

## Лабораторна робота № 10

### КЛАСИЧНА МОДЕЛЬ МНОЖИННОЇ (БАГАТОФАКТОРНОЇ) ЛІНІЙНОЇ РЕГРЕСІЇ

**Мета роботи** – ознайомлення з особливостями побудови математичної моделі множинної лінійної регресії засобами Microsoft Excel.

#### 1. ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАВДАННЯ

Для деякого підприємства отримано наступні результати вибірових статистичних спостережень за останні 24 місяці (2 роки), що містять дані по продуктивності праці та факторам, що впливають на цей показник (дані наведені в табл. 1):

| Місяць | Продуктивність праці, тис.грн. /люд.-год. | Фондомісткість продукції, тис.грн. / тис.грн. | Коефіцієнт плинності робочої сили, % | Рівень втрат робочого часу, % |
|--------|-------------------------------------------|-----------------------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------|
| 1      | 60                                        | 30                                            | 13,0                                 | 15,0                          |
| 2      | 61                                        | 35                                            | 12,5                                 | 14,3                          |
| 3      | 58                                        | 33                                            | 12,0                                 | 12,0                          |
| 4      | 59                                        | 34                                            | 11,0                                 | 12,8                          |
| 5      | 62                                        | 36                                            | 10,0                                 | 13,0                          |
| 6      | 63                                        | 38                                            | 9,0                                  | 12,5                          |
| 7      | 65                                        | 40                                            | 8,5                                  | 11,0                          |
| 8      | 60                                        | 41                                            | 8,2                                  | 11,5                          |
| 9      | 68                                        | 45                                            | 8,0                                  | 10,0                          |
| 10     | 69                                        | 45                                            | 5,5                                  | 9,0                           |
| 11     | 70                                        | 46                                            | 5,0                                  | 8,0                           |
| 12     | 72                                        | 48                                            | 4,7                                  | 7,5                           |
| 13     | 73                                        | 47                                            | 4,6                                  | 6,5                           |
| 14     | 78                                        | 50                                            | 4,0                                  | 6,0                           |
| 15     | 75                                        | 49                                            | 4,1                                  | 6,2                           |
| 16     | 80                                        | 51                                            | 4,2                                  | 5,8                           |
| 17     | 81                                        | 50                                            | 4,5                                  | 5,5                           |
| 18     | 83                                        | 53                                            | 4,0                                  | 5,0                           |
| 19     | 81                                        | 55                                            | 4,0                                  | 4,5                           |
| 20     | 85                                        | 56                                            | 3,0                                  | 4,7                           |
| 21     | 87                                        | 58                                            | 4,0                                  | 5,0                           |
| 22     | 88                                        | 58                                            | 5,0                                  | 5,1                           |
| 23     | 90                                        | 59                                            | 5,0                                  | 4,8                           |
| 24     | 92                                        | 60                                            | 6,0                                  | 5,2                           |

У припущенні щодо лінійної залежності між наведеними показниками побудувати економетричну модель продуктивності праці, що описує залежність між

продуктивністю праці і наведеними вище факторами. Оцінити якість, адекватність і статистичну значимість побудованої моделі для рівня значимості  $\alpha=0,05$ . Розрахувати прогноз продуктивності праці на наступний місяць з рівнем надійності  $P=0,95$ , якщо очікувані значення чинників, що впливають на неї дорівнюють:

- фондомісткість продукції – 60 тис. грн. / тис. грн.;
- коефіцієнт плинності робочої сили – 4%;
- рівень втрат робочого часу – 5%.

Оцінити граничний вплив кожної пояснюючої змінної моделі на продуктивність праці.

