 = b_2 = 1$, отримуємо важливе співвідношення $ii = -1$, яке з використанням скороченого позначення добутку $ii = i^2$ запишемо

$$i^2 = -1. \qquad (9)$$

Рівність (9) означає, що на множині комплексних чисел рівняння $x^2 + 1 = 0$ має розв'язки. Одним із розв'язків цього рівняння є комплексне число $x = i$.

Зауважимо, що формулу (2) не обов'язково запам'ятовувати, оскільки її можна отримати автоматично, якщо формально помножити двочлени $a_1 + b_1 i$ і $a_2 + b_2 i$ за звичайними правилами множення двочленів, а потім згідно з рівністю (9) замінити i^2 на -1.

Наприклад,

$$\alpha_1\alpha_2 = (2+3i)(5+4i) = 10 + 15i + 8i + 12i^2 = 10 + 23i - 12 = -2 + 23i.$$

Відмітимо частинний випадок другої формули (8), коли дійсне число a множиться на комплексне число $a_1 + b_1 i$

$$a(a_1 + b_1 i) = (a + 0i)(a_1 + b_1 i) = aa_1 + ab_1 i. \qquad (10)$$

Нехай $\alpha_1 = a_1 + b_1 i$ і $\alpha_2 = a_2 + b_2 i$ – два комплексних числа.

<u>Означення 5</u>. Різницею $\alpha_2 - \alpha_1$ називається комплексне число $z = x + yi$, яке задовольняє рівнянню

$$\alpha_1 + z = \alpha_2. \qquad (11)$$

Якщо $\alpha_1 = a_1 + b_1 i$ і $\alpha_2 = a_2 + b_2 i$, то рівність (11) можна записати у вигляді $a_1 + x + i(b_1 + y) = a_2 + b_2 i$. Звідси

$$\begin{cases} a_1 + x = a_2 \\ b_1 + y = b_2 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x = a_2 - a_1 \\ y = b_2 - b_1 \end{cases}.$$

Отже, різниця комплексних чисел визначається формулою

$$\alpha_2 - \alpha_1 = (a_2 - a_1) + (b_2 - b_1)i. \qquad (12)$$

Нехай $\alpha_1 = a_1 + b_1 i$ і $\alpha_2 = a_2 + b_2 i$, причому $\alpha_1 \neq 0$.

<u>Означення 6</u>. Часткою $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ називається комплексне число $z = x + yi$, яке задовольняє рівнянню

$$\alpha_1 z = \alpha_2. \qquad (13)$$

Перепишемо це рівняння у вигляді $(a_1 + b_1 i)(x + yi) = a_2 + b_2 i$. Звідси отримуємо систему рівнянь.

$$\begin{cases} a_1 x - b_1 y = a_2 \\ b_1 x + a_1 y = b_2. \end{cases} \qquad (14)$$

Розв'язавши цю систему відносно x, y, будемо мати

$$x = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_1^2 + b_1^2}, \quad y = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1^2 + b_1^2}. \qquad (15)$$

Отже, частка двох комплексних чисел єдина і визначається формулами (15).

<u>Означення 7</u>. Нехай $\alpha = a + bi$. Число $a - bi$, яке відрізняється від α лише знаком уявної частини, називається спряженим до числа α і позначається $\overline{\alpha}$.

За означенням маємо

$$\overline{\alpha} = a - bi. \qquad (16)$$

Якщо α – дійсне число, тобто $\alpha = a + 0i$, то $\overline{\alpha} = a - 0i = a$. Отже, будь-яке дійсне число дорівнює своєму спряженому.

Теорема 1. Сума і добуток спряжених чисел є дійсним числом.

<u>*Доведення*</u>. Для будь-якого комплексного числа $\alpha = a + bi$ маємо

$\alpha+\bar{\alpha}=a+bi+a-bi=2a$, $\alpha\bar{\alpha}=(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2$.

Теорема 2. Нехай $\alpha_1=a_1+b_1i$ і $\alpha_2=a_2+b_2i$ – два комплексних числа. Тоді

$$\overline{\alpha_1+\alpha_2}=\bar{\alpha}_1+\bar{\alpha}_2, \quad \overline{\alpha_1\alpha_2}=\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2, \quad \overline{\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)}=\frac{\bar{\alpha}_2}{\bar{\alpha}_1}.$$

Доведення. Доведення всіх рівностей проводиться за однією схемою. Доведемо, наприклад, що $\overline{\alpha_1\alpha_2}=\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2$. Дійсно, $\alpha_1\alpha_2=a_1a_2-b_1b_2+(a_1b_2+a_2b_1)i$. Тоді $\overline{\alpha_1\alpha_2}=a_1a_2-b_1b_2-(a_1b_2+a_2b_1)i$. З іншого боку, $\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2=(a_1-b_1i)(a_2-b_2i)=$ $=a_1a_2-b_1b_2-(a_2b_1+a_1b_2)i$. Отже, $\overline{\alpha_1\alpha_2}=\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2$.

Нехай потрібно виконати ділення двох комплексних чисел $\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}$ $(\alpha_1\neq 0)$. Використовувати для цього формули (15) досить незручно, оскільки ці формули є громіздкими і важко запам'ятовуються. Тому простіше помножити чисельник і знаменник дробу на комплексне число, спряжене зі знаменником: $\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}=\dfrac{\alpha_2\bar{\alpha}_1}{\alpha_1\bar{\alpha}_1}$. Наприклад,

$$\frac{1+i}{2+3i}=\frac{(1+i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\frac{2+3+(2-3)i}{4+9}=\frac{5-i}{13}=\frac{5}{13}-\frac{1}{13}i.$$

П.3 Геометрична форма комплексного числа

Зі шкільного курсу геометрії відомо, що між множиною всіх впорядкованих пар дійсних чисел і множиною всіх точок площини можна встановити взаємнооднозначну відповідність. Для цього на площині слід вибрати систему координат і кожній впорядкованій парі $(a;b)$ поставити у відповідність точку $M(a;b)$, тобто точку з абсцисою $x=a$ і ординатою $y=b$ (див. рис. 1).

