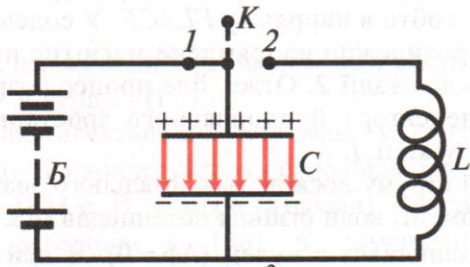


### 10.1. ВИНИКНЕННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ КОЛИВАНЬ. ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ В КОНТУРІ БЕЗ АКТИВНОГО ОПОРУ

Будь-якому електричному колу властиві опір, ємність та індуктивність. Схематично на малюнок зображуватимемо зосереджено в певному місці для всього кола відповідно опір —  $R$ , ємність —  $C$  та індуктивність —  $L$ .

Розглянемо електричне коло, яке складається з батареї елементів  $B$ , ключа  $K$ , конденсатора ємністю  $C$ , соленоїда індуктивністю  $L$  і підвідних провідників дуже малого опору, тому вважатимемо його таким, що дорівнює нулю (мал. 10.1). Проаналізуємо стадії процесів перетворення електричної енергії в колі на магнітну і навпаки.



$$W_{e0} = \frac{q_0^2}{C}$$

Мал. 10.1

1. Якщо ключ  $K$  знаходиться в положенні 1, конденсатор заряджатиметься доти, доки різниця потенціалів між обкладками  $\Delta\phi$  не зрівняється з ЕРС джерела струму  $\mathcal{E}$ . Позначимо максимальне значення різниці потенціалів між обкладками конденсатора через  $\Delta\phi_0$ . Максимальний заряд на обкладках конденсатора буде  $q_0 = \Delta\phi_0 C$ . На верхній обкладці він позитивний, на нижній — негативний. Між обкладками конденсатора є електричне поле напруженістю  $E_0 = \frac{\Delta\phi_0}{l}$ , де  $l$  — відстань між обкладками

конденсатора (лінії вектора  $\vec{E}_0$  ( $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ ) напрямлені зверху вниз). Енергія електричного поля між обкладками конденсатора

$$W_{e0} = \frac{q_0 \Delta\phi_0}{2} = \frac{C \Delta\phi_0^2}{2} = \frac{q_0^2}{2C}, \quad (10.1)$$

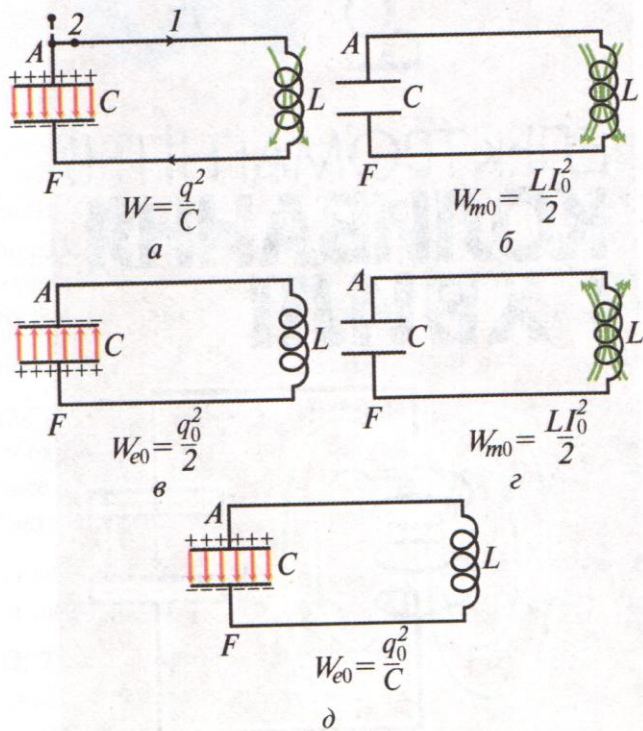
це максимальний запас потенціальної енергії електричного поля за даних умов кола.

2. Перемістимо ключ  $K$  з положення 1 в положення 2. В колі виникне електричний струм  $I = \frac{dq}{dt}$

Розділ 10

## ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ

в напрямку  $ALFCA$  (мал. 10.2, *a*), конденсатор почне розряджатися, тобто електричний заряд на його обкладках спадатиме, і відповідно зменшуватиметься енергія електричного поля між обкладками конденсатора.



Мал. 10.2

В результаті в соленоїді зростатиме магнітне поле, енергія якого

$$W_m = \frac{LI^2}{2}. \quad (10.2)$$

Через деякий час конденсатор розрядиться. Енергія електричного поля дорівнюватиме нулю. В цей момент часу сила струму в колі буде максимальною  $I_0$  і відповідно енергія магнітного поля соленоїда також буде максимальною:

$$W_{m0} = \frac{LI_0^2}{2}. \quad (10.3)$$

Отже, енергія електричного поля перетворилася на енергію магнітного поля (див. мал. 10.2, *б*).

3. Оскільки в цей момент електричний струм не підтримується зовнішнім чинником, то магнітне поле в соленоїді починає зменшуватися (зменшується

потік ліній вектора  $\vec{B}$  через соленоїд). У соленоїді виникає ЕРС самоіндукції, що збуджує індукційний струм, який, згідно з правилом Ленца, матиме такий самий напрямок. У результаті нижня обкладка конденсатора заряджатиметься позитивно, а верхня — негативно. Різниця потенціалів між обкладками зро-

стає, а сила струму самоіндукції зменшується. Коли заряди на обкладках досягнуть початкової величини  $q_0$ , сила струму в колі дорівнюватиме нулю. В цей момент часу різниця потенціалів між обкладками конденсатора матиме максимальне значення  $\Delta\Phi_0$ , лінії вектора  $\vec{E}$  ( $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E}$ ) будуть напрямлені вгору від нижньої обкладки до верхньої (див. мал. 10.2, *в*). Енергія магнітного поля повністю перетвориться на енергію електричного:

$$W_{e0} = \frac{q_0\Delta\Phi_0}{2}. \quad (10.4)$$

4. Після третьої стадії процеси відбуватимуться у зворотному порядку. Під дією різниці потенціалів між обкладками конденсатора виникає електричний струм, який тече в колі у зворотному напрямку, тобто в напрямку  $FLACF$ . У соленоїді виникає протилежно напрямлене магнітне поле відповідно до стадії 2. Отже, йде процес розрядження конденсатора й одночасного зростання сили струму в колі  $I$ .

Сила струму досягає максимального значення  $I_0$  в той момент, коли різниця потенціалів між обкладками зрівнюється з нулем ( $\Delta\Phi = 0$ ). В цей момент часу електричного поля немає ( $W_e = 0$ ), натомість є магнітне поле, енергія якого максимальна. Вона визначається формулою (10.3). Отже, енергія електричного поля повністю перетворилася на енергію магнітного поля (див. мал. 10.2, *з*).

5. Після завершення стадії 4 виникає ЕРС самоіндукції, під дією якої електричний струм самоіндукції матиме такий самий напрямок, як і на стадії 4. В результаті верхня обкладка конденсатора заряджатиметься позитивно, а нижня — негативно. Різниця потенціалів на обкладках конденсатора зростатиме від 0 до  $\Delta\Phi_0$ , а сила струму зменшуватиметься від  $I_0$  до 0. Енергія магнітного поля струму  $W_m$  перетвориться на енергію електричного поля конденсатора  $W_e$ .

Коли різниця потенціалів досягне максимуму  $\Delta\Phi_0$ , то відновлений початковий стан кола і коливальний процес повторюються (див. мал. 10.2, *д*).

Коли в колі  $ALFCA$  тече струм  $I$ , то слід пам'ятати, що коло при цьому замкнене через діелектрик конденсатора, в якому виникає струм зміщення.

Найхарактернішою особливістю розглянутого процесу є його автоматичність: раз почавшись у колі  $ALFCA$ , він періодично повторюватиметься через внутрішні причини самого електричного кола, зумовлюючи в ньому коливання енергії електричного і магнітного полів. Ці коливання спричиняють перезарядження конденсатора і періодичне

відновлення в електричному колі *ALFCA* вихідного стану.

Отже, в електричному колі, яке складається з електроємності та індуктивності, після заряджання конденсатора виникають електричні коливання.

Електричне коло, в якому можуть виникати електричні коливання, називають *коливальним контуром*.

Час, упродовж якого здійснюється повне коливання, тобто стадії 2—5, називають *повним періодом електричного коливання* і позначають літерою *T*. Кожна із стадій 2—5 здійснюється за чверть періоду. Число електричних коливань за одну секунду називають *частотою електричних коливань*:

$$\nu = \frac{1}{T}. \quad (10.5)$$

У СІ період коливань вимірюють у секундах, частоту — в герцах (Гц).

Теорію електричних коливань у контурі, що складається з конденсатора і соленоїда, вперше розробив у 1853 р. В. Томсон (Кельвін), а експериментально перевірів у 1861 р. німецький фізик Б. В. Феддерсен (1832—1918).

Виведемо рівняння електричних коливань у коливальному контурі. Оскільки в контурі немає опору, то енергія електричного поля зарядженого конденсатора не розсіюється, а зберігається в контурі. Відбуваються лише процеси перетворення енергії електричного поля на енергію магнітного і зворотні процеси. В будь-який момент часу сума енергій електричного і магнітного полів дорівнює максимальній енергії зарядженого конденсатора  $W_{e0}$  і є сталою величиною. Тому можна записати

$$\frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = W_{e0} = \text{const}. \quad (10.6)$$

Продиференціюємо рівняння, що виражає закон збереження енергії (10.6), за часом:

$$\frac{q}{C} \frac{dq}{dt} + LI \frac{dI}{dt} = 0. \quad (a)$$

Взявши до уваги, що  $\frac{dq}{dt} = I$ , і поділивши рівняння (a) на  $I$ , одержимо

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \quad (б)$$

Оскільки  $\frac{dI}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$ , то рівняння (б) можна записати в такому вигляді:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC} \cdot q = 0. \quad (10.7)$$

Ввівши позначення

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (10.8)$$

дістанемо

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0. \quad (10.9)$$

Це рівняння гармонічного коливання. Розв'язком його, як відомо, може бути функція

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (10.10)$$

Отже, заряд на обкладках конденсатора змінюється за гармонічним законом з циклічною частотою  $\omega_0$ , яку виражає рівняння (10.8). Цю частоту називають *власною циклічною частотою контуру*. Власна частота контуру дорівнюватиме

$$\nu = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (10.11)$$

Як впливає з виразу (10.11), власна частота тим більша, чим менші індуктивність кола та його ємність.

Період власних коливань контуру, згідно з рівнянням (10.11), визначають за формулою

$$T = 2\pi\sqrt{LC}, \quad (10.12)$$

яку називають формулою Томсона.

За виразом (10.10) і співвідношенням між зарядом, різницею потенціалів (напругою) і ємністю знайдемо напругу на конденсаторі за вільних незатухаючих електричних коливань:

$$U = \frac{q_0}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (10.13)$$

де  $U_0 = \frac{q_0}{C}$  — максимальне (амплітудне) значення напруги.

Продиференціювавши функцію (10.10) за часом, одержимо вираз для сили струму

$$I = -q_0\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = I_0 \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \quad (10.14)$$

де  $I_0 = q_0\omega_0$  — максимальне (амплітудне) значення сили струму в контурі.

З рівняння (10.14) випливає, що коливання сили струму  $I$  випереджають по фазі  $\frac{\pi}{2}$  коливання заряду  $q$  і напруги  $U$  на конденсаторі. В момент часу, коли сила струму досягає максимуму, заряд (і напруга) дорівнює нулю. Це співвідношення між зарядом і силою струму вже раніше було встановлено під час аналізу електричних і магнітних процесів в електричному колі з енергетичних міркувань.