### **Структура роботи**

- 1) виконати ідентифікацію змінних та специфікацію моделі;
- 2) оцінити параметри економетричної моделі 1МНК;
- 3) побудувати кореляційну матрицю та проаналізувати отримані дані;
- 4) перевірити адекватність моделі;
- 5) перевірити статистичну значущість зв'язку на основі економетричної моделі, використавши коефіцієнти детермінації та кореляції;
- 6) перевірити статистичну якість оцінених параметрів моделі;
- 7) виконати точковий та інтервальний прогнози продуктивності праці на основі економетричної моделі.

## **РОЗВ'ЯЗАННЯ.**

### **1. Виконуємо специфікацію економетричної моделі.**

**1.1.** На етапі специфікації економетричної моделі виконуємо ідентифікацію змінних моделі та вводимо наступні умовні позначення для залежної (пояснювальної) змінної та незалежних (пояснюючих) змінних моделі:

- $x_1$  – фондомісткість продукції;
- $x_2$  – коефіцієнт плинності робочої сили;
- $x_3$  – рівень втрат робочого часу;
- $y$  – продуктивність праці.

### **1.2.** Переносимо на робочий аркуш вихідні дані задачі (рис. 1).

За допомогою надбудови «Аналіз даних / Data Analytics» інструменту аналізу «Кореляція /Correlation» побудувати кореляційну матрицю та проаналізувати отримані дані. Детально це було розібрано в лабораторній роботі 9.1. В результаті були отримані такі значення:

Таблиця 2

## Кореляційна матриця

|       | $Y$      | $x_1$   | $x_2$    | $x_3$ |
|-------|----------|---------|----------|-------|
| $Y$   | 1        |         |          |       |
| $x_1$ | 0,969832 | 1       |          |       |
| $x_2$ | -0,80477 | 0,87687 | 1        |       |
| $x_3$ | -0,9254  | -0,9535 | 0,941916 | 1     |

Умовою побудови багатofакторної регресійної моделі є те, що наші незалежні змінні не повинні між собою корелювати. Це явище називається колінеарність. На жаль в нашому прикладі між змінними  $x_1$ ,  $x_2$  та  $x_3$  вона присутня. Але поки що залишимо її так. До методів виявлення та усунення мультиколінеарності повернемося в наступній лабораторній роботі.

|    | A      | B                                                     | C                                                   | D                                             | E                                   |
|----|--------|-------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|-----------------------------------------------|-------------------------------------|
|    | Місяць | Продуктивність<br>в праці,<br>тис.грн. /люд.-<br>год. | Фондомісткість<br>продукції,<br>тис.грн. / тис.грн. | Коефіцієнт<br>плинності<br>робочої<br>сили, % | Рівень втрат<br>робочого<br>часу, % |
| 1  |        |                                                       |                                                     |                                               |                                     |
| 2  |        | $Y$                                                   | $x_1$                                               | $x_2$                                         | $x_3$                               |
| 3  | 1      | 60                                                    | 30                                                  | 13                                            | 15                                  |
| 4  | 2      | 61                                                    | 35                                                  | 12,5                                          | 14,3                                |
| 5  | 3      | 58                                                    | 33                                                  | 12                                            | 12                                  |
| 6  | 4      | 59                                                    | 34                                                  | 11                                            | 12,8                                |
| 7  | 5      | 62                                                    | 36                                                  | 10                                            | 13                                  |
| 8  | 6      | 63                                                    | 38                                                  | 9                                             | 12,5                                |
| 9  | 7      | 65                                                    | 40                                                  | 8,5                                           | 11                                  |
| 10 | 8      | 60                                                    | 41                                                  | 8,2                                           | 11,5                                |
| 11 | 9      | 68                                                    | 45                                                  | 8                                             | 10                                  |
| 12 | 10     | 69                                                    | 45                                                  | 5,5                                           | 9                                   |
| 13 | 11     | 70                                                    | 46                                                  | 5                                             | 8                                   |
| 14 | 12     | 72                                                    | 48                                                  | 4,7                                           | 7,5                                 |
| 15 | 13     | 73                                                    | 47                                                  | 4,6                                           | 6,5                                 |
| 16 | 14     | 78                                                    | 50                                                  | 4                                             | 6                                   |
| 17 | 15     | 75                                                    | 49                                                  | 4,1                                           | 6,2                                 |
| 18 | 16     | 80                                                    | 51                                                  | 4,2                                           | 5,8                                 |
| 19 | 17     | 81                                                    | 50                                                  | 4,5                                           | 5,5                                 |
| 20 | 18     | 83                                                    | 53                                                  | 4                                             | 5                                   |
| 21 | 19     | 81                                                    | 55                                                  | 4                                             | 4,5                                 |
| 22 | 20     | 85                                                    | 56                                                  | 3                                             | 4,7                                 |
| 23 | 21     | 87                                                    | 58                                                  | 4                                             | 5                                   |
| 24 | 22     | 88                                                    | 58                                                  | 5                                             | 5,1                                 |
| 25 | 23     | 90                                                    | 59                                                  | 5                                             | 4,8                                 |
| 26 | 24     | 92                                                    | 60                                                  | 6                                             | 5,2                                 |
| 27 |        |                                                       |                                                     |                                               |                                     |