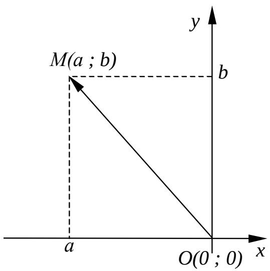

Рис. 1

Комплексні числа визначені нами як впорядковані пари дійсних чисел, для яких введено операції додавання і множення. Тому кожному комплексному числу $(a;b)=a+bi$ можна поставити у відповідність точку $M(a;b)$ і навпаки, кожній точці $M(a;b)$ площини – комплексне число $(a;b)=a+bi$.

Встановлена у такий спосіб відповідність є взаємнооднозначною. Ця відповідність дозволяє розглядати комплексні числа як точки координатної площини, яку ще називають комплексною площиною. Вісь абсцис називають дійсною віссю. На ній розташовані точки, яким відповідають числа вигляду $(a;0)=a$. Вісь ординат називають уявною віссю. На ній розташовані точки, яким відповідають уявні числа $(0;b)=bi$. Отже, комплексна площина – це площина C комплексних чисел, що розглядаються одночасно як числа і як точки координатної площини.

Поряд із зображенням комплексних чисел точками площини часто використовують інший спосіб – зображення комплексних чисел за допомогою векторів на площині. Комплексному числу $(a;b)=a+bi$ ставиться у відповідність радіус-вектор $\overrightarrow{OM}$ (див. рис. 1), тобто вектор, початок якого знаходиться у точці $O(0;0)$, а кінець – у точці $M(a;b)$. Отже, кожному вектору площини з початком в точці $O(0;0)$ і кінцем у точці $M(a;b)$ відповідає комплексне число $(a;b)=a+bi$ і навпаки. Точці $O(0;0)$ відповідає нульовий вектор.

Зображення комплексних чисел векторами дозволяє дати просте геометричне тлумачення операцій над комплексними числами.

Нехай числам $\alpha_1=a_1+b_1i$ і $\alpha_2=a_2+b_2i$ відповідають вектори $\overrightarrow{OA_1}(a_1;b_1)$ і $\overrightarrow{OA_2}(a_2;b_2)$ (рис. 2).

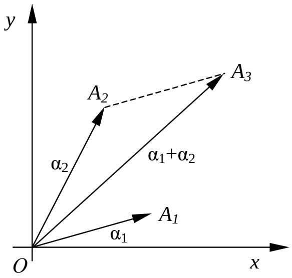

Рис. 2

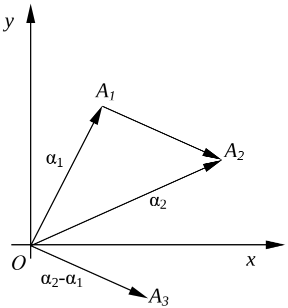

Рис. 3

Числу $\alpha_1+\alpha_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$ відповідає вектор з координатами $a_1+a_2,\ b_1+b_2$, тобто вектор $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}$. Додавання векторів $\overrightarrow{OA_1}$ і $\overrightarrow{OA_2}$ виконується за правилом паралелограма.

Отже, додавання комплексних чисел зводиться до додавання відповідних радіус-векторів.

Оскільки віднімання комплексних чисел є оберненою операцією по відношенню до додавання, застосуємо вказане правило до віднімання комплексних чисел. Нехай вектор $\overrightarrow{OA_1}$ є зображенням комплексного числа $\alpha_1=a_1+b_1i$, а вектор $\overrightarrow{OA_2}$ – комплексного числа $\alpha_2=a_2+b_2i$. Вектор $\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{A_1A_2}$ є зображенням числа $\alpha_2-\alpha_1$. Щоб отримати точку A_3, якій відповідає число $\alpha_2-\alpha_1$, початок цього вектора потрібно перенести у початок координат (див. рис. 3).

П.4 Тригонометрична форма комплексного числа та її застосування

Нехай на площині задано прямокутну систему координат. У цій системі довільному комплексному числу $\alpha=a+bi$ відповідає точка A з координатами a, b або радіус-вектор $\overrightarrow{OA}$ з тими ж координатами.

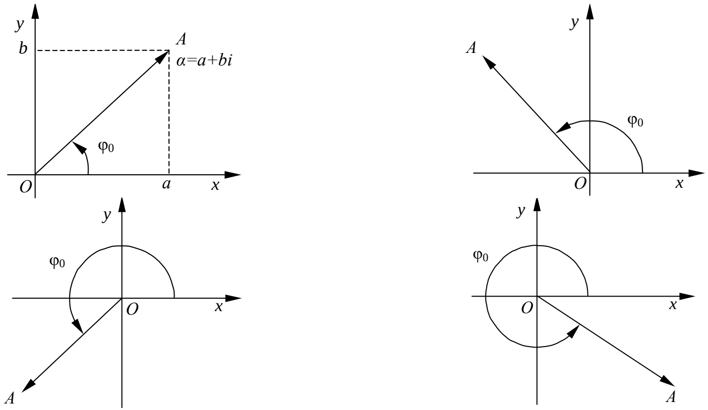

Рис. 1

<u>Означення 1</u>. Довжину вектора $\overrightarrow{OA}$ називають ***модулем комплексного числа*** α і позначають $|\alpha|$. ***Аргументом комплексного числа*** $\alpha \neq 0$ називають величину кута між додатним напрямком дійсної осі і вектором $\overrightarrow{OA}$, причому величину кута вважають додатною, якщо відлік цього кута проводиться проти руху стрілки годинника і від'ємною, якщо – за рухом стрілки годинника. Для числа $\alpha = 0$ аргумент не визначається.

На рис. 1 показано додатні кути φ_0 для різних випадків розташування точки A.

Аргумент комплексного числа визначається неоднозначно. Вияснимо характер неоднозначності аргументу у додатному напрямку, як показано на рис. 1. Якщо при відліку кута зробити декілька повних обертів у додатному напрямку, то отримаємо значення аргументу $\varphi_0 + 2\pi k$, де k – кількість повних обертів, тобто ціле невід'ємне число.