Знайдемо співвідношення між амплітудами напруги й сили струму аналогічно закону Ома:

$$\frac{U_0}{I_0} = \frac{q_0}{C\omega_0 q_0} = \frac{1}{C\omega_0}.$$

Оскільки  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , останнє співвідношення можна записати в такій формі:

$$\frac{U_0}{I_0} = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (10.15)$$

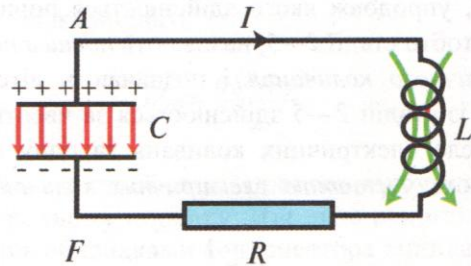
Величина  $\sqrt{\frac{L}{C}}$  є особливим видом опору, який називають **хвильовим опором контуру**.

## 10.2. ВІЛЬНІ ЗАТУХАЮЧІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛИВАННЯ

Описаний вище хід явищ відбувався б за умови, що в контурі немає ніяких втрат електроенергії, зокрема на нагрівання провідників. Насправді будь-який реальний контур має активний електричний опір. Тому запас електромагнітної енергії, що знаходиться в контурі, поступово витрачається на подолання електричного опору нагрівання, внаслідок чого вільні коливання затухають. Рівняння затухаючих електричних коливань в реальному контурі  $ALRFCA$  (мал. 10.3) можна одержати із закону збереження енергії в коливальному контурі:

$$\frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} + I^2 R t = W_{e0} = \text{const}, \quad (10.16)$$

де  $I^2 R t$  — кількість електромагнітної енергії, яка перетворюється на внутрішню енергію контуру за час  $t$ . Це рівняння можна також отримати із закону Ома. Розглянемо це детальніше.



Мал. 10.3

Виявляється, що коли розміри кола невеликі, а електроємність конденсатора та індуктивність соленоїда значні, силу струму в усіх перерізах цього контуру можна вважати однаковою. Тому миттєве значення  $I$  сили змінного струму в контурі має задовольняти всім законам постійного струму. Такі змінні струми називають **квазістаціонарними**.

Знайдемо залежність сили квазістаціонарного струму від часу для нашого кола. Під час розрядження конденсатора в електричному колі  $ALRFCA$  тече електричний струм, який змінюється з часом (див. мал. 10.3).

За законом Ома для неоднорідної ділянки кола

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}, \quad (10.17)$$

де  $I$ ,  $\varphi_1 - \varphi_2 = \Delta\varphi$  і  $\mathcal{E}$  — відповідно миттєві значення сили струму в колі, різниці потенціалів між обкладками конденсатора та алгебрична сума ЕРС, що діють на цій ділянці кола. В нашому прикладі буде ЕРС самоіндукції:

$$\mathcal{E}_{ci} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (10.18)$$

Підставивши у формулу (10.17) вираз (10.18), одержимо

$$IR = \Delta\varphi - L \frac{dI}{dt}. \quad (10.19)$$

Якщо заряд на обкладках конденсатора  $q$ , то сила струму в колі дорівнюватиме

$$I = -\frac{dq}{dt}, \quad (10.20)$$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{d^2q}{dt^2}. \quad (10.21)$$

Знак «мінус» у формулі (10.20) означає, що позитивному напрямку  $I$ , прийнятому при складанні рівняння (10.17), відповідає зменшення позитивного заряду на верхній обкладці конденсатора ( $dq/dt < 0$ ).

Різниця потенціалів між обкладками конденсатора буде

$$\Delta\varphi = \frac{q}{C}. \quad (10.22)$$

Підставивши вирази (10.20) — (10.22) у рівняння (10.19), отримаємо:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0, \quad (10.23)$$

або

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0.$$

За формою воно аналогічне диференціальному рівнянню вільних затухаючих механічних коливань підвішеного на пружині тіла:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0, \quad (10.24)$$

або

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

$$\text{де } 2\beta = \frac{r}{m}; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

Аналогічно введемо позначення:

$$2\beta = \frac{R}{L}; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad (10.25)$$

і застосуємо їх у рівнянні (10.23). Дістанемо диференціальне рівняння затухаючих електричних коливань:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0. \quad (10.26)$$

Знайдемо розв'язок (рівняння (10.26) методом підстановки нової змінної величини  $z$ ):

$$q = z e^{-\beta t}, \quad (10.27)$$

де  $z$  — змінна величина від  $t$ .

Підставимо вираз (10.27) у (10.26) і зробимо перетворення. Одержимо:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + (\omega_0^2 - \beta^2) z = 0. \quad (10.28)$$

Це рівняння для випадку, коли  $\omega_0^2 - \beta^2 > 0$ , є гармонічним, і його розв'язком може бути функція

$$z = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (10.29)$$

де

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (10.30)$$

Підставимо  $z$  із формули (10.29) у вираз (10.27) і знайдемо:

$$q = A e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi). \quad (10.31)$$

Величину  $A$  визначимо з початкових умов:  $t = 0$ ,  $q = q_0$ . Тоді  $A = q_0$  — максимальне значення заряду на обкладці конденсатора.

Отже, залежність

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (10.32)$$

є розв'язком диференціального рівняння (10.26).

Цей розв'язок описує затухаючі коливання заряду  $q$  на обкладках конденсатора. Величина  $q_0 e^{-\beta t}$  — амплітуда, яка зменшується з часом за експоненціальним законом. Оскільки  $\beta = \frac{R}{2L}$ , затухання коливань буде тим швидшим, чим більше значення  $R$  і менше  $L$ .

Період вільних затухаючих електричних коливань

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}, \quad \text{або } T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}. \quad (10.33)$$

Частота вільних затухаючих коливань

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (10.34)$$

Отже, період вільних затухаючих електричних коливань більший за період власних коливань, а частота затухаючих електричних коливань менша за частоту власних коливань контуру.

Крім заряду, затухаючі електричні коливання в контурі можна характеризувати ще різницею потенціалів (напругою)  $\Delta\varphi = U$  на обкладках конденсатора або силою струму, який тече у контурі.

Зі співвідношення між зарядом, напругою і ємністю можна записати:

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi). \quad (10.35)$$

Силу струму знайдемо з означення миттєвої величини сили струму в колі:

$$\begin{aligned} I &= \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} [q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)] = \\ &= -\beta q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) - \omega q_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi) = \\ &= q_0 e^{-\beta t} [-\beta \cos(\omega t + \varphi) - \omega \sin(\omega t + \varphi)]. \end{aligned}$$

Помножимо і поділимо праву частину цього рівняння на  $\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \beta^2}$ . Дістанемо

$$I = \omega_0 q_0 e^{-\beta t} \left[ -\frac{\beta}{\omega_0} \cos(\omega t + \varphi) - \frac{\omega}{\omega_0} \sin(\omega t + \varphi) \right].$$

Введемо кут  $\theta$ , який визначається умовами

$$\cos\theta = -\frac{\beta}{\omega_0} \quad \text{і} \quad \sin\theta = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Тоді можна написати:

$$\begin{aligned} I &= \omega_0 q_0 e^{-\beta t} [\cos\theta \cos(\omega t + \varphi) - \sin\theta \sin(\omega t + \varphi)] = \\ &= \omega_0 q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi + \theta). \end{aligned} \quad (10.36)$$

Оскільки  $\cos\theta < 0$ , а  $\sin\theta > 0$ , то  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ . Отже, за наявності в електричному колі активного опору сила струму випереджає по фазі напругу на конденсаторі більш ніж на  $\frac{\pi}{2}$ .

Швидкість затухання електричних коливань, згідно з формулами (10.32), (10.35) і (10.36), характеризується величиною **коефіцієнта затухання**:

$$\beta = \frac{R}{2L}.$$

Замість коефіцієнта затухання часто розглядають **логарифмічний декремент затухання**, який дорівнює логарифму відношення амплітуди сили струму в момент часу  $t$  до амплітуди сили струму в момент часу  $t + T$ :

$$\Delta = \ln \frac{q_0 \omega_0 e^{-\beta t}}{q_0 \omega_0 e^{-\beta(t+T)}} = \beta T. \quad (10.37)$$

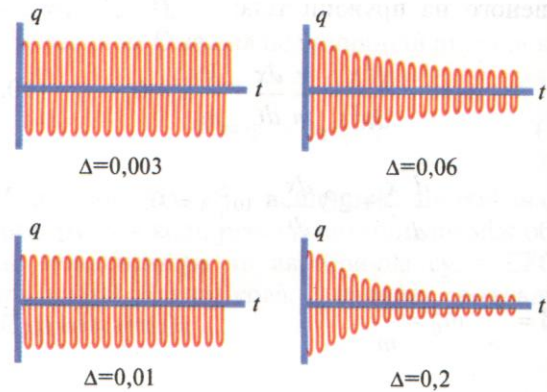
Отже, логарифмічний декремент затухання дорівнює добутку коефіцієнта затухання на період коливання.

Оскільки період  $T \approx 2\pi \sqrt{LC}$ , а  $\beta = \frac{R}{2L}$ , то

$$\Delta \approx \pi \frac{R}{\sqrt{L}} = \pi \frac{R}{R_x}. \quad (10.38)$$

З виразу (10.38) випливає, що логарифмічний декремент затухання вимірюється відношенням активного опору контуру до його хвильового опору, помноженого на  $\pi$ .

На мал. 10.4 наведено графіки затухаючих коливань заряду однакового періоду за чотирьох значень логарифмічного декременту затухання.



Мал. 10.4

Нерідко замість логарифмічного декременту затухання вводять іншу величину, що характеризує затухання, так звану **добротність** коливального контуру:

$$Q = 2\pi \frac{\text{Енергія електромагнітного коливання}}{\text{Втрата енергії за період}} =$$

$$= 2\pi \frac{LI_0^2}{I_{\text{эф}}^2 RT} = 2\pi \frac{LI_0^2}{\frac{I_0^2}{2} RT} = 2\pi \frac{L}{R \cdot 2\pi \sqrt{LC}} =$$

$$= \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{R_x}{R},$$

або

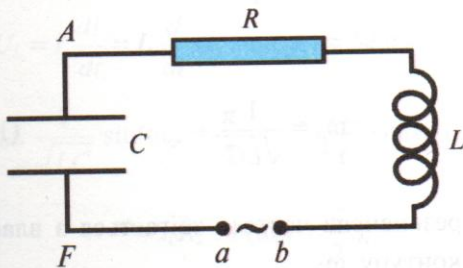
$$Q = \frac{R_x}{R} = \frac{\pi}{\Delta} \quad (10.39)$$

Отже, добротність коливального контуру дорівнює відношенню хвильового опору контуру до його активного опору і є величиною, обернено пропорційною логарифмічному декременту затухання з коефіцієнтом пропорційності  $\pi$ .

### 10.3. ВИМУШЕНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛИВАННЯ

Вільні електричні коливання в контурі з часом затухають внаслідок втрати енергії на нагрівання провідників. Для одержання незатухаючих коливань у контур ззовні потрібно підводити енергію, яка б компенсувала енергію на нагрівання контуру. Так, включивши в контур джерело з електрорушійною силою, яка змінюється періодично, можна одержати незатухаючі коливання, тобто коливання з незмінними амплітудами заряду, сили струму і напруги.

Нехай коливальний контур з ємності  $C$ , індуктивності  $L$  й омичного опору  $R$  розірваний у деякому місці і до вільних його кінців  $a$  і  $b$  підведені провідники від зовнішнього джерела зі змінною електрорушійною силою  $\mathcal{E}$  (мал. 10.5). Розглянемо випадок,



Мал. 10.5

коли змушувальна електрорушійна сила змінюється в часі за законом синуса:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega' t, \quad (10.40)$$

де  $\mathcal{E}_0$  — амплітуда ЕРС;  $\omega'$  — циклічна частота.

Для одержання диференціального рівняння вимушених електричних коливань у законі Ома (10.17) потрібно замінити  $\mathcal{E}$  на суму ЕРС, яка викликає коливання, та ЕРС самоіндукції. Після перетворення одержимо:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = -\mathcal{E}_0 \sin \omega' t. \quad (10.41)$$

Це рівняння (10.41) є лінійним неоднорідним. Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (10.41) дорівнює сумі частинного розв'язку цього рівняння і розв'язку відповідного однорідного рівняння, тобто (10.32).