Рис. 1. Вихідні дані задачі

**1.3.** В умові задачі було припущення, що залежність між зазначеними економічними показниками може бути представлена економетричною моделлю багатофакторної лінійної регресії. Тому записуємо в загальному вигляді:

- теоретична модель

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \varepsilon$$

де  $y$  – продуктивність праці;  $x_1$  – фондомісткість продукції;  $x_2$  – коефіцієнт плинності робочої сили;  $x_3$  – рівень втрат робочого часу;  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$  – параметри теоретичної моделі;  $\varepsilon$  – стохастична складова моделі;

- вибіркове рівняння регресії

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3$$

де  $\hat{y}$  – оцінка математичного сподівання продуктивності праці;  $x_1, x_2, x_3$  – див. вище;  $b_0, b_1, b_2, b_3$  – параметри вибіркової регресії;

- вибіркова економетрична модель

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + e$$

де  $y$  – продуктивність праці;  $x_1, x_2, x_3$  – див. вище;  $b_0, b_1, b_2, b_3$  – параметри вибіркової моделі;  $e$  – залишки моделі.

**1.4.** З метою оцінювання параметрів багатофакторної лінійної регресії використовуємо інструмент «Регрессия» пакету «Анализ данных». Пакет «Анализ данных» активується зі вкладки «ДАННЫЕ» в розділі «Анализ».

Якщо ця команда відсутня в меню «Анализ», її потрібно завантажити шляхом активації ряду команд. Детально ця процедура наведена в методичних рекомендаціях до лабораторної роботи №9.

У вікні інструменту «Регрессия» вводимо вихідні дані та вказуємо спосіб виводу результатів (рис. 2). Роз'яснення щодо діалогового вікна інструменту «Регрессия» наведені в методичних рекомендаціях до лабораторної роботи №9.

**1.5.** На окремому аркуші отримаємо результати розрахунків «ВЫВОД ИТОГОВ» (рис. 3). Детальна інформація щодо змісту полів наведена в методичних рекомендаціях до лабораторної роботи №9.