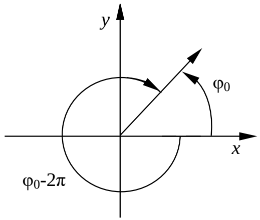

Рис. 2

Найменшим значенням аргументу у від'ємному напрямку є $-(2\pi-\varphi_0)=\varphi_0-2\pi$ (рис. 2). Якщо зробити додатково ще m повних обертів у від'ємному напрямку, то прийдемо до значення аргументу $(\varphi_0-2\pi)-2\pi m=\varphi_0-(m+1)2\pi$, $m\geq 0$.

Із наведених міркувань випливає, що всі значення аргументу визначаються формулою

$$\varphi=\varphi_0+2\pi k\,, \qquad (1)$$

де k – довільне ціле число. Отже, аргумент кожного комплексного числа, що не дорівнює нулю, має нескінченну множину значень, пов'язаних між собою умовою: будь-які два значення аргументу відрізняються на число кратне 2π.

Зрозуміло, що неоднозначності аргументу можна уникнути за допомогою тих чи інших додаткових умов, які відокремлюють одне значення зі всіх можливих, наприклад $0\leq\varphi_0<2\pi$.

Означення 2. Значення аргументу φ_0 комплексного числа α, взяте з проміжку $0\leq\varphi_0<2\pi$, назвемо ***головним значенням аргументу*** комплексного числа α і позначимо $\varphi_0=\arg\alpha$ або $\varphi_0=\arg(a+bi)$.

Для множини всіх значень аргументу комплексного числа α введемо позначення $\operatorname{Arg}\alpha$ або $\operatorname{Arg}(a+bi)$. Тоді формулу (1) можна записати у вигляді

$$\operatorname{Arg}\alpha=\arg\alpha+2\pi k \quad (k=0;\pm1;\pm2;\pm3;\ldots). \qquad (2)$$

Нижче, говорячи про аргумент комплексного числа, будемо мати на увазі одне з його можливих значень.

Число $\arg\alpha$ можна розглядати як узагальнення поняття знака дійсного числа. На дійсній осі Ox з початку координат O виходять два промені. Ці промені ми відрізняємо знаками "+" і "–". На комплексній площині з початку координат можна провести безліч променів. Щоб відрізнити ці промені, ми приписуємо кожному з них певне значення кута $\varphi_0=\arg\alpha$.

Для модуля $|\alpha|$ комплексного числа $\alpha = a + bi$ будемо вживати позначення $|\alpha| = r$. Тоді за теоремою Піфагора (див. рис. 1) маємо

$$r = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}\ . \tag{3}$$

Оскільки $a = \operatorname{Re}\alpha$, $b = \operatorname{Im}\alpha$, формулу (3) можна записати у вигляді

$$r = |\operatorname{Re}\alpha + i\operatorname{Im}\alpha| = \sqrt{(\operatorname{Re}\alpha)^2 + (\operatorname{Im}\alpha)^2}\ . \tag{3′}$$

Використовуючи рис. 1, отримуємо формули, що виражають дійсну і уявну частини комплексного числа через його модуль і аргумент:

$$a = r\cos\varphi_0\,,\quad b = r\sin\varphi_0\,. \tag{4}$$

Очевидно, що аргумент φ_0 у цих формулах можна замінити на будь-яке інше значення аргументу $\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$ ($k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$) і записати

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,,\quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,, \tag{5}$$

зокрема, подати саме комплексне число $\alpha = a + bi$ у вигляді

$$\alpha = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,. \tag{6}$$

<u>Означення 3</u>. Права частина рівності (6) називається тригонометричною формою запису комплексного числа.

Заданням модуля і аргументу комплексне число визначається однозначно. Нагадаємо, що для числа $\alpha = 0$ аргумент не визначається. У цьому і тільки у цьому випадку число задається лише своїм модулем (рівним нулю).

Для знаходження всіх значень аргументу комплексного числа $\alpha = a + bi \neq 0$ потрібно знайти всі числа φ, які задовольняють обом рівнянням (5), тобто розв'язати систему двох рівнянь (5).

Приклад 1. Знайти всі значення аргументу числа $\alpha = -5$.

Розв'язання. Оскільки $a = \mathrm{Re}\,\alpha = -5$, $b = \mathrm{Im}\,\alpha = 0$, то розв'язками першого рівняння $\cos\varphi = -1$ системи (5) є числа $\varphi = \pi + 2\pi k$, $k = 0; \pm1; \pm2; \ldots$, а розв'язками другого рівняння $\sin\varphi = 0$ – числа $\varphi = \pi n$, $n = 0; \pm1; \pm2; \ldots$.

Спільними коренями обох рівнянь є числа $\varphi = \pi + 2k\pi$, $k = 0; \pm1; \pm2; \ldots$.

Відповідь: $\mathrm{Arg}(-5) = \pi + 2k\pi$, $k = 0; \pm1; \pm2; \ldots$.

Аргумент комплексного числа $\alpha = a + bi \neq 0$ можна знаходити простіше: спочатку, використовуючи геометричну інтерпретацію комплексного числа, визначити, в якій чверті знаходиться точка $\alpha = a + bi$, а потім скористатись одним (будь-яким) з рівнянь (5).

Приклад 2. Знайти всі значення аргумента комплексного числа $\alpha = -1 + i$.

Розв'язання. Оскільки $\mathrm{Re}\,\alpha = -1$, $\mathrm{Im}\,\alpha = 1$, то число $\alpha = -1 + i$ лежить у другій чверті. Друге з рівнянь (5) має вигляд $\sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Одним із розв'язків цього рівняння, який лежить у другій чверті, є число $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$.

Відповідь: $\mathrm{Arg}(-1+i) = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k = 0; \pm1; \pm2; \ldots$.

Приклад 3. Записати числа 1) $\alpha_1 = -1 - i$; 2) $\alpha_2 = i$ у тригонометричній формі.