Величина другого члена суми, тобто виразу (10.32), містить експоненціальний множник  $e^{-\beta t}$ , тому вона швидко зменшується і через деякий час після початку коливань впливом цього члена можна знехтувати. Частинний розв'язок рівняння (10.41) шукатимемо, виходячи з таких міркувань. Оскільки в контурі змінна синусоїдальна ЕРС, то, очевидно, і сила струму в контурі буде змінною синусоїдальною такої самої частоти, але, можливо, з деякою різницею фаз. Отже, розв'язок рівняння шукатимемо у вигляді

$$I = -\frac{dq}{dt} = I_0 \sin(\omega' t - \varphi). \quad (10.42)$$

Завдання полягає в знаходженні таких значень **амплітуди сили струму**  $I_0$  початкової фази, щоб вираз (10.42) перетворював рівняння (10.41) на тотожність.

З рівняння (10.42) знайдемо:

$$1. \quad \frac{dq}{dt} = -I_0 \sin(\omega' t - \varphi); \quad (a)$$

$$2. \quad \frac{d^2 q}{dt^2} = -I_0 \omega' \cos(\omega' t - \varphi) =$$

$$= -I_0 \omega' \sin(\omega' t - \varphi + \frac{\pi}{2}); \quad (б)$$

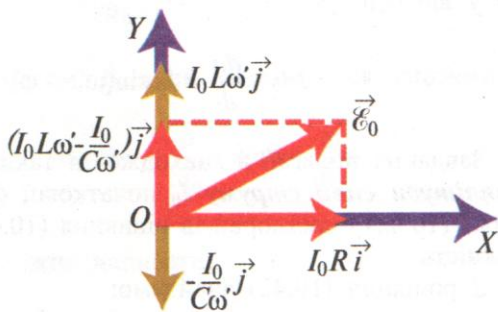
$$3. \quad q = \int -I_0 \sin(\omega' t - \varphi) dt = -\frac{I_0}{\omega'} [-\cos(\omega' t - \varphi)] =$$

$$= -\frac{I_0}{\omega} \sin(\omega' t - \varphi - \frac{\pi}{2}). \quad (в)$$

Підставивши одержані значення (а), (б), (в) у де рівняння (10.41), отримаємо:

$$LI_0\omega' \sin(\omega't - \varphi + \frac{\pi}{2}) + I_0 R \sin(\omega't - \varphi) + \frac{I_0}{\omega' C} \sin(\omega't - \varphi - \frac{\pi}{2}) = \mathcal{E}_0 \sin\omega't. \quad (10.43)$$

Тотожність (10.43) можна розглядати як проєкцію векторної суми амплітуд напруг, що виявляються на ділянках контуру, на довільно вибрану координатну вісь, наприклад  $OX$ . Так,  $I_0R$  за змістом виражає амплітудне значення напруги на омичному опорі; аналогічно  $I_0L\omega'$  — амплітудне значення напруги на індуктивності, де  $L\omega'$  — величина індуктивного опору;  $I_0 \frac{1}{\omega' C}$  — амплітудне значення напруги на ємності  $C$ , де  $\frac{1}{\omega' C}$  — величина ємнісного опору. Побудуємо в прямокутній системі координат  $XOY$  вектори, які відповідають амплітудним значенням зазначених напруг. Їх векторна сума дорівнюватиме вектору амплітудного значення змушувальної ЕРС  $\mathcal{E}_0$ . На горизонтальній осі  $OX$  відкладаємо вектор завдовжки  $I_0R$ , тоді вектор завдовжки  $I_0L\omega'$  буде напрямлений вздовж осі  $OY$  вгору, а вектор завдовжки  $\frac{I_0}{\omega' C}$  по осі  $OY$  вниз (мал. 10.6).



Мал. 10.6

З малюнка випливає, що

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega' - \frac{1}{\omega' C}}{R}; \quad (10.44)$$

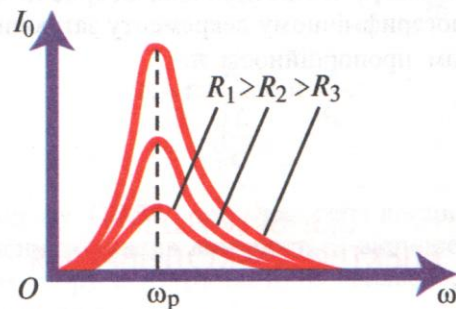
$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega' - \frac{1}{\omega' C}\right)^2}} = \frac{\mathcal{E}_0}{Z}, \quad (10.45)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega' - \frac{1}{\omega' C}\right)^2}. \quad (10.46)$$

Формула (10.45), що виражає залежність амплітуди  $I_0$  змінного струму в контурі від амплітуди  $\mathcal{E}_0$  змушувальної ЕРС, аналогічна закону Ома для замкненого кола постійного струму. Тому величину  $Z$  називають **повним опором** коливального контуру (кола змінного струму), а величину

$$L\omega' - \frac{1}{\omega' C} \quad (10.47)$$

реактивним опором.



Мал. 10.7

Амплітуда сили струму в контурі, згідно з виразом (10.45), залежить не лише від параметрів контуру  $R, L, C$  та амплітуди  $\mathcal{E}_0$  змушувальної ЕРС, а й від циклічної частоти  $\omega'$ . На мал. 10.7 наведено графіки залежності амплітуди  $I_0$  сили струму від частоти за сталих  $R, L, C$  і  $\mathcal{E}_0$ . Незалежно від величини  $R$  активного опору амплітуда сили струму в контурі досягає максимального значення тоді, коли реактивний опір дорівнює нулю. Частоту, за якої  $I_0$  максимальна, називають **резонансною частотою**. Величину резонансної частоти визначають з умови

$$L\omega_p - \frac{1}{\omega_p C} = 0,$$

звідки

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (10.48)$$

Отже, резонансна частота збігається з власною частотою контуру  $\omega_0$ .

Явище різкого зростання амплітуди сили струму в коливальному контурі у разі наближення циклічної частоти змушувальної ЕРС до значення  $\omega_p$



називають **явищем резонансу**, а криву залежності  $I_0$  від  $\omega'$  — **резонансною кривою**.

Знайдемо розв'язок диференціального рівняння затухаючих електричних коливань (10.41) за резонансу. Для цього у формулу (10.42) підставимо резонансне значення амплітуди сили струму  $I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R}$ , резонансну частоту  $\omega_p$  і  $\varphi = 0$  (що впливає з формули (10.44)). Отримаємо:

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \sin \omega_p t = I_0 \sin \omega_p t. \quad (10.49)$$

Заряд за резонансної частоти буде

$$q = \int I dt = \int I_0 \sin \omega_p t dt = -\frac{I_0}{\omega_p} \cos \omega_p t = \frac{I_0}{\omega_p} \sin(\omega_p t - \frac{\pi}{2}). \quad (10.50)$$

Визначимо також спад напруги за резонансу на окремих ділянках коливального контуру (див. мал. 10.5). Спад напруги на ємності

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{I_0}{\omega_p C} \sin(\omega_p t - \frac{\pi}{2}) = \frac{I_0}{C \frac{1}{\sqrt{LC}}} \sin(\omega_p t - \frac{\pi}{2}) = I_0 \sqrt{\frac{L}{C}} \sin(\omega_p t - \frac{\pi}{2}) = I_0 R_x \sin(\omega_p t - \frac{\pi}{2}).$$

Отже,

$$U_C = I_0 R_x \sin(\omega_p t - \frac{\pi}{2}), \quad (10.51)$$

де  $R_x = \sqrt{\frac{L}{C}}$  — хвильовий опір контуру.

Спад напруги на індуктивності  $L$  за величиною дорівнює ЕРС самоіндукції:

$$U_L = L \frac{dI}{dt} = L \frac{d}{dt} (I_0 \sin \omega_p t) = I_0 L \omega_p \cos \omega_p t = I_0 L \frac{1}{\sqrt{LC}} \sin(\omega_p t + \frac{\pi}{2}) = I_0 \sqrt{\frac{L}{C}} \sin(\omega_p t + \frac{\pi}{2}) = I_0 R_x \sin(\omega_p t + \frac{\pi}{2}).$$

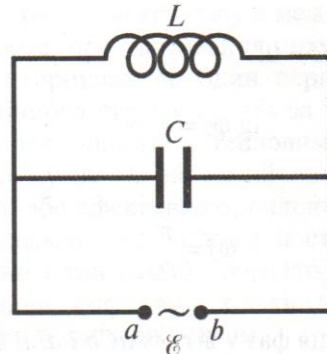
Отже,

$$U_L = I_0 R_x \sin(\omega_p t + \frac{\pi}{2}). \quad (10.52)$$

З виразів (10.51) і (10.52) випливає, що амплітуди  $U_C$  та  $U_L$  однакові, а їх фази протилежні:  $U_L$  випереджає  $U_C$  по фазі на  $\pi$ . Тому  $U_L + U_C = 0$  і повний спад напруги в контурі дорівнює спаду напруги  $U_R$  на активному опорі:

$$U_R = IR = I_0 R \sin \omega_p t. \quad (10.53)$$

У зв'язку з цим розглянуте явище резонансу в колі, яке складається з послідовно з'єднаних активного опору, індуктивності та ємності, називають **резонансом напруг**.



Мал. 10.8

Крім схеми, зображеної на мал. 10.5, для одержання незатухаючих електричних коливань можна скористатися схемою, наведеною на мал. 10.8. Дві вітки — одна з ємністю  $C$ , друга — з індуктивністю  $L$  з'єднані паралельно. Омичний опір  $R$  для спрощення вважатимемо таким, що дорівнює нулю по всьому колу. Зовнішня електрорушійна сила

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega' t$$

підведена до точок  $a$  і  $b$  контуру.

За формулою (10.42) запишемо значення сил струму у вітках кола. У першій — за умови, що  $L = 0$ :

$$I_1 = I_{01} \sin(\omega' t - \varphi_1), \quad (10.54)$$

у другій — за умови, що  $C = 0$ :

$$I_2 = I_{02} \sin(\omega' t - \varphi_2).$$

Амплітудні значення сил струмів  $I_{01}$  та  $I_{02}$  знайдемо за формулою (10.45). У першій вітці за умови:  $R = 0$  і  $L = 0$ :

$$I_{01} = \mathcal{E}_0 C \omega'. \quad (10.55)$$

У другій — за умови:  $R = 0$  і  $C = 0$ :

$$I_{02} = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega' L} \quad (10.56)$$

Значення початкових фаз сил струмів у вітках  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  визначимо за формулою (10.44) за  $R = 0$  і  $L = 0$ :

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = -\infty,$$

звідки

$$\varphi_1 = -\frac{\pi}{2} \quad (10.57)$$

За  $R = 0$  і  $C = 0$ :

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = +\infty,$$

звідки

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} \quad (10.58)$$

Отже, різниця фаз у вітках  $aCb$  і  $aLb$  дорівнює

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \pi, \quad (10.59)$$

тобто напрямки струмів  $I_{01}$  та  $I_{02}$  протилежні, і в провідниках, що підходять до точок  $a$  і  $b$ , тече струм з амплітудою

$$I_0 = I_{01} - I_{02}.$$

Підставивши в останнє рівняння значення  $I_{01}$  та  $I_{02}$  відповідно з виразів (10.55) і (10.56), одержимо:

$$I_0 = \mathcal{E}_0 \left( C\omega' - \frac{1}{L\omega'} \right). \quad (10.60)$$

Отже, сила струму в підвідних провідниках менша, ніж сила струму в окремих вітках. Вона дорівнює нулю, якщо

$$C\omega' - \frac{1}{L\omega'} = 0,$$

тобто за умови, що частота змущувальної електро-рушійної сили

$$\omega' = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

тобто саме за умови резонансу.