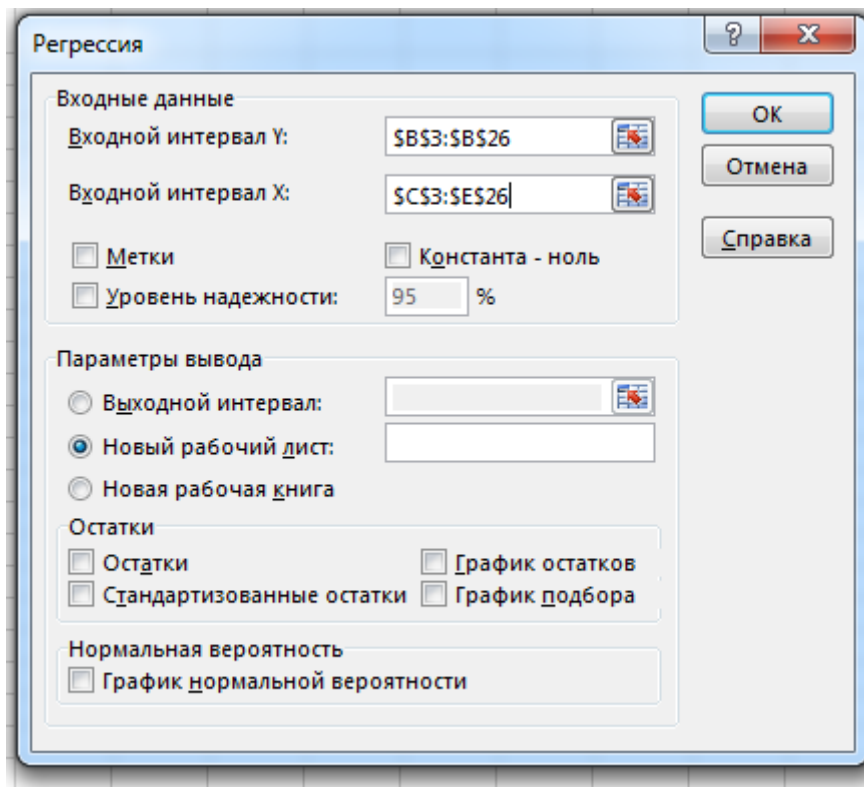


Рис. 2. Меню діалогового вікна інструменту «Регрессия»

|    | A                        | B            | C                  | D            | E          | F            | G           | H             | I            |
|----|--------------------------|--------------|--------------------|--------------|------------|--------------|-------------|---------------|--------------|
| 1  | ВЫВОД ИТОГОВ             |              |                    |              |            |              |             |               |              |
| 2  |                          |              |                    |              |            |              |             |               |              |
| 3  | Регрессионная статистика |              |                    |              |            |              |             |               |              |
| 4  | Множественный R          | 0,98008557   |                    |              |            |              |             |               |              |
| 5  | R-квадрат                | 0,96056773   |                    |              |            |              |             |               |              |
| 6  | Нормированный R-квадрат  | 0,95465289   |                    |              |            |              |             |               |              |
| 7  | Стандартная ошибка       | 2,33160799   |                    |              |            |              |             |               |              |
| 8  | Наблюдения               | 24           |                    |              |            |              |             |               |              |
| 9  |                          |              |                    |              |            |              |             |               |              |
| 10 | Дисперсионный анализ     |              |                    |              |            |              |             |               |              |
| 11 |                          | df           | SS                 | MS           | F          | Значимость F |             |               |              |
| 12 | Регрессия                | 3            | 2648,605417        | 882,8685     | 162,39959  | 3,30224E-14  |             |               |              |
| 13 | Остаток                  | 20           | 108,7279166        | 5,436396     |            |              |             |               |              |
| 14 | Итого                    | 23           | 2757,333333        |              |            |              |             |               |              |
| 15 |                          |              |                    |              |            |              |             |               |              |
| 16 |                          | Коэффициенты | Стандартная ошибка | t-статистика | P-значение | Верхние 95%  | Нижние 95%  | Верхние 95,0% | Нижние 95,0% |
| 17 | Y-пересечение            | 27,7103364   | 12,37175357        | 2,239807     | 0,0366229  | 1,903310673  | 53,51736213 | 1,903311      | 53,51736     |
| 18 | Переменная X 1           | 1,04862084   | 0,183278259        | 5,721469     | 1,341E-05  | 0,666309088  | 1,430932586 | 0,666309      | 1,430933     |
| 19 | Переменная X 2           | 1,51419239   | 0,475560149        | 3,184019     | 0,0046632  | 0,522191305  | 2,506193478 | 0,522191      | 2,506193     |
| 20 | Переменная X 3           | -1,5844972   | 0,671618427        | -2,35922     | 0,0285942  | -2,985468716 | -0,18352574 | -2,98547      | -0,18353     |
| 21 |                          |              |                    |              |            |              |             |               |              |