Розв'язання. 1) Оскільки $|\alpha_1| = \sqrt{2}$, $\varphi_1 = \dfrac{5\pi}{4}$, то $\alpha_1 = -1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + i\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)$.

2) Оскільки $|\alpha_2| = 1$, а один із аргументів числа α_2 дорівнює $\dfrac{\pi}{2}$, то $\alpha_2 = i = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$.

Приклад 4. Записати числа 1) $\alpha_1 = 2\cos\dfrac{7\pi}{4} - 2i\sin\dfrac{\pi}{4}$; 2) $\alpha_2 = -\cos\dfrac{\pi}{17} + i\sin\dfrac{\pi}{17}$ у тригонометричній формі.

Розв'язання. Для запису чисел α_1 і α_2 у тригонометричній формі немає потреби попередньо знаходити їх модулі і аргументи.
1) Скористаємось тим, що $-\sin\dfrac{\pi}{4} = \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)$. Тому $\alpha_1 = 2\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$.

2) Аналогічно, $-\cos\dfrac{\pi}{17} = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{17}\right) = \cos\dfrac{16\pi}{17}$, $\sin\dfrac{\pi}{17} = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{17}\right) = \sin\dfrac{16\pi}{17}$. Тому $\alpha_2 = \cos\dfrac{16\pi}{17} + i\sin\dfrac{16\pi}{17}$.

Аргументи комплексного числа можна знаходити по-іншому. З формул (5) випливає, що кожен з аргументів задовольняє рівнянню

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}. \qquad (7)$$

Це рівняння не є рівносильним системі (5). Воно має більше розв'язків. Проте, якщо спочатку визначити, в якій чверті знаходиться точка $\alpha = a + bi$, а потім знайти такий розв'язок рівняння (7), який є кутом у цій чверті, то ми отримаємо аргумент числа $\alpha = a + bi$.

Приклад 5. Знайти один із аргументів числа $1 - i\sqrt{3}$.

Розв'язання. Точка $1 - i\sqrt{3}$ лежить у четвертій чверті. Знайдемо розв'язок рівняння (7), тобто рівняння $\operatorname{tg}\varphi = -\sqrt{3}$, який є кутом у цій чверті. Таким розв'язком є $\varphi = -\frac{\pi}{3}$.

Відповідь: $\varphi = -\frac{\pi}{3}$.

Якщо користуватись рівнянням (7), то зручніше ввести інше означення головного значення аргументу комплексного числа $\alpha = a + bi \neq 0$.

Означення 4. Головним значенням аргументу комплексного числа $\alpha = a + bi \neq 0$ назвемо одне і тільки одне значення φ аргументу, яке задовольняє умові

$$-\pi < \varphi \leq \pi. \qquad (8)$$

Головне значення аргументу, як і раніше, позначимо $\varphi = \arg\alpha$. Тоді $\operatorname{Arg}\alpha = \arg\alpha + 2\pi k \quad (k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots)$ і ми знову приходимо до формули (2).

Для головного значення аргументу справедливі співвідношення

$$\arg\alpha=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, & a>0\\ \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}+\pi, & a<0,\ b>0\\ \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}-\pi, & a<0,\ b<0.\end{cases} \qquad (9)$$

Ці співвідношення дозволяють знайти головне значення аргументу, але часто зручніше це робити так, як у прикладі 5.

Тригонометричною формою комплексного числа зручно користуватися при виконанні операцій множення і ділення комплексних чисел. Перед тим, як перейти до розгляду цих операцій, зауважимо, що два комплексних числа

$$\alpha_1=r_1\left(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1\right) \ \text{ і } \ \alpha_2=r_2\left(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2\right) \qquad (10)$$

дорівнюють одне одному тоді і тільки тоді, коли модулі цих чисел рівні, а аргументи відрізняються на $2\pi k$, $k=0;\pm1;\pm2;\ \dots$, тобто коли

$$r_1=r_2,\ \ \varphi_1=\varphi_2+2\pi k,\ \ k=0;\pm1;\pm2;\dots. \qquad (11)$$

Для добутку комплексних чисел α_1 і α_2 згідно з означенням отримуємо

$$\begin{aligned}\alpha_1\alpha_2&=r_1r_2\left(\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2\right)+i\left(\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cos\varphi_2\right)=\right.\\&=r_1r_2\left(\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right)+i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right)\cdot\end{aligned} \qquad (12)$$

Формула (12) виражає добуток $\alpha_1\alpha_2$ у тригонометричній формі. Отже,

$$\left|\alpha_1\alpha_2\right|=r_1r_2,\ \ \arg\left(\alpha_1\alpha_2\right)=\varphi_1+\varphi_2+2\pi k. \qquad (13)$$

Нами доведено таку теорему.

Теорема 1. Модуль добутку двох комплексних чисел дорівнює добутку модулів цих чисел, а аргумент добутку – сумі аргументів співмножників.

Використовуючи метод математичної індукції, формулу (12) можна поширити на будь-яке число n співмножників:

$$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n = r_1 r_2 \ldots r_n(\cos(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)+ \\ +i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)), \qquad (14)$$

де r_i, φ_i $(i=1,2,\ldots,n)$ – модуль і аргумент числа α_i.

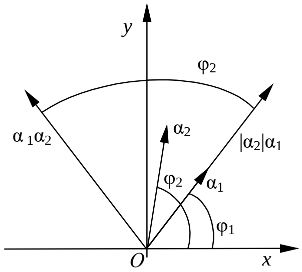

Рис. 3

Геометрично, добуток $\alpha_1\alpha_2$ можна отримати, розтягуючи вектор α_1 в $|\alpha_2|$ разів і повертаючи на кут φ_2 навколо початку координат (рис. 3).