Явище різкого зменшення амплітуди сили струму в зовнішньому колі, яке живиться паралельно з'єднані ємнісний та індукційний опори, у разі наближення частоти  $\omega'$  змущувальної ЕРС до резонансної частоти  $\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  називають **резонансом струмів**.

## 10.4. ЗМІННИЙ СТРУМ

Змінним називають такий струм, який упродовж певного часу змінюється за величиною і напрямком. В теорії і практиці електротехніки під змінним струмом розуміють вужчу і цілком певну категорію електричного струму — періодичний змінний синусоїдальний струм із частотою  $\nu = 50$  Гц.

Описані вище процеси мають місце в реальних електромережах, які живляться змінним струмом. Коротко зупинимось на характеристиках змінного струму.

### 1. Електрорушійна сила джерела змінного струму

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t, \quad (10.61)$$

де  $\mathcal{E}_0$  — амплітуда ЕРС;  $\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 50 = 100\pi$  — циклічна частота.

### 2. Сила струму

$$I = I_0 \sin(\omega t - \varphi), \quad (10.62)$$

де  $I_0$  — амплітуда, яку визначають за формулою (10.45);  $\varphi$  — зміщення фаз між  $\mathcal{E}$  та  $I$ , яке визначають за формулою (10.44).

### 3. Закон Ома

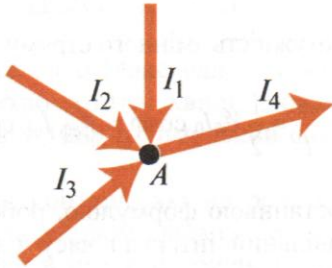
$$I = \frac{\mathcal{E}}{Z} = \frac{\mathcal{E}_0 \sin \omega t}{\sqrt{R^2 + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}}, \quad (10.63)$$

де  $Z$  — повний опір кола, який іще називають **імпедансом**;  $R$  — активний (омічний) опір;  $L$  — індуктивність кола;  $L\omega$  — індуктивний опір;  $C$  — електроємність кола;  $\frac{1}{C\omega}$  — ємнісний опір кола;  $\left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$  — реактивний опір кола.

4. Закони (правила) Кірхгофа для змінних струмів. Для змінних струмів без жодних змін застосо-

вують перший закон (правило) Кірхгофа. Це випливає з того, що у вузлах (точках сходження провідників) електроємність дуже мала, в них не можуть накопичуватися електричні заряди. Тому в будь-який момент часу сума сил струмів, які підходять до вузла, має дорівнювати сумі сил струмів, які відходять від нього (мал. 10.9):

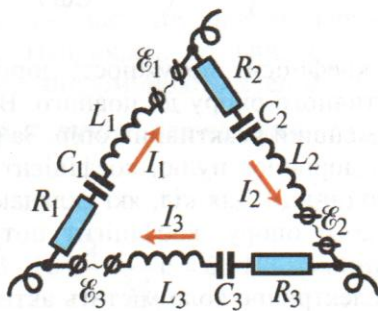
$$I_1 + I_2 + I_3 = I_4. \quad (10.64)$$



Мал. 10.9

Другий закон (правило) Кірхгофа також правильно застосовувати до синусоїдальних змінних струмів, якщо омичний опір всюди замінити на відповідні повні опори  $Z$  (мал. 10.10). Тоді

$$\sum_k I_k \sqrt{R_k^2 + \left( L_k \omega - \frac{1}{C_k \omega} \right)^2} = \sum_k \mathcal{E}_k, \quad (10.65)$$



Мал. 10.10

або

$$\sum_k I_k Z_k = \sum_k \mathcal{E}_k.$$

Прикладену електрорушійну силу  $\mathcal{E}_k$  вважають додатною, якщо в разі обходу контуру джерело струму проходиться від негативного полюса до позитивного.

## 10.5. ДІЮЧЕ ЗНАЧЕННЯ СИЛИ І НАПРУГИ ЗМІННОГО СТРУМУ

Хоча змінний і постійний струми течуть в електричних колах по-різному, вони мають також і спільні властивості. І постійний, і змінний струми, проходячи по провідниках, нагрівають їх. Теплову дію постійного і змінного струму можна визначити за законом Джоуля—Ленца. Тільки при цьому для змінного струму треба виходити з його дії за короткий інтервал часу. Упродовж одного періоду змінний струм має різні значення. Зрозуміло, що й кількість енергії струму, яка витрачається на нагрівання провідника, в різні проміжки часу в межах періоду буде різною. Проте про нагрівання провідника можна дізнатися, наприклад, за один період. При цьому про дію змінного струму судять за тепловим ефектом, який порівнюють з тепловим ефектом постійного струму за такий самий проміжок часу.

Діючою, або ефективною, силою змінного струму  $I_{\text{ef}}$  називають силу такого постійного струму, який за один і той самий проміжок часу виділяє в деякому опорі таку саму кількість теплоти, як і досліджуваний змінний струм.

Знайдемо співвідношення ефективного й амплітудного значень сили змінного струму. Для цього обчислимо кількості теплоти, яку виділяють постійний і змінний струми за час  $T$ , що дорівнює періоду змінного струму.

1. Кількість теплоти, яка виділяється в разі проходження постійного струму за час  $T$ , дорівнює

$$Q = I_{\text{п}}^2 RT, \quad (10.66)$$

де  $I_{\text{п}}$  — сила постійного струму.

2. Кількість теплоти, яка виділяється в разі проходження змінного струму за час  $dt$ , становить

$$dQ = I_{\text{зм}}^2 R dt, \quad (10.67)$$

де  $I_{\text{зм}}$  — сила змінного струму, яка, згідно з виразом (10.42), дорівнює

$$I = I_0 \sin(\omega t - \varphi),$$

де  $I_0$  — амплітуда сили струму;  $\varphi$  — зсув фаз між  $\mathcal{E}$  та  $I$ , який визначається за виразом (10.44) за умови, що реактивний опір дорівнює нулю, оскільки нагрівається лише провідник.

Отже,  $\text{tg} \varphi = 0$  і  $\varphi = 0$ . Тому  $I = I_0 \sin \omega t$ . Підставивши значення  $I$  у формулу (10.67), знайдемо

$$dQ = I_0^2 \sin^2 \omega t R dt = I_0^2 \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt.$$

Проінтегруємо вираз (10.67) і визначимо кількість теплоти, яка виділяється в провіднику, у разі проходження змінного струму упродовж періоду  $T$ :

$$Q = \int_0^T I_0^2 \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} R dt = \frac{I_0^2 RT}{2}. \quad (10.68)$$

Зіставивши вирази (10.68) і (10.66), бачимо, що

$$I_{\text{п}}^2 = I_{\text{еф}}^2 = \frac{I_0^2}{2},$$

звідки

$$I_{\text{еф}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}. \quad (10.69)$$

Помножимо ліву і праву частини рівняння (10.69) на  $R$ , і дістанемо

$$U_{\text{еф}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}. \quad (10.70)$$

Амперметр і вольтметр у колі змінного струму показують не миттєві і не максимальні значення сили струму і напруги, а ефективні.

## 10.6. РОБОТА І ПОТУЖНІСТЬ ЗМІННОГО СТРУМУ

Обчислимо роботу змінного струму за час одного періоду. Елементарна робота струму

$$dA = \mathcal{E} I dt.$$

Підставимо в цей вираз значення електрорушійної сили  $\mathcal{E}$  і сили струму  $I$  відповідно з формул (10.61) і (10.42):

$$\begin{aligned} dA &= \mathcal{E}_0 \sin(\omega t) I_0 \sin(\omega t - \varphi) dt = \\ &= \mathcal{E}_0 I_0 \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi) dt = \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 I_0 [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)] dt. \end{aligned} \quad (10.71)$$

Проінтегруємо це рівняння в межах від 0 до  $T$ :

$$A = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 I_0 \cos \varphi \int_0^T dt - \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 I_0 \int_0^T \cos(2\omega t - \varphi) dt.$$

Значення другого інтеграла, що виражає суму значень періодичної функції за період коливань, дорівнює нулю, тому шукана робота змінного струму за період коливань буде

$$A = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 I_0 T \cos \varphi. \quad (10.72)$$

Середня потужність змінного струму становитиме

$$N = \frac{A}{T} = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 I_0 \cos \varphi = \mathcal{E}_{\text{еф}} I_{\text{еф}} \cos \varphi. \quad (10.73)$$

Згідно з останньою формулою, робота змінного струму за довільний інтервал часу  $t$  буде

$$A = \mathcal{E}_{\text{еф}} I_{\text{еф}} t \cos \varphi. \quad (10.74)$$

Потужність змінного струму, а отже, і робота, істотно залежать від зсуву фаз електрорушійної сили (напруги) і сили струму, тому  $\cos \varphi$  називають **коефіцієнтом потужності**. Його легко визначити з векторної діаграми, зображеної на мал. 10.6:

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}. \quad (10.75)$$

Отже, коефіцієнт потужності дорівнює відношенню активного опору до повного. Він тим більший, чим менший реактивний опір. За реактивного опору, що дорівнює нулю, коефіцієнт потужності дорівнює одиниці. Для кіл, які складаються тільки з реактивного опору, коефіцієнт потужності дорівнює нулю.

Якщо електричне коло містить активний і реактивний опори, то й повну потужність, яка витрачається в такому колі, можна розглядати як таку, що складається з двох частин: **активної** і **реактивної**. Активна потужність витрачається в електричному колі на перетворення електричної енергії на теплову, механічну і світлову. Це перетворення відбувається на активному опорі. Реактивна потужність зв'язана з реактивним опором (індуктивним і ємнісним). Вона характеризує частину електричної енергії, одержану від джерела змінного струму споживачем, яка повертається назад з електричного кола до джерела струму. Отже, реактивна потужність не використовується корисно. Тому споживач електро-

енергії завжди має прагнути до зменшення реактивної потужності через підвищення коефіцієнта потужності. Найменше допустиме значення коефіцієнта потужності ( $\cos\phi$ ) при використанні змінного струму на підприємствах — 0,85.

### 10.7. ГЕНЕРУВАННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ. ДОСЛІДИ ГЕРЦА

Згідно з теорією Максвелла в просторі можуть існувати електромагнітні хвилі. Експериментально це підтвердив у 1888 р. німецький фізик Г. Р. Герц (1857—1894).

Коливальні контури, які ми розглядали раніше, непридатні для випромінювання електромагнітних хвиль, оскільки в них електричні і магнітні поля в основному зосереджені між обкладками конденсатора і всередині соленоїда (катушки), тому вони випромінюють дуже мало електромагнітних хвиль. Крім того, електромагнітні коливання в таких контурах мають відносно великі періоди коливань:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}$$

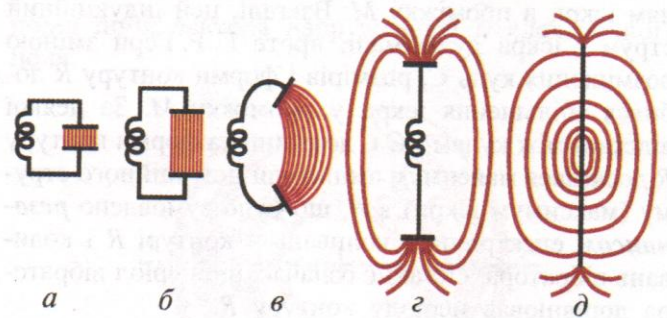
а тому довжини випромінюваних електромагнітних хвиль дуже великі, що утруднює експериментальне їх виявлення. Наприклад, довжина електромагнітних хвиль, що випромінюються електричними колами змінних струмів, період яких  $T = \frac{1}{50}$  с, дорівнює

$$\lambda = cT = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \frac{1}{50} \text{ с} = 6 \cdot 10^6 \text{ м} = 6000 \text{ км}.$$

Тому Г. Р. Герц мав передусім реалізувати два завдання: 1) зробити коливальний контур відкритим; 2) значно зменшити власний період коливання контуру.