Рис. 3. Результаты розрахунків інструменту «Регрессия» для задачі

1.6. З отриманих результатів (рис. 3) перепишемо значення оцінок параметрів багатфакторної лінійної регресії (стовпчик «Коэффициенты» - комірки B17:B20):  $b_0=27,710$ ;  $b_1=1,049$ ;  $b_2=1,514$ ;  $b_3= - 1,584$ .

Записуємо оцінене вибіркове рівняння регресії

$$\hat{y} = 27,710 + 1,049x_1 + 1,514x_2 - 1,584x_3$$

та вибірккову економетричну модель

$$y = 27,710 + 1,049x_1 + 1,514x_2 - 1,584x_3 + e.$$

## **2. Визначаємо показники якості вибіркової моделі.**

**2.1.** В рядку «Множественный R» з комірки з адресою B4 (рис. 3) виписуємо значення коефіцієнта множинної кореляції  $R=0,980$ . В рядку «R-квадрат» з комірки B5 виписуємо значення коефіцієнта детермінації  $R^2 = 0,961$ . В рядку «Стандартная ошибка» з комірки B7 виписуємо значення стандартної похибки моделі  $\sigma_e = 2,332$ .

В результаті аналізу отриманих показників, можна зробити наступні висновки: оцінивши силу лінійного взаємозв'язку між змінними за допомогою коефіцієнта множинної кореляції можна сказати, що між продуктивністю праці та факторами, що впливають на цей показник існує прямий та сильний кореляційний зв'язок оскільки коефіцієнт множинної кореляції  $R=0,980$ , тобто його значення наближується до одиниці. Коефіцієнт детермінації  $R^2 = 0,961$ , показує, що зміна значення продуктивності праці на 96,1% пояснюється зміною значень фондомісткості продукції, коефіцієнта плинності робочої сили та рівня втрат робочого часу, а на 3,9% - іншими випадковими факторами, що свідчить про високий рівень адекватності моделі в цілому.

**2.2. Перевірка адекватності побудованої економетричної моделі.** Для оцінки рівня адекватності побудованої економетричної моделі експериментальним даним користуємося F-критерієм Фішера. З комірки E12 виписуємо розрахункове значення F-критерію Фішера  $F^*=162,4$ .

За статистичними таблицями F-критерію (розподілу) Фішера для рівня значимості  $\alpha=0,05$  і ступенів вільності  $\nu_1 = m = 3$  (де  $m$  – кількість незалежних (пояснюючих) змінних моделі) та  $\nu_2 = n - k = 24 - 4 = 20$  (де  $n$  – кількість спостережень в статистичній вибірці;  $k$  - число параметрів моделі) визначаємо критичне значення F-критерію Фішера. Або з цією ж метою використовуємо вбудовану статистичну функцію «F.ОБР.ПХ» (див. рис. 4) (або «FРАСПОБР» для Excel 2007).