Приклад 6. Знайти добуток чисел

$$\alpha_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{4}+i\sin\frac{11\pi}{4}\right) \text{ і } \alpha_2=\sqrt{8}\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right).$$

Розв'язання. Оскільки $|\alpha_1|=\sqrt{2}$, $|\alpha_2|=\sqrt{8}$, то $|\alpha_1\alpha_2|=\sqrt{2}\sqrt{8}=4$. Аргументом добутку $\alpha_1\alpha_2$ є сума $\varphi_1+\varphi_2=\frac{11\pi}{4}+\frac{3\pi}{8}=\frac{25\pi}{8}$.

Отже,

$$\alpha_1\alpha_2=4\left(\cos\frac{25\pi}{8}+i\sin\frac{25\pi}{8}\right)=4\left(\cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8}\right).$$

Перейдемо до ділення комплексних чисел

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}, \quad \alpha_2\neq 0. \qquad (15)$$

Помножимо чисельник і знаменник дробу (15) на $\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2$. В результаті будемо мати

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}=$$

$$=\frac{r_1\left((\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2-\cos\varphi_1\sin\varphi_2)\right)}{r_2(\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2)}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right).$$

Звідси випливає, що

$$\left|\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right|=\frac{r_1}{r_2},\quad \arg\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\varphi_1-\varphi_2+2\pi k,\quad k=0;\pm1;\pm2;\ \dots . \qquad (16)$$

Отже, нами доведено таку теорему.

Теорема 2. Модуль частки двох комплексних чисел дорівнює частці модулів цих чисел, а аргумент частки – різниці аргументів діленого і дільника.

Приклад 7. Записати число $\alpha=\dfrac{i-1}{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}$ у тригонометричній формі.

Розв'язання. Введемо позначення $\alpha_1=i-1$, $\alpha_2=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$. Для числа α_1 маємо: $|\alpha_1|=\sqrt{2}$, $\varphi_1=\frac{3\pi}{4}$. За формулою (16) отримуємо

$$\alpha=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{\sqrt{2}}{1}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\right]==\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right).$$

Відповідь: $\alpha=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$.

З'ясуємо геометричний зміст частки двох комплексних чисел $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$, $\alpha_2 \neq 0$. Ця задача зводиться до геометричного змісту добутку комплексного числа α_1 на комплексне число

$$\frac{1}{\alpha_2} = \frac{1}{r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)} = \frac{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2}{r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)\left(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2\right)} =$$

$$= \frac{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2}{r_2\left(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2\right)} = \frac{1}{r_2}\left(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2\right) = \frac{1}{r_2}\left(\cos\left(-\varphi_2\right) + i\sin\left(-\varphi_2\right)\right). \quad (17)$$

Із (17) випливає, що $\left|\frac{1}{\alpha_2}\right| = \frac{1}{r_2}$, $\arg\frac{1}{\alpha_2} = -\varphi_2$.

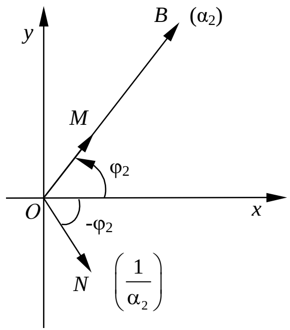

Рис. 4

Нехай вектору $\overrightarrow{OB}$ відповідає комплексне число α_2 і $\left|\overrightarrow{OM}\right| = \frac{1}{r_2}$. Тоді комплексному числу $\frac{1}{\alpha_2}$ буде відповідати вектор $\overrightarrow{ON}$, симетричний вектору $\overrightarrow{OM}$ відносно осі Ox (рис. 4). Розтягнувши вектор $\overrightarrow{ON}$ в $\left|\alpha_1\right|$ разів і повернувши його навколо початку координат на кут $\arg\alpha_1$, ми отримаємо геометричне зображення частки двох комплексних чисел.

П.5. Піднесення до степеня і добування кореня.

Теорема 1 (формула Муавра). При піднесенні комплексного числа до степеня з натуральним показником його модуль підноситься до степеня з тим же показником, а аргумент множиться на показник степеня, тобто

$$\alpha^n = \left(r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\right)^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right). \qquad (1)$$

Доведення. Покладемо у формулі (14) п. 2 $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \alpha$. В результаті отримуємо формулу (1), яка носить назву формули Муавра.

Формула Муавра залишається справедливою і для випадку цілого від'ємного числа $-n\ (n > 0)$:

$$\alpha^{-n} = \frac{1}{r^n}\left(\cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi)\right). \qquad (2)$$

Приклад 1. Записати число $\left(i - \sqrt{3}\right)^{13}$ в алгебраїчній формі.

Розв'язання. Спочатку запишемо дане число у тригонометричній формі, а потім перейдемо від тригонометричної форми до алгебраїчної. Знайдемо модуль і один із аргументів числа $\alpha = i - \sqrt{3}$: $r = \left|i - \sqrt{3}\right| = \sqrt{1+3} = 2$, $\varphi = \frac{5\pi}{6}$.

Запишемо число $\alpha = i - \sqrt{3}$ у тригонометричній формі: $\alpha = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

Використовуючи формулу (1), отримуємо

$$\left(i - \sqrt{3}\right)^{13} = 2^{13}\left(\cos\frac{65\pi}{6} + i\sin\frac{65\pi}{6}\right) = 2^{13}\left(\cos\frac{60+5}{6}\pi + i\sin\frac{60+5}{6}\pi\right) =$$

$$= 2^{13}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2^{13}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -2^{12}\sqrt{3} + 2^{12}i.$$

Відповідь: $\left(i - \sqrt{13}\right)^{13} = -2^{12}\sqrt{3} + 2^{12}i$.

Приклад 2. Виразити через степені $\sin\varphi$ і $\cos\varphi$ такі функції кратних кутів: 1) $\cos 4\varphi$; 2) $\sin 4\varphi$.