Якщо поступово збільшувати відстань між обкладками конденсатора мал. 10.11, то коливальний контур у граничному випадку матиме вигляд, зображений на мал. 10.11, д. Відмінність коливального контуру а від коливального контуру д полягає в тому, що в першому ємність і індуктивність зосереджені в певних місцях, а в останньому — розподілені по всій довжині провідника.

Якщо кінцям провідника надати різнойменних зарядів і тим самим надати йому деякого запасу

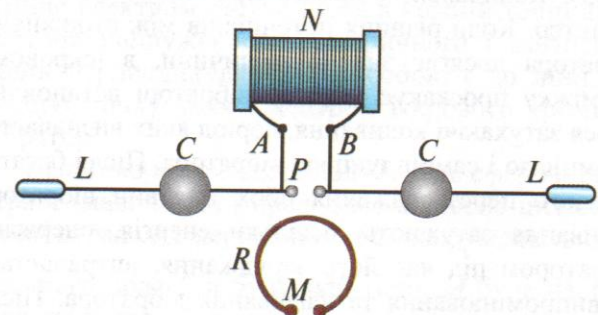


Мал. 10.11

електричної енергії, то розпочнеться розряд, потече електричний струм, навколо струму виникне магнітне поле, далі магнітне поле руйнуватиметься, в проводі виникне явище самоіндукції й потече індукційний струм в тому самому напрямку. Цей процес відбуватиметься доти, доки кінці проводу не перезарядяться. Після цього почнеться зворотний рух зарядів і т. д.

Прямолінійний провідник, в якому збуджуються електричні коливання, називають **вібратором**, або електричним диполем, оскільки на кінцях його періодично виникають заряди, однакові за величиною і протилежні за знаком. Йому властиве сильне випромінювання електромагнітних хвиль за невеликого періоду коливань.

Г. Р. Герц побудував відкритий вібратор у вигляді двох стрижнів (мал. 10.12) завдовжки по 130 см з іскровим проміжком  $P$  між ними, який можна змінювати мікрометричним гвинтом, на стрижнях могли переміщуватися цинкові кулі  $C$  (діаметрами по 30 см). Стрижні були з'єднані з полюсами  $A$  і  $B$  вторинної обмотки індуктора Румкорфа  $N$ . Ця система є **вібратором**, здатним давати коливання з періодом  $2 \cdot 10^{-8}$  с, й отже, генерувати електромагнітні хвилі з довжиною  $\lambda = 6$  м.



Мал. 10.12

Для виявлення цих хвиль, які поширювались від  $P$ , Г. Р. Герц на деякій відстані від вібратора розміщував **резонатор** — круглий або прямокутний контур  $R$  з дроту з іскровим проміжком  $M$ . У цьому

контурі за певного його розміщення може виникати індукційний струм, який виявляють за проскакуванням іскри в проміжку  $M$ . Взагалі, цей індукційний струм і іскра дуже малі, проте Г. Р. Герц зміною розміщення куль  $C$ , розмірів і форми контуру  $R$  добився збільшення іскри у проміжку  $M$ . За деякої відстані між кулями  $C$  і довжини та форми контуру  $R$  досягався максимум амплітуди індукційного струму (максимум іскри) в  $R$ , що було зумовлено **резонансом** електричних коливань у контурі  $R$  і коливань вібратора. Останнє означає, що період вібратора дорівнював періоду контуру  $R$ .

Г. Р. Герц експериментально довів існування електромагнітних хвиль, можливість їх генерування й приймання за допомогою резонаторів; виявив явища відбивання і заломлення, інтерференції електромагнітних хвиль. Цим самим було підтверджено сформульовану у 1865 р. Д. К. Максвеллом гіпотезу про можливість існування у вільному просторі електромагнітних хвиль.

## 10.8. ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ ВІБРАТОРА

У разі переходу до відкритого коливального контуру у вигляді прямолінійного провідника струм зміщення розподіляється в навколишньому просторі. Саме ця обставина зумовлює зростання випромінювання електромагнітних хвиль.

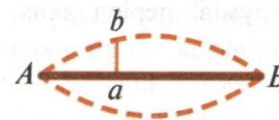
Розглянемо змінне електричне поле, яке утворюється коливними зарядами електричного диполя. За модель диполя візьмемо електричний вібратор, утворений двома короткими стрижнями, між якими є повітряний проміжок. Коливання у вібраторі збуджуються за допомогою котушки Румкорфа (мал. 10.13). Коливальний процес при цьому має такий характер. Коли різниця потенціалів між стрижнями вібратора досягає значної величини, в іскровому проміжку проскакує іскра, у вібраторі встановлюються затухаючі коливання, період яких визначається ємністю і самоіндукцією вібратора. Після багаторазового перезаряджання обох половин вібратора коливання затухають, оскільки енергія, одержана вібратором під час його заряджання, витрачається на випромінювання та нагрівання вібратора. Після цього котушка Румкорфа знову заряджає вібратор, і процес повторюється.

У диполі під час коливань тече струм високої частоти (в дослідах Г. Р. Герца порядку  $10^8$  Гц), який на кінцях диполя відбивається і змінює свій напрямок на протилежний; у диполі відбувається



Мал. 10.13

інтерференція біжучої (прямої) і відбитої хвиль, у результаті чого в ньому встановлюються стоячі хвилі. Це означає, що амплітуда сили струму в різних місцях диполя має різні значення, причому на кінцях диполя сила струму має вузли, а посередині — пучність. Отже, в диполі, в якому відбуваються електричні коливання, у різних перерізах провідника сила струму в один і той самий момент часу має різні значення. Це приклад неквазістационарного процесу. Згідно з теорією Максвелла повний струм, тобто сума струмів провідності та зміщення, залишається однаковим в усіх перерізах диполя. Звідси випливає, що в тих місцях, де сила струму провідності дорівнює нулю, сила струму зміщення має максимальне значення. За періодичного процесу амплітуда сили струму зміщення найбільша в тих місцях, де найбільша амплітуда напруженості електричного поля. Отже, амплітуда напруженості електричного поля максимальна в точках, де амплітуда



Мал. 10.14

сили струму провідності дорівнює нулю. Пучності напруженості  $\vec{E}$  розміщені на кінцях диполя, вузол — посередині. Графічний розподіл амплітуди сили струму провідності наведено на мал. 10.14. Пряма  $AB$  зображує вібратор, а вертикальні відстані до штрихових кривих, наприклад  $ab$ , — амплітуду сили змінного струму в даних точках вібратора. Розподіл напруженостей електричного поля біля вібратора графічно зображено на мал. 10.15, на якому вертикальні відстані точок штрихових кривих, на-



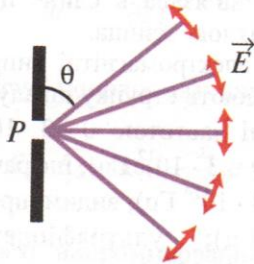
Мал. 10.15

приклад  $cd$ , від лінії  $AB$  ілюструють амплітуди напруженостей в даних точках вібратора.

Отже, довжина випромінюваних вібратором хвиль  $\lambda$  приблизно вдвічі більша за довжину вібратора. Тому подібний вібратор називають **півхвильовим**.

У просторі, що оточує працюючий вібратор, виникають змінні електричне і магнітне поля. Власивості цих полів експериментально дослідив Г. Р. Герц за допомогою резонаторів. Зокрема, він встановив таке.

1. Структура електромагнітного поля поблизу вібратора досить складна, але вже на відстані, що в 5—6 разів перевищує довжину вібратора поле набуває досить простої будови. Вектори напруженості електричного поля розміщені в площинах, які проходять через вісь вібратора і напрямлені перпендикулярно до ліній, що з'єднують розглядувану точку поля із серединою іскрового проміжку  $P$  (мал. 10.16).



Мал. 10.16

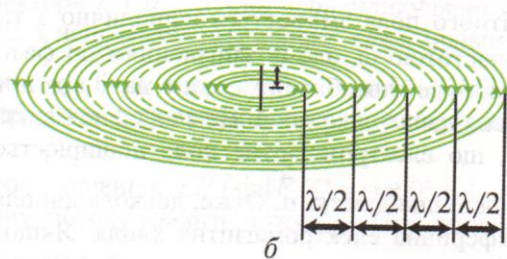
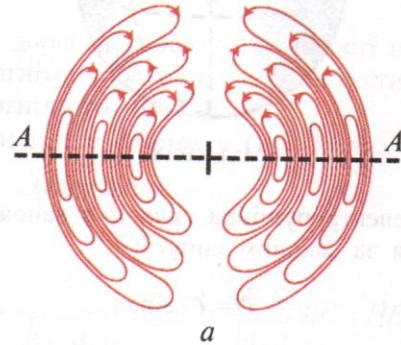
У площині, перпендикулярній до осі вібратора, яка проходить через його середину, величина напруженості електричного поля найбільша. В напрямку вібратора електричного поля немає.

Амплітуда напруженості електричного поля визначається виразом

$$E_0 = \frac{I_0}{r} \frac{l}{\lambda} \sin\theta, \quad (10.76)$$

де  $I_0$  — амплітуда сили струму в диполі;  $r$  — відстань від центра іскрового проміжку диполя до розглядуваної точки;  $l$  — довжина диполя;  $\lambda$  — довжина електромагнітної хвилі;  $\theta$  — кут між віссю диполя і напрямком  $r$ .

На мал. 10.17, *a* наведено вертикальний розріз електромагнітного поля і показано миттєвий розподіл ліній вектора напруженості  $\vec{E}$  електричного поля.

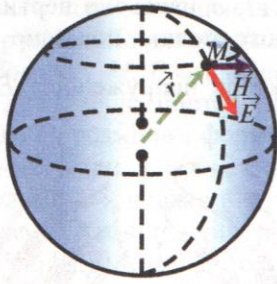


Мал. 10.17

2. Магнітні силові лінії випромінюваного електромагнітного поля лежать у площинах, перпендикулярних до осі диполя. Вони є концентричними колами з центрами на осі диполя й охоплюють лінії вектора напруженості електричного поля. На мал. 10.17, *б* наведено горизонтальний розріз електромагнітного поля й миттєвий розподіл магнітних силових ліній.

Отже, у просторі, що оточує вібратор, виникає змінне електромагнітне поле, в кожній точці якого вектори напруженості електричного і магнітного полів перпендикулярні між собою і до лінії, що з'єднує точку поля з центром іскрового проміжку вібратора.

Візьмемо напрямок диполя за вісь сферичної поверхні (мал. 10.18) і проведемо відносно цієї осі на сфері паралелі і меридіани. Тоді напруженість електричного поля  $\vec{E}$  в будь-якій точці  $M$  буде напрямлена по дотичній до меридіана, а напруженість магнітного поля  $\vec{H}$  — по дотичній до паралелі. Якщо дивитися вздовж променя  $r$ , то миттєва картина хвилі буде такою, як зображено на мал. 10.18 (вектори  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  і  $r$  становлять правогвинтову трійку).



Мал. 10.18

Якщо електрорушійна сила  $\mathcal{E}$  в даному диполі змінюється за законом синуса:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$$

(де  $\omega$  — циклічна частота коливань), то напруженість електричного поля  $\vec{E}$  в кожній точці електромагнітного поля змінюється періодично з такою самою частотою  $\omega$ , але із запізненням по фазі. Запізнення буде тим більшим, чим далі від диполя розміщена дана точка поля. Це запізнення викликане тим, що електромагнітне поле поширюється зі скінченною швидкістю  $v$ . Отже, довкола диполя виникає сферична електромагнітна хвиля. Якщо відстань від диполя до даної точки поля позначити через  $r$ , то коливання величини вектора  $\vec{E}$  можна описати рівнянням

$$\begin{aligned} E &= \frac{E_0 \sin \theta}{r} \sin \omega \left( t - \frac{r}{v} \right) = \\ &= \frac{E_0 \sin \theta}{r} \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right), \end{aligned} \quad (10.77)$$

де  $\theta$  — кут між віссю диполя і напрямком радіуса-вектора  $r$ , проведеним із центра диполя в точку поля, що розглядається;  $T$  — період;  $\lambda$  — довжина хвилі.