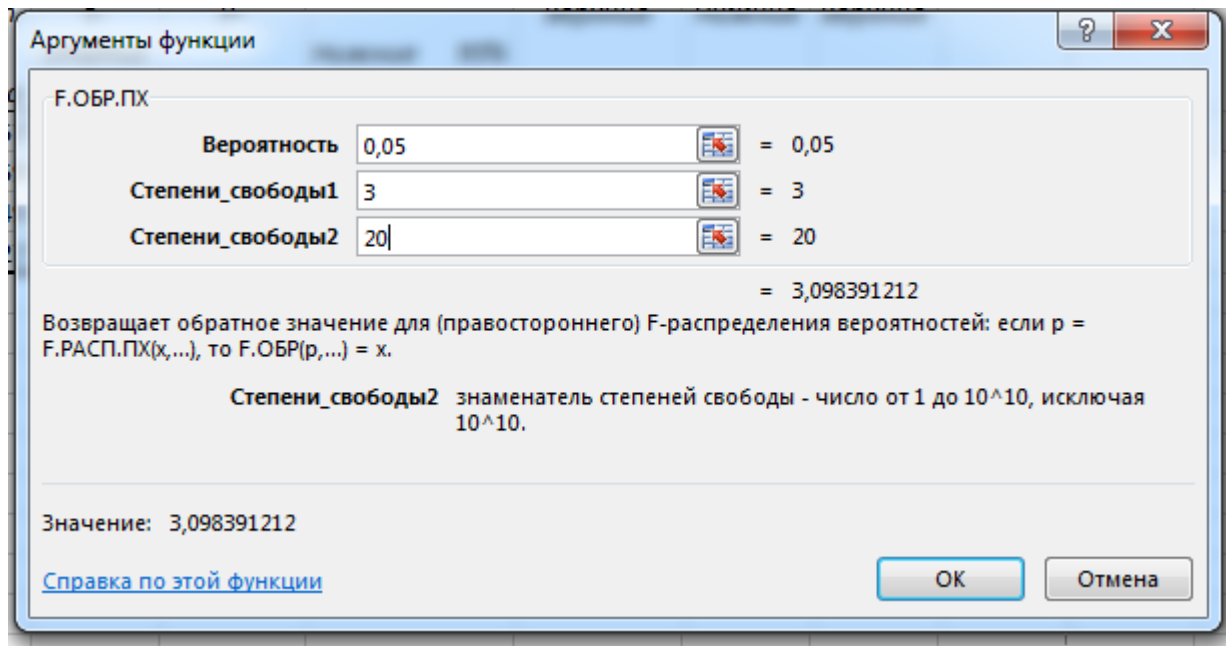


Рис. 4. Діалогове вікно функції «F.ОБР.ПХ» з даними моделі

В результаті проведених розрахунків отримуємо  $F_{кр}=3,098$ .

Оскільки виконується умова  $F^* > F_{кр}$  ( $162,4 > 3,098$ ), то робимо висновок про адекватність побудованої економетричної моделі експериментальним даним.

### 2.3. Знаходження довірчих інтервалів для оцінок.

З діапазону комірок F17:G20 виписуємо інтервали довіри для параметрів моделі:

$$1,903 < \beta_0 < 53,517; \quad 0,666 < \beta_1 < 1,431; \quad 0,522 < \beta_2 < 2,506;$$

$$-2,985 < \beta_3 < -0,184.$$

### 2.4. Визначаємо показники статистичної значимості вибіркової моделі.

Для цього розрахункові значення t-критерію Стюдента для параметрів моделі виписуємо зі стовпчика «t-статистика» (комірок D17:D20, рис. 3) і, таким чином, маємо  $t_{b_0}^* = 2,240$ ;  $t_{b_1}^* = 5,721$ ;  $t_{b_2}^* = 3,184$  та  $t_{b_3}^* = -2,359$ .

Для рівня значимості  $\alpha=0,05$  та ступеня вільності  $\nu = n - k = 24 - 4 = 20$  (де  $n$  – кількість спостережень в статистичній вибірці;  $k$  - число параметрів моделі) за статистичними таблицями t-критерію (розподілу) Стюдента визначаємо критичне значення t-критерію Стюдента. Або з цією ж метою використовуємо вбудовану статистичну функцію «СТЮДЕНТ.ОБР.2Х» (див. рис. 5) (або «СТЮДРАСПОБР» для Excel 2007).

В результаті проведених розрахунків (рис. 5) маємо критичне значення t-критерію Стюдента  $t_{кр} = 2,086$ .