Розв'язання. Відомо, що $i^1 = i$; $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$ і $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$. Використовуючи ці формули, знаходимо

$$\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^4 = \cos^4\varphi + 4i\cos^3\varphi\sin\varphi + 6i^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi + 4i^3\cos\varphi\sin^3\varphi + \qquad (3)$$

$$+i^4\sin^4\varphi=\cos^4\varphi+4i\cos^3\varphi\sin\varphi-6\cos^2\varphi\sin^2\varphi-4i\cos\varphi\sin^3\varphi+\sin^4\varphi=$$
$$=\cos^4\varphi-6\cos^2\varphi\sin^2\varphi+\sin^4\varphi+\left(4\cos^3\varphi\sin\varphi-4\cos\varphi\sin^3\varphi\right)i\ .$$

З іншого боку, за формулою Муавра, маємо

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^4=\cos4\varphi+i\sin4\varphi\ . \tag{4}$$

Порівнюючи дійсні та уявні частини комплексних виразів (3), (4), отримуємо:

$$1)\ \cos4\varphi=\cos^4\varphi-6\cos^2\varphi\sin^2\varphi+\sin^4\varphi\,; \tag{5}$$
$$2)\ \sin4\varphi=4\sin\varphi\cos^3\varphi-4\cos\varphi\sin^3\varphi. \tag{6}$$

Приклад 3. Виразити 1) $\sin^4\varphi$; 2) $\cos^4\varphi$ через синуси та косинуси кратних кутів.
Розв'язання. Покладемо

$$\cos\varphi+i\sin\varphi=z\ . \tag{7}$$

Тоді

$$\cos\varphi-i\sin\varphi=\overline{z}\ . \tag{8}$$

За формулою Муавра можна записати

$$\cos n\varphi+i\sin n\varphi=z^n\,, \tag{9}$$
$$\cos n\varphi-i\sin n\varphi=\overline{z}^n\ . \tag{10}$$

Із формул (7), (8), (9) і (10) отримуємо

$$z+\overline{z}=2\cos\varphi\ ;\ \ 2i\sin n\varphi=z-\overline{z}\ , \tag{11}$$
$$z^n+\overline{z}^n=2\cos n\varphi\ ;\ \ 2i\sin n\varphi=z^n-\overline{z}^n\ . \tag{12}$$

Крім того,

$$z^n\bar{z}^n=\left(z\,\bar{z}\right)^n=1. \qquad (13)$$

На основі другої формули (11)

$$\sin^4\varphi=\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^4=\frac{1}{2^4}\left(z-\bar{z}\right)^4=\frac{1}{2^4}\left(z^4-4z^3\bar{z}+6z^2\bar{z}^2-4z\,\bar{z}^3+\bar{z}^4\right)=$$

$$=\frac{1}{2^4}\left(z^4+\bar{z}^4-4z\,\bar{z}\left(z^2+\bar{z}^2\right)+6z^2\bar{z}^2\right).$$

За формулою (12)

$z^4+\bar{z}^4=2\cos4\varphi$; $z^2+\bar{z}^2=2\cos2\varphi$.

Згідно з формулою (13) $z\cdot\bar{z}=1$; $z^2\bar{z}^2=1$.
Отже,

$$1)\ \sin^4\varphi=\frac{1}{2^4}\left(2\cos4\varphi-8\cos2\varphi+6\right)=\frac{1}{8}\cos4\varphi-\frac{1}{2}\cos2\varphi+\frac{3}{8}. \qquad (14)$$

Аналогічно,

$$\begin{aligned}2)\ \cos^4\varphi&=\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^4=\frac{1}{2^4}\left(z+\bar{z}\right)^4=\frac{1}{2^4}\left(z^4+4z^3\bar{z}+6z^2\bar{z}^2+4z\bar{z}^3+\bar{z}^4\right)=\\&=\frac{1}{2^4}\left(2\cos4\varphi+8\cos2\varphi+6\right)=\frac{1}{8}\cos4\varphi+\frac{1}{2}\cos2\varphi+\frac{3}{8}.\end{aligned} \qquad (15)$$

Перейдемо до операції добування кореня. Нехай задано два числа: комплексне w і натуральне n.

Означення 1. Комплексне число z називається коренем степеня n із числа w (позначається $\sqrt[n]{w}$), якщо

$$z^n=w. \qquad (16)$$

Наприклад, числа $z_1 = i$ і $z_2 = -i$ є квадратними коренями з числа $w = -1$, оскільки $i^2 = -1$ і $(-i)^2 = -1$. З означення 1 випливає, що кожний розв'язок рівняння (16) є коренем степеня n з числа w.

Якщо $w = 0$, то для довільного n рівняння (16) має один і тільки один розв'язок $z = 0$. Якщо $w \neq 0$, то і $z \neq 0$. Тому z і w можна записати у тригонометричній формі: $z = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$, $w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, де ψ і φ – фіксовані значення аргументів чисел z і w відповідно.

За формулою Муавра рівняння (17) приймає вигляд

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{17}$$

Два комплексні числа дорівнюють одне одному тоді і тільки тоді, коли модулі їх рівні, а аргументи відрізняються на $2\pi k$, де k – ціле число. Тому з рівності (17) випливає

$$\begin{cases} \rho^n = r \\ n\psi = \varphi + 2\pi k \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}. \end{cases} \tag{18}$$

Зауважимо, що $\sqrt[n]{r}$ є арифметичним значенням кореня. Отже, всі розв'язки рівняння (16) можна записати у вигляді

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0; \pm1; \pm2; \ldots . \tag{19}$$

З'ясуємо питання про кількість різних значень кореня $\sqrt[n]{w}$. Підставляючи $k = 0;1;2;\ldots;n-1$ у формулу (19), отримаємо n різних значень $\sqrt[n]{w}$, оскільки різниця аргументів будь-яких двох з цих значень не кратна 2π. Дійсно, при $k = 0;1;2;\ldots;n-1$ отримуємо відповідно значення аргументів $\frac{\varphi}{n}$, $\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi\cdot 1}{n}$, $\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi\cdot 2}{n}, \ldots,$ $\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi(n-1)}{n}$ і різницю двох значень аргументів (найбільшого і найменшого)

$$\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi(n-1)}{n} - \frac{\varphi}{n} = \frac{2\pi(n-1)}{n} < \frac{2\pi n}{n} = 2\pi.$$

Для різниці будь-яких інших аргументів ця нерівність є очевидною.