Оскільки в біжучій хвилі максимумами і мінімумами напруженостей магнітного й електричного полів збігаються, тобто обидва вектори змінюються в однакових фазах, то напруженість магнітного поля можна виразити формулою

$$\begin{aligned} H &= \frac{H_0 \sin \theta}{r} \sin \omega \left( t - \frac{r}{v} \right) = \\ &= \frac{H_0 \sin \theta}{r} \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right). \end{aligned} \quad (10.78)$$

Електромагнітні хвилі Герца мали велику довжину — декілька метрів. Чимало дослідників на-

магалися за його методом одержати хвилі меншої довжини. Так, у 1895 р. московський фізик П. М. Лебедев (1866—1912) отримав і дослідив міліметрові хвилі. Згодом експериментатори вдосконалили методику генерації електромагнітних хвиль і дістали коротші хвилі. Радянський фізик О. А. Глаголева-Аркадьєва (1884—1945) розробила новий метод генерації електромагнітних хвиль, у 1922 р. сконструювала джерело електромагнітного випромінювання (масовий випромінювач), а в 1923 р. одержала електромагнітні хвилі від 50 мм до 82 мкм. Тим самим було доведено можливість штучного генерування електромагнітних хвиль, які перекривають частину спектра інфрачервоних (теплових) хвиль. Досліди з електромагнітними хвилями увінчалися створенням російським фізиком О. С. Поповим (1859—1906) радіотелеграфу в 1895 р. Це дало поштовх до розвитку нових галузей техніки — радіо-телевізійної техніки. У 1897 р. він виявив явище відбивання радіохвиль від кораблів, які знаходилися на шляху їх поширення. Це явище було покладено в основу радіолокації, яка набула широкого застосування у військовій техніці, транспорті, космічній справі та астрономії.

За теорією Максвелла світлові хвилі також є електромагнітними хвилями дуже малої довжини. Теорія Максвелла, встановивши електромагнітну природу світла, зв'язала в єдине ціле вчення про електричні і світлові явища.

Відомі нині електромагнітні випромінювання за частотами утворюють струнку шкалу хвиль: 1) низькочастотні хвилі частотою  $0 - 3 \cdot 10^4$  Гц; 2) радіохвилі ( $3 \cdot 10^4 < \nu \leq 3 \cdot 10^{12}$  Гц); інфрачервоні промені ( $8,6 \cdot 10^{11} \leq \nu \leq 4 \cdot 10^{14}$  Гц); видимі промені ( $4 \cdot 10^{14} < \nu \leq 7,5 \cdot 10^{14}$  Гц); ультрафіолетові промені ( $7,5 \cdot 10^{14} < \nu \leq 6 \cdot 10^{16}$  Гц); рентгенівські промені ( $3 \cdot 10^{16} \leq \nu \leq 3 \cdot 10^{20}$  Гц);  $\gamma$ -промені ( $\nu \geq 3 \cdot 10^{19}$  Гц).

### 10.9. ЕНЕРГІЯ, ПОТУЖНІСТЬ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ. ВЕКТОР ПОЙНТИНГА

Під час ознайомлення з дослідями Г. Р. Герца ми помітили, що для виявлення існування електромагнітного поля і вивчення його властивостей було використано резонатори, в іскрових проміжках яких виникали іскри. Це вказує на те, що електромагнітні хвилі переносять енергію.

Енергія електромагнітної хвилі складається з енергій електричного і магнітного полів. Відповідно об'ємна густина енергії електромагнітного поля  $w$



дорівнює сумі об'ємної густини енергії електричного поля  $w_e$  і магнітного  $w_m$ :

$$w = w_e + w_m = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}. \quad (10.79)$$

Напруженості  $E$  і  $H$  в електромагнітній хвилі зв'язані співвідношенням  $\sqrt{\epsilon_0 \epsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H$ . Тому рівняння (10.79) можна записати в такому вигляді:

$$w = \epsilon_0 \epsilon E^2 = \mu_0 \mu H^2. \quad (10.80)$$

Повну енергію електромагнітного поля в об'ємі діелектрика  $V$  можна визначити за формулою

$$\begin{aligned} W &= \int_V \left( \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} \right) dV = \\ &= \int_V \epsilon_0 \epsilon E^2 dV = \int_V \mu_0 \mu H^2 dV. \end{aligned} \quad (10.81)$$

Потужність випромінювання дорівнює похідній від енергії за часом з протилежним знаком:

$$N = -\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \epsilon_0 \epsilon E^2 dV. \quad (10.82)$$

Якщо  $E$  описує монохроматичну хвилю

$$E = E_0 \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right), \quad (10.83)$$

то для потужності випромінювання із об'єму  $V$ , який для спрощення подамо у вигляді паралелепіпеда  $V = x_0 y_0 z_0$ , де  $x_0, y_0, z_0$  розміри його сторін, паралельних осям  $OX, OY, OZ$  прямокутної системи координат, одержимо вираз

$$N = 2\omega \epsilon_0 \epsilon E_0^2 \int_0^{x_0} \int_0^{y_0} \int_0^{z_0} \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) \cos \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) dx dy dz.$$

Після інтегрування матимемо:

$$N = \epsilon_0 \epsilon v y_0 z_0 [E_0 \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right)]^2 = v \epsilon_0 \epsilon E^2 S, \quad (10.84)$$

де  $v$  — швидкість поширення електромагнітних хвиль;  $S = y_0 z_0$  — поверхня, перпендикулярна до напрямку  $OX$  поширення електромагнітних хвиль, через яку проходить потік електромагнітної енергії.

Потік електромагнітної енергії крізь одиницю поверхні можна виразити формулою

$$\Pi = \frac{N}{S} = v \epsilon_0 \epsilon E^2 = v w, \quad (10.85)$$

тобто він дорівнює добутку швидкості поширення електромагнітних хвиль на об'ємну густину енергії електромагнітного поля.

Підставимо у формулу (10.85) значення  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu}}$ . Одержимо:

$$\Pi = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu}} \epsilon_0 \epsilon E^2 = \frac{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon}}{\sqrt{\mu_0 \mu}} EE = HE. \quad (10.86)$$

Вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  взаємно перпендикулярні й утворюють з напрямком поширення хвилі правогвинтову систему. Тому напрямком вектора  $[\vec{E} \vec{H}]$  збігається з напрямком перенесення енергії, а модуль цього вектора дорівнює  $EH$  ( $\sin[\vec{E} \vec{H}] = \sin 90^\circ = 1$ ). Отже, густину потоку енергії можна подати як векторий добуток  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$ :

$$\vec{\Pi} = [\vec{E} \vec{H}]. \quad (10.87)$$

Вектор  $\vec{\Pi}$  називають **вектором Пойнтінга**.

Одиницею вектора  $\vec{\Pi}$  в СІ є

$$1 \text{ CI}_{\Pi} = 1 \frac{\text{В}}{\text{м}} \cdot 1 \frac{\text{А}}{\text{м}} = 1 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

Потужність через довільну поверхню  $S$  можна виразити через вектор потоку  $\vec{\Pi}$  як інтеграл:

$$N = \int_S \vec{\Pi} d\vec{S}. \quad (10.88)$$

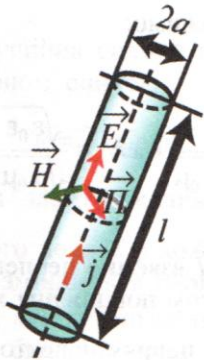
Як приклад застосування формули (10.88) розглянемо коло постійного струму з ЕРС (наприклад, з гальванічним елементом). Електричне поле в цьому разі стаціонарне і його енергія з часом не змінюється.

Розглянемо ділянку циліндричного однорідного провідника завдовжки  $l$  і радіусом  $a$ , на якій немає сторонніх сил (див. мал. 10.19). Згідно із законом Ома в диференціальній формі

$$\vec{j} = \gamma \vec{E},$$

де  $\vec{j}$  — густина струму;  $\vec{E}$  — напруженість електричного поля в провіднику. Напруженість електричного поля

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma}.$$



Мал. 10.19

Довкола провідника утворюється магнітне поле, напруженість якого на поверхні провідника становить

$$H = \frac{I}{2\pi a} = \frac{j\pi a^2}{2\pi a} = \frac{ja}{2}.$$

Ця напруженість напрямлена по дотичній до кола, що охоплює площу перерізу провідника. Отже, на поверхні провідника вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  взаємно перпендикулярні, і вектор Пойнтінга за величиною дорівнює

$$\Pi = EH = \frac{aj^2}{2\gamma}.$$

Вектор  $\vec{\Pi} = [\vec{E} \vec{H}]$  напрямлений перпендикулярно до поверхні всередину провідника. Тому в нашому прикладі крізь поверхню провідника енергія входить у провідник з навколишнього простору. Потужність, яка надходить у провідник ззовні на довжині  $l$ , буде

$$N = \int_S \vec{\Pi} dS = \Pi 2\pi a l = \frac{aj^2}{2\gamma} 2\pi a l = \rho l j^2 \pi a^2 = \rho l \pi j^2 a^2 \frac{\pi a^2}{\pi a^2} = I^2 R,$$

де  $S = \pi a^2$  — площа поперечного перерізу провідника,  $R = \frac{\rho l}{S}$  — опір провідника.

Отже, потік вектора Пойнтінга крізь поверхню провідника дорівнює кількості теплоти, що виділяється в цьому провіднику за 1 с. Звідси випливає, що енергія, яка йде на нагрівання провідника, входить у провідник крізь його бічну поверхню у вигляді енергії електромагнітного поля.

Оскільки енергія надходить до провідника з навколишнього простору, вона має (за умов стаціонарного поля) поповнюватися в такій самій кількості з тих ділянок, де виконують роботу сторонні сили. Справді, якщо є сторонні сили, то напруженість поля сторонніх сил  $\vec{E}^* \neq 0$ . Тоді із закону Ома в диференціальній формі за наявності сторонніх сил  $\vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}^*)$  випливає, що

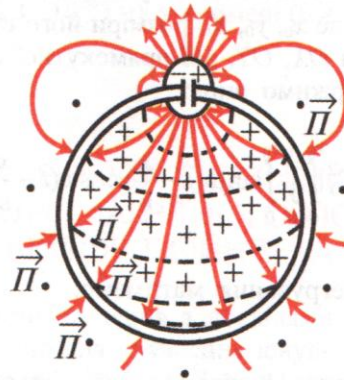
$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma} - \vec{E}^*$$

і вектор Пойнтінга буде

$$\vec{\Pi} = [\vec{E} \vec{H}] = \frac{1}{\gamma} [\vec{j} \vec{H}] - [\vec{E}^* \vec{H}].$$

Перший доданок, як доведено вище, є потоком енергії, що входить усередину провідника. Другий доданок — потік енергії, що надходить від джерела ЕРС в навколишній простір.

На мал. 10.20 зображено орієнтовну картину розподілу ліній вектора Пойнтінга  $\vec{\Pi}$  довкола електричного кола, яке складається з колового провідника і



Мал. 10.20

гальванічного елемента. В місці знаходження ЕРС лінії вектора  $\vec{\Pi}$  виходять із джерела струму в зовнішній простір. Лінії вектора напруженості електрично-

го поля зображено штриховими лініями, а сліди ліній магнітного поля — хрестиками і точками.

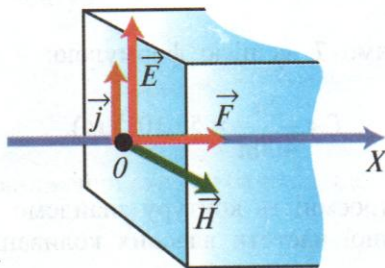
Отже, в об'ємах простору, де є джерела ЕРС, вектор Пойнтінга, а отже, і потік електромагнітної енергії напрямлені від джерел ЕРС в навколишній простір, поширюються через нього до інших ділянок кола і перетворюються в них на теплову енергію. Там, де енергія споживається, вектор Пойнтінга і потік енергії напрямлені всередину цих об'ємів.