Якщо брати значення $k \neq 0;1;2;\ldots;n-1$, то інших комплексних чисел, відмінних від $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ ми не отримаємо.

Наприклад, при $k=n$ будемо мати

$$z_n = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi n}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi n}{n}\right)\right)=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right)=z_0 .$$

При $k=n+1$ отримуємо

$$z_{n+1}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi(n+1)}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi(n+1)}{n}\right)\right)=$$

$$=\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)+2\pi\right)+i\sin\left(\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)+2\pi\right)\right)=$$

$$=\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)+2\pi\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)\right)=z_1 .$$

Тим самим ми довели таку теорему.

Теорема 2. Корінь степеня n з комплексного числа

$$w=r(\cos\varphi+i\sin\varphi) \qquad (20)$$

має рівно n різних значень, які визначаються формулою

$$z_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi}{n}\right), \quad k=0;\ 1;\ 2;\ldots;n-1. \qquad (21)$$

З'ясуємо тепер геометричний зміст формули (21), тобто дослідимо розташування на координатній площині всіх коренів комплексного числа.

Всі точки $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ мають один і той же модуль $\sqrt[n]{r}$, а тому розташовані на колі з центром у початку координат і радіусом $\sqrt[n]{r}$. Якщо значення k змінюється на 1, то кут $\frac{\varphi+2\pi k}{n}$ змінюється на величину $\frac{2\pi}{n}$, тобто на $\frac{1}{n}$ частину повного кута 2π. Це означає, що точки $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ ділять зазначене коло на n рівних частин, тобто при $n > 2$ є вершинами правильного n – кутника, вписаного в коло радіуса $\sqrt[n]{r}$.

Отриманий результат можна сформулювати у вигляді наступної теореми.

Теорема 3. Всі корені степеня n з комплексного числа (20) відповідають точкам комплексної площини, що розташовані у вершинах правильного n кутника, вписаного в коло з центром у початку координат і радіусом $\sqrt[n]{r}$.

Відмітимо випадок $n = 2$. Обидва значення $\sqrt{w}$ мають рівні модулі. Одне з цих значень кореня отримується з іншого поворотом на кут π, тобто корені симетричні відносно початку координат.

Приклад 4. Знайти всі значення $\sqrt{4+4i}$.

Розв'язання. Запишемо комплексне число $4+4i$ у тригонометричній формі: $4+4i = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. За формулою (21) маємо: $z_k = 2\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{2}\right)$, $k = 0;1$. Звідси $z_0 = 2\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$,

$$z_1 = 2\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{2\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{2\pi}{2}\right)\right) = 2\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}\right).$$

На рис. 5 зображені точки, які відповідають значенням квадратного кореня $\sqrt{4+4i}$.

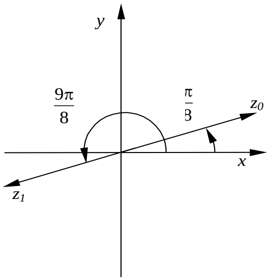

Рис. 5

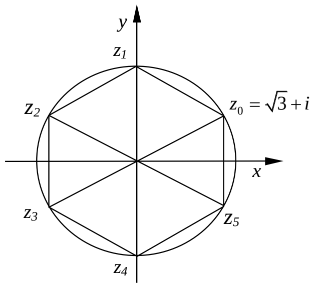

Рис. 6

Приклад 5. Знайти всі значення кореня $\sqrt[6]{-64}$.

Розв'язання. Запишемо число –64 у тригонометричній формі $-64 = 64\left(\cos\pi + i\sin\pi\right)$. За формулою (21) отримуємо:

$$z_k = 2\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{6} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{6}\right), \quad k = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5 \text{. Отже,}$$

$$z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i, \quad z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i,$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i, \quad z_3 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i,$$

$$z_4 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i, \quad z_5 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i.$$

Точки, які відповідають числам z_k, розташовані у вершинах правильного шестикутника, вписаного в коло з центром у точці $z = 0$ і радіусом 2 (рис. 6).

Зауважимо, що комплексні числа z_0 і z_5, z_1 і z_4, z_2 і z_3 попарно спряжені.

П.6. Показникова форма комплексного числа

У фізиці, електротехніці та інших дисциплінах досить часто замість тригонометричної форми запису комплексного числа використовують показникову форму запису цього числа.

Якщо $|z|=1$, $\varphi=\arg z$, то за формулою (6) п.2 одержуємо $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$.

Означення 1. Комплексне число $\cos\varphi+i\sin\varphi$ позначимо символом $e^{i\varphi}$.

Означення 2. Визначимо показникову функцію $e^{i\varphi}$ для довільного дійсного числа φ за допомогою формули

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi. \qquad (1)$$

Цю формулу називають формулою Ейлера.

З формули (1) випливає, що для довільного дійсного числа φ виконуються рівності

$$\varphi=\arg e^{i\varphi}, \quad \left|e^{i\varphi}\right|=1. \qquad (2)$$

Зокрема, можна записати:

$$e^{2\pi i}=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1,$$
$$e^{\frac{\pi}{2}i}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i,$$

$$e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$$
$$e^{-\frac{\pi}{2}i} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i$$

(див. рис. 1).

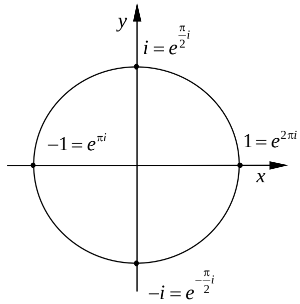

Рис. 1

Замінивши у формулі (1) φ на $-\varphi$, отримуємо $e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)$ або

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi. \qquad (3)$$

Рівність (3) можна записати у вигляді

$$\overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}. \qquad (4)$$

Почленним додаванням і відніманням рівностей (1) і (3) отримуються формули

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right),$$
$$\sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right), \qquad (5)$$

які також носять назву формул Ейлера.

За допомогою формул (5) тригонометричні функції виражаються через показникові.