### 10.10. ТИСК, ІМПУЛЬС І МАСА ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ

Електромагнітні хвилі взаємодіють з тілами, зокрема чинять на них тиск. Механізм появи тиску на тіла з боку електромагнітних хвиль можна пояснити так. Нехай на провідне тіло, що має плоску поверхню, падає плоска електромагнітна хвиля під кутом, що дорівнює нулю (промені електромагнітної хвилі перпендикулярні до поверхні тіла). Під дією електричного поля хвилі в тілі збуджується струм провідності, густина якого

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}.$$

Магнітне поле хвилі діятиме на цей струм із силою Ампера. Напрямок цієї сили, як видно з мал. 10.21, збігається з напрямком поширення хвилі. Тому такі сили створюють тиск на поверхню тіла.



Мал. 10.21

Позначимо силу, з якою електромагнітна хвиля діє на поверхню тіла площею  $S$ , через  $\vec{F}$  і знайдемо потужність  $N$ , яку вона розвиває під час виконання роботи:

$$N = \vec{F} \cdot \vec{c} = Fc \cos(\hat{F} \hat{c}) = Fc \cos 0 = Fc, \quad (10.89)$$

де  $c$  — швидкість поширення електромагнітних хвиль у вакуумі.

Потужність електромагнітних хвиль, які падають на поверхню  $S$ , можна знайти за формулою (10.88):

$$N = \int_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \int_S \Pi dS = \Pi S, \quad (10.90)$$

де  $\Pi$  — модуль вектора Пойнтінга;  $S$  — площа поверхні, на яку падає електромагнітна хвиля.

Прирівняємо праві частини рівнянь (10.89) і (10.90):

$$Fc = \Pi S,$$

звідки знайдемо силу тиску електромагнітної хвилі на поверхню площею  $S$ :

$$F = \frac{\Pi S}{c}. \quad (10.91)$$

Визначимо тиск електромагнітної хвилі:

$$P = \frac{F}{S} = \frac{\Pi S}{c} = \frac{\Pi}{c}. \quad (10.92)$$

Тиск електромагнітних хвиль на поверхню поглинаючого тіла в разі нормального падіння на нього променів цієї хвилі чисельно дорівнює абсолютній величині вектора Пойнтінга, поділеній на швидкість електромагнітних хвиль у вакуумі, тобто на швидкість світла  $c$ .

Якщо електромагнітне поле поглинається не повністю, а має місце відбивання, то тиск

$$P = (1 + \rho) \frac{\Pi}{c}, \quad (10.93)$$

де  $\rho$  — коефіцієнт відбивання ( $0 \leq \rho \leq 1$ ).

Знайдемо імпульс одиниці об'єму електромагнітного поля  $p$ . Зміна імпульсу за час  $\Delta t$ , як відомо, дорівнює  $\Delta p = \vec{F} \Delta t$ . Оскільки, згідно з виразом (10.91)

$$F = \frac{\Pi S}{c}, \text{ то}$$

$$\Delta p = \frac{\Pi S}{c} \Delta t.$$

У зв'язку з тим, що електромагнітна енергія повністю поглинається тілом, то  $\Delta p = p$ .

Отже

$$p = \frac{\Pi S}{c} \Delta t,$$

де  $p$  — імпульс електромагнітного поля, яке пройшло крізь площу  $S$  за час  $\Delta t$ , тобто це імпульс електромагнітного поля, яке знаходиться в об'ємі  $V = Sl = Sc \Delta t$  (де  $l$  — шлях, пройдений хвилею за час  $\Delta t$ ).

З урахуванням цього імпульс електромагнітних хвиль в одиниці об'єму (об'ємна густина імпульсу) дорівнюватиме

$$p_{\text{од. об}} = \frac{p}{V} = \frac{PI S}{cV} \Delta t = \frac{PI S \Delta t}{cSc \Delta t} = \frac{P}{c^2}. \quad (10.94)$$

Запишемо об'ємну густину імпульсу у векторній формі:

$$\vec{p}_{\text{од. об}} = \frac{\vec{P}}{c^2} = \frac{1}{c^2} [\vec{E} \vec{H}]. \quad (10.95)$$

Імпульс довільного об'єму електромагнітного поля дорівнюватиме інтегралу  $\vec{p}_{\text{од. об}}$  по об'єму  $V$ :

$$\vec{p} = \int_V \vec{p}_{\text{од. об}} dV = \frac{1}{c^2} \int_V [\vec{E} \vec{H}] dV. \quad (10.96)$$

Наявність в електромагнітному полі механічного імпульсу дає підставу дійти висновку, що електромагнітному полю властива маса, яка пов'язана з імпульсом співвідношенням

$$p_{\text{од. об}} = m_{\text{од. об}} c, \quad (10.97)$$

звідки

$$m_{\text{од. об}} = \frac{p_{\text{од. об}}}{c} = \frac{P}{c^2 c} = \frac{P}{c^3}. \quad (10.98)$$

З урахуванням того, що  $P = cw$ , де  $w$  — об'ємна густина енергії електромагнітного поля, формула (10.98) набуває вигляду

$$m_{\text{од. об}} = \frac{w}{c^2}, \quad (10.99)$$

або

$$w = c^2 m_{\text{од. об}}. \quad (10.100)$$

Поклавши, що взаємозв'язок (10.100) має загальне значення, дістанемо співвідношення між масою  $m$  та енергією  $W$  у такому вигляді:

$$W = mc^2, \quad (10.101)$$

яке було одержано в теорії відносності.

## ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

**Задача 10.1.** Сила струму в коливальному контурі змінюється за законом  $I = -0,2 \sin 400\pi t$  А. Індуктивність котушки контуру 1 Гн, опором провідників знехтувати. Визначити: 1) період коливань; 2) ємність контуру; 3) максимальне значення різниці потенціалів між обкладками конденсатора; 4) максимальне значення енергії магнітного поля; 5) максимальне значення енергії електричного поля; 6) повний максимальний магнітний потік.

$$\begin{aligned} I &= -0,2 \sin 400\pi t \text{ А} \\ L &= 1 \text{ Гн} \end{aligned}$$

*Розв'язування*

$$\begin{aligned} T &= ? \quad C = ? \\ U_{\text{max}} &= ? \quad W_{\text{m max}} = ? \\ W_{\text{e max}} &= ? \quad \Phi_{\text{max}} = ? \end{aligned}$$

Оскільки контур складається з ємності та індуктивності, то в ньому відбуватимуться незатухаючі електричні коливання.

1. Період власних коливань контуру визначимо за формулою Томсона:

$$T = 2\pi \sqrt{LC}.$$

Із заданого рівняння сили струму в контурі видно, що циклічна частота власних коливань

$$\omega_0 = 400\pi.$$

Між  $T$  і  $\omega_0$ , як відомо, існує такий зв'язок:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Обчислимо  $T$  за цією формулою:

$$T = \frac{2\pi}{400\pi} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ (с)}.$$

2. Електроємність контуру знайдемо за формулою циклічної частоти власних коливань:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

звідки

$$C = \frac{1}{\omega_0^2 L}.$$

Підставивши числові значення, обчислимо:

$$C = \frac{1}{(400\pi)^2 \cdot 1} = 6,3 \cdot 10^{-7} \text{ (Ф)}.$$

3. Зв'язок між різницею потенціалів між обкладками конденсатора і зарядом на обкладці описує формула

$$U = \frac{q}{C} \quad (a)$$

Закон зміни заряду на обкладках конденсатора знайдемо із закону зміни сили струму:

$$dq = Idt = -0,02 \sin 400\pi t dt.$$

Проінтегруємо рівняння

$$q = \int -0,02 \sin 400\pi t dt = \frac{0,02}{400\pi} \cos 400\pi t.$$

Звідси випливає, що максимальне значення заряду на обкладці конденсатора

$$q_{\max} = \frac{0,02}{400\pi} = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ (Кл)}.$$

Підставимо це значення у формулу (a) й одержимо:

$$U_{\max} = \frac{q_{\max}}{C} = \frac{1,6 \cdot 10^{-5}}{6,3 \cdot 10^{-7}} = 25,4 \text{ (В)}.$$

4. Максимальне значення енергії магнітного поля коливального контуру буде за максимальної сили струму в контурі:

$$W_{m \max} = \frac{LI_{\max}^2}{2}.$$

З рівняння сили струму бачимо, що  $I_{\max} = 0,02 \text{ А}$ , отже

$$W_{m \max} = \frac{1 \cdot 0,02^2}{2} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ (Дж)}.$$

5. Максимальне значення енергії електричного поля дорівнює енергії, яку має заряджений конденсатор, коли заряд на його обкладці максимальний:

$$W_{e \max} = \frac{q_{\max}^2}{2C} = \frac{(1,6 \cdot 10^{-5})^2}{2 \cdot 6,3 \cdot 10^{-7}} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ (Дж)}.$$

Отже, в разі незатухаючих вільних електричних коливань максимальне значення енергії електрично-

го поля дорівнює максимальному значенню енергії магнітного поля, що й випливає із закону збереження енергії. Повна енергія контуру залишається незмінною, під час електричних коливань відбувається лише безперервний перехід електричної енергії, зосередженої в електричному полі конденсатора, в магнітну, зосереджену в магнітному полі котушки, і навпаки. Це є наслідком того, що в контурі відбувається безперервний процес перетворення електричного поля на магнітне і навпаки.

6. Повний максимальний магнітний потік (його ще називають потокозчепленням з контуром) спостерігатиметься в момент часу, коли в контурі буде максимальною сила струму:

$$\Phi_{\text{пов max}} = LI_{\max} = 1 \cdot 0,02 = 0,02 \text{ (Вб)}.$$

$$\text{Відповідь: } T = 5 \cdot 10^{-3} \text{ с; } C = 6,3 \cdot 10^{-7} \text{ Ф;}$$

$$U_{\max} = 25,4 \text{ В; } W_{m \max} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ Дж;}$$

$$W_{e \max} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ Дж; } \Phi_{\text{пов max}} = 0,02 \text{ Вб}.$$

**Задача 10.2.** Напряга на обкладках конденсатора коливального контуру змінюється з часом за законом  $U = 60 \sin 10^4 \pi t \text{ В}$ . Електроємність конденсатора  $C = 0,2 \text{ мкФ}$ . Визначити індуктивність контуру і максимальне значення енергії електричного поля. Опором з'єднувальних провідників знехтувати.

$$\begin{aligned} U &= 60 \sin 10^4 \pi t \text{ В} \\ C &= 0,2 \text{ мкФ} = \\ &= 2 \cdot 10^{-7} \text{ Ф} \\ L &= ? \quad W_{e \max} = ? \end{aligned}$$

*Розв'язування*

Електричне коло складається з електроємності та індуктивності. Оскільки напруга на обкладках конденсатора змінюється за законом синуса, то в контурі

відбуваються вільні незатухаючі гармонічні коливання. Власна частота таких коливань визначається за формулою

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

звідки

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 C} \quad (a)$$

Із заданого рівняння напруги на конденсаторі видно, що

$$\omega_0 = 10^4 \pi. \quad (б)$$

Підставимо значення  $\omega_0$  з виразу (б) і  $C$  у формулу (a). Знайдемо числове значення індуктивності контуру:

$$L = \frac{1}{(10^4 \pi)^2 \cdot 2 \cdot 10^{-7}} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ (Гн)}.$$

Максимальна енергія електричного поля

$$W_{e \max} = \frac{CU_{\max}^2}{2},$$

де  $U_{\max}$  — амплітудне значення напруги між обкладками конденсатора. Виконаємо обчислення:

$$W_{e \max} = \frac{2 \cdot 10^{-7} \cdot 60^2}{2} = 3,6 \cdot 10^{-4} \text{ (Дж)}.$$

Відповідь:  $L = 5 \cdot 10^{-3}$  Гн;  $W_{e \max} = 3,6 \cdot 10^{-4}$  Дж.

**Задача 10.3.** Коливальний контур складається з конденсатора ємністю 7 мкФ та котушки індуктивністю 0,25 Гн і має опір 4 Ом. Конденсатор має заряд  $5,8 \cdot 10^{-4}$  Кл. Визначити період коливання контуру, логарифмічний декремент затухання та амплітуду заряду після 20 електричних коливань.

$$\begin{aligned} C &= 7 \text{ мкФ} = \\ &= 7 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} \\ L &= 0,25 \text{ Гн} \\ R &= 4 \text{ Ом} \\ q_0 &= 5,8 \cdot 10^{-4} \text{ Кл} \\ N &= 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= ? \quad \Delta = ? \\ q_N &= ? \end{aligned}$$

*Розв'язування*

Оскільки контур має омичний опір, то в ньому будуть електричні затухаючі коливання.

Період затухаючих електричних коливань визначимо за формулою

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}.$$

Обчислимо його значення:

$$\begin{aligned} T &= 2 \cdot 3,14 : \sqrt{\frac{1}{0,25 \cdot 7 \cdot 10^{-6}} - \left(\frac{4}{2 \cdot 0,25}\right)^2} = \\ &= 8,3 \cdot 10^{-3} \text{ (с)}. \end{aligned}$$

Швидкість затухання електричних коливань у контурі характеризують логарифмічним декрементом затухання, який дорівнює

$$\Delta = \beta T,$$

де  $\beta$  — коефіцієнт затухання;  $T$  — період електричних коливань.

Знайдемо його числове значення:

$$\Delta = \frac{R}{2L} T = \frac{4}{2 \cdot 0,25} \cdot 8,3 \cdot 10^{-3} = 6,64 \cdot 10^{-2}.$$

Величину заряду на обкладках конденсатора у разі затухаючих електричних коливань описують рівнянням (10.26):

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi),$$

де  $q_0$  — максимальний заряд на обкладці конденсатора;  $q_0 e^{-\beta t}$  — амплітуда заряду.

Амплітуда заряду після  $N$  коливань становитиме

$$q_A = q_0 e^{-\beta N T} = q_0 e^{-\frac{R}{2L} N T}.$$

Знайдемо числове значення амплітуди заряду за цією формулою:

$$q_A = 5,8 \cdot 10^{-4} e^{-\frac{4}{2 \cdot 0,25} \cdot 20 \cdot 8,3 \cdot 10^{-3}} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ (Кл)}.$$

Відповідь:  $T = 8,3 \cdot 10^{-3}$  с;  $\Delta = 6,64 \cdot 10^{-2}$ ;  
 $q_A = 1,5 \cdot 10^{-4}$  Кл.

**Задача 10.4.** Коливальний контур складається з конденсатора ємністю 0,2 мкФ, котушки індуктивністю  $5 \cdot 10^{-3}$  Гн та омичним опором 2 Ом. Визначити циклічну частоту коливань у контурі і середню потужність, яку має споживати контур, щоб у ньому підтримувались незатухаючі коливання з амплітудним значенням напруги 12 В.

$$\begin{aligned} C &= 0,2 \text{ мкФ} = \\ &= 2 \cdot 10^{-7} \text{ Ф} \\ L &= 5 \cdot 10^{-3} \text{ Гн} \\ R &= 2 \text{ Ом} \\ U_0 &= 12 \text{ В} \end{aligned}$$

$$\omega = ? \quad \bar{N} = ?$$

*Розв'язування*

У коливальному контурі, який має омичний опір і здійснює вільні коливання, повна енергія системи зменшуватиметься, оскільки частина енергії витрачається на нагрівання омичного опору. В результаті електричні коливання в контурі будуть затухаючими.

Циклічну частоту затухаючих електричних коливань визначимо за формулою (10.30):

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2},$$

де  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  — власна циклічна частота коливального контуру, що складається з індуктивності та ємності;  $\beta = \frac{R}{2L}$  — коефіцієнт затухання.

Обчислимо частоту коливань за формулою

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-7}} - \frac{2^2}{2^2 (5 \cdot 10^{-3})^2}} = 31\,622 \text{ (с}^{-1}\text{)}.$$

Для підтримання в контурі незатухаючих коливань потрібно, щоб у контур підводилася енергія ззовні. До того ж середня потужність, яка підводиться в контур, має дорівнювати відношенню кількості теплоти, що витрачається на нагрівання опору, за час, який відповідає періоду коливання  $T$ , до цього проміжку часу:

$$\bar{N} = \frac{Q}{T}. \quad (a)$$

Згідно із законом Джоуля—Ленца, кількість теплоти, що йде на нагрівання омичного опору:

$$Q = \int_0^T I^2 R dt. \quad (б)$$

У разі компенсації втрат енергії на нагрівання омичного опору можна припустити, що коливання в контурі описує рівняння (10.32) за  $\beta = 0$ , тобто

$$q = q_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

Тоді

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_0 \omega \sin(\omega t + \varphi). \quad (в)$$

Оскільки  $q_0 = U_0 C$ , то вираз (в) набуває вигляду

$$I = -U_0 C \omega \sin(\omega t + \varphi).$$

Підставимо вираз  $I$  з цього рівняння у формулу (б):

$$Q = \int_0^T U_0^2 C^2 \omega^2 R \sin^2(\omega t + \varphi) dt = \frac{1}{2} U_0^2 C^2 \omega^2 R T.$$

Підставимо цей вираз  $Q$  у рівняння (а) і знайдемо робочу формулу для обчислення середньої потужності, яку потрібно підводити в контур, щоб коливання не затухали:

$$\bar{N} = \frac{U_0^2 C^2 \omega^2 R T}{2T} = \frac{U_0^2 C^2 \omega^2 R}{2}.$$

Обчислимо її значення:

$$\bar{N} = \frac{1}{2} \cdot 12^2 (2 \cdot 10^{-7})^2 \cdot (31\,622)^2 \cdot 2 = 6 \cdot 10^{-3} \text{ (Вт)}.$$

Відповідь:  $\omega = 31\,622 \text{ с}^{-1}$ ;  $\bar{N} = 6 \text{ мВт}$ .

**Задача 10.5.** Коливальний контур складається з повітряного плоского конденсатора, площа обкладки якого  $S = 100 \text{ см}^2$ , та соленоїда індуктивністю  $L = 10^{-6} \text{ Гн}$ . Він резонує на електромагнітну хвилю довжиною  $10 \text{ м}$ . Знайти відстань між обкладками конденсатора.

$$\begin{aligned} S &= 100 \text{ см}^2 = \\ &= 0,01 \text{ м}^2 \\ L &= 10^{-6} \text{ Гн} \\ \lambda &= 10 \text{ м} \\ d &= ? \end{aligned}$$

*Розв'язування*

Відстань між обкладками плоского конденсатора знайдемо за формулою ємності плоского конденсатора:

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}, \quad (a)$$

де  $\epsilon_0$  — електрична стала;  $\epsilon$  — відносна діелектрична проникність середовища;  $S$  — площа обкладки конденсатора;  $d$  — відстань між його обкладками.

З формули (а) знайдемо

$$d = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{C}. \quad (б)$$

Згідно з формулою Томсона період власного коливання контуру

$$T = 2\pi \sqrt{LC},$$

звідки

$$C = \frac{T^2}{4\pi^2 L}. \quad (в)$$

Період коливань можна визначити, знаючи довжину електромагнітної хвилі, на яку резонує контур:

$$\lambda = cT,$$

звідки

$$T = \frac{\lambda}{c},$$

де  $c$  — швидкість поширення електромагнітної хвилі у вакуумі.

Підставимо вираз періоду з останньої формули в рівняння (в), а потім одержаний вираз для ємності  $C$  — у формулу (б). Знайдемо:

$$d = \frac{4\pi^2 \epsilon_0 \epsilon S L c^2}{\lambda^2}.$$

За цією робочою формулою визначимо числове значення відстані:

$$\begin{aligned} d &= \frac{4 \cdot 3,14^2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-6} (3 \cdot 10^8)^2}{10^2} = \\ &= 3,14 \cdot 10^{-3} \text{ (м)}. \end{aligned}$$

Відповідь:  $d = 3,14 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ .

**Задача 10.6.** Випромінювання антени міської радіостанції має потужність 100 кВт. Обчислити на відстанях від радіостанції 1 і 100 км: 1) величину вектора Пойнтінга; 2) напруженість електричного поля; 3) порядок напруги, яка виникає в антені радіоприймача; 4) тиск електромагнітних хвиль.

|   |  |
|---|--|
| $N = 100 \text{ кВт} = 10^5 \text{ Вт}$<br>$R_1 = 1 \text{ км} = 10^3 \text{ м}$<br>$R_2 = 100 \text{ км} = 10^5 \text{ м}$<br>$P_1 - ? \quad P_2 - ?$<br>$E_1 - ? \quad E_2 - ?$<br>$U_1 - ? \quad U_2 - ?$<br>$P_1 - ? \quad P_2 - ?$ | <p><i>Розв'язування</i></p> <p>Вектор Пойнтінга дорівнює потоку електромагнітної енергії крізь одиницю поверхні, тобто потужності випромінювання через одиницю поверхні. Вважатимемо, що антена радіостанції випромінює рівномірно в усіх напрямках.</p> |
|---|--|

Числове значення вектора Пойнтінга в точці розміщення антени радіоприймача дорівнюватиме

$$P_1 = \frac{N}{4\pi R_1^2} = \frac{10^5}{4\pi(10^3)^2} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ (Вт/м}^2\text{)},$$

$$P_2 = \frac{N}{4\pi R_2^2} = \frac{10^5}{4\pi(10^5)^2} = 8 \cdot 10^{-7} \text{ (Вт/м}^2\text{)}.$$

Величину напруженості електричного поля знайдемо за виразом (10.85):

$$P = v w,$$

де  $v$  — швидкість електромагнітних хвиль, яка дорівнює  $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu}}$  (оскільки радіохвилі поширюються

в повітрі, то можна вважати,  $\epsilon = \mu = 1$ , тоді  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c$ );  $w$  — об'ємна густина енергії, яка до-

рівнює  $\epsilon_0 E^2$ . Тоді

$$P = c \epsilon_0 E^2, \text{ звідки } E = \sqrt{\frac{P}{c \epsilon_0}}.$$

Обчислимо напруженості електричного поля за цією формулою:

$$E_1 = \sqrt{\frac{P_1}{c \epsilon_0}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^8 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}} = 1,74 \text{ (В/м)};$$

$$E_2 = \sqrt{\frac{P_2}{c \epsilon_0}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^{-7}}{3 \cdot 10^8 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}} = 1,74 \cdot 10^{-2} \text{ (В/м)}.$$

Визначимо, яка напруга (різниця потенціалів) виникає в приймальній антені завдовжки 1 м:

$$U_1 = E_1 l = 1,74 \cdot 1 = 1,74 \text{ (В)};$$

$$U_2 = E_2 l = 1,74 \cdot 10^{-2} \cdot 1 = 1,74 \cdot 10^{-2} \text{ (В)}.$$

Тиск електромагнітних хвиль на поглинаючу поверхню знайдемо за формулою (10.92):

$$P_1 = \frac{P_1}{c} = \frac{8 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^8} = 2,7 \cdot 10^{-11} \text{ (Па)};$$

$$P_2 = \frac{P_2}{c} = \frac{8 \cdot 10^{-7}}{3 \cdot 10^8} = 2,7 \cdot 10^{-15} \text{ (Па)}.$$

*Відповідь:*  $P_1 = 8 \cdot 10^{-3} \text{ Вт/м}^2$ ;  $P_2 = 8 \cdot 10^{-7} \text{ Вт/м}^2$ ;  
 $E_1 = 1,74 \text{ В/м}$ ;  $E_2 = 1,74 \cdot 10^{-2} \text{ В/м}$ ;  
 $U_1 = 1,74 \text{ В}$ ;  $U_2 = 1,74 \cdot 10^{-2} \text{ В}$ ;  
 $P_1 = 2,7 \cdot 10^{-11} \text{ Па}$ ;  $P_2 = 2,7 \cdot 10^{-15} \text{ Па}$ .