Функція $e^{i\varphi}$ має звичайні властивості показникової функції, так нібито число i є дійсним.

Наведемо основні з них:

$$e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2}=e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \tag{6}$$

$$\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}}=e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}, \tag{7}$$

$$\left(e^{i\varphi}\right)^n=e^{in\varphi}. \tag{8}$$

Доведення. Скористаємось властивостями операцій над комплексними числами, записаними у тригонометричній формі. Маємо

$$e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2}=(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)=e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$

що доводить справедливість властивості (6). Аналогічно доводиться властивість (7). Для доведення властивості (8) скористаємось формулою Муавра:

$$\left(e^{i\varphi}\right)^n=(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi=e^{in\varphi}.$$

Властивість (8) доведено.

Нехай комплексне число $z\neq 0$ задано у тригонометричній формі:

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),\quad r=|z|. \tag{9}$$

Використовуючи формулу Ейлера (1), рівність (9) запишемо у вигляді

$$z=|z|e^{i\varphi}=re^{i\varphi},\quad z\neq 0. \tag{10}$$

Означення 3. Запис комплексного числа у вигляді (10) називається показниковою формою комплексного числа.

Приклад 1. Записати у показниковій формі наступні комплексні числа: 1) $z_1=-1-i\sqrt{3}$; 2) $z_2=5+3i$; 3) $z_3=\sin\alpha-i\cos\alpha$.

Розв'язання. 1) $|z_1|=2$, $\arg z_1=-\dfrac{2\pi}{3}$, $z_1=2e^{-\frac{2\pi}{3}i}$; 2) $|z_2|=\sqrt{34}$, $\arg z_2=\operatorname{arctg}\dfrac{3}{5}$, $z_2=\sqrt{34}e^{i\operatorname{arctg}\frac{3}{5}}$; 3)

$z_3 = \sin\alpha - i\cos\alpha = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$, тоді $|z_3| = 1$, $\arg z_3 = \alpha - \frac{\pi}{2}$, $z_3 = 1 \cdot e^{\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) i}$.

Застосуємо показникову форму запису комплексного числа до операцій множення, ділення, піднесення до степеня та добування кореня.

Нехай комплексні числа z_1 і z_2 задано у показниковій формі

$$z_1 = |z_1| e^{i\varphi_1}, \quad \varphi_1 = \arg z_1; \quad z_2 = |z_2| e^{i\varphi_2}, \quad \varphi_2 = \arg z_2.$$

Тоді,

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}; \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \ z_2 \neq 0; \quad z_1^n = |z_1|^n e^{in\varphi_1};$$

$$\sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{|z_1|}\, e^{i\left(\frac{\varphi_1 + 2\pi k}{n}\right)}, \quad k = 0;\ 1;\ 2; \ldots; n-1.$$

Приклад 2. Записати у показниковій формі всі значення $\sqrt[6]{-64}$.

Розв'язання. Використовуючи результати прикладу 5 §3, отримуємо

$$z_0 = 2e^{\frac{\pi}{6}i}; \ z_1 = 2e^{\frac{\pi}{2}i}; \ z_2 = 2e^{\frac{5\pi}{6}i}; \ z_3 = 2e^{\frac{7\pi}{6}i}; \ z_4 = 2e^{\frac{3\pi}{2}i}; \ z_5 = 2e^{\frac{11\pi}{6}i}.$$

Приклад 3. Знайти суму

$$s(\varphi) = \sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi, \quad \varphi \neq 2\pi m, \quad m = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots.$$

Розв'язання. Скористаємось показниковою формою запису комплексних чисел, яка значно спрощує викладки. Оскільки $\sin\varphi = \operatorname{Im} e^{i\varphi}$, то $s(\varphi) = \operatorname{Im} e^{i\varphi} + \operatorname{Im} e^{i2\varphi} + \ldots + \operatorname{Im} e^{in\varphi} = \operatorname{Im}\left(e^{i\varphi} + e^{i2\varphi} + \ldots + e^{in\varphi}\right)$.

Використовуючи формулу суми геометричної прогресії

$b + bq + \ldots + bq^{n-1} = \dfrac{b\left(1 - q^n\right)}{1 - q}$, отримуємо

$$s(\varphi)=\operatorname{Im}\frac{e^{i\varphi}\left(1-e^{in\varphi}\right)}{1-e^{i\varphi}}=\operatorname{Im}\frac{e^{i\varphi}\left(e^{\frac{in\varphi}{2}}e^{-\frac{in\varphi}{2}}-e^{\frac{in\varphi}{2}}e^{\frac{in\varphi}{2}}\right)}{e^{\frac{i\varphi}{2}}e^{-\frac{i\varphi}{2}}-e^{\frac{i\varphi}{2}}e^{\frac{i\varphi}{2}}}=\operatorname{Im}\frac{e^{i\varphi}e^{\frac{in\varphi}{2}}}{e^{\frac{i\varphi}{2}}}\cdot\frac{-\left(\frac{e^{\frac{in\varphi}{2}}-e^{-\frac{in\varphi}{2}}}{2i}\right)}{-\left(\frac{e^{\frac{i\varphi}{2}}-e^{-\frac{i\varphi}{2}}}{2i}\right)}.$$

Застосувавши другу з формул (5), можна записати

$$s(\varphi)=\operatorname{Im}e^{i\varphi\left(1-\frac{1}{2}+\frac{n}{2}\right)}\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Оскільки $\dfrac{\sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$ – дійсне число, то його можна винести з під знака уявної частини Im. Тоді $s(\varphi)=\dfrac{\sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\operatorname{Im}e^{\frac{i(n+1)\varphi}{2}}=\dfrac{\sin\frac{n\varphi}{2}\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$, оскільки $e^{\frac{i(n+1)\varphi}{2}}=\cos\frac{(n+1)\varphi}{2}+i\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}$ і $\operatorname{Im}e^{\frac{i(n+1)\varphi}{2}}=\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}$. Отже,

$$s(\varphi)=\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}.$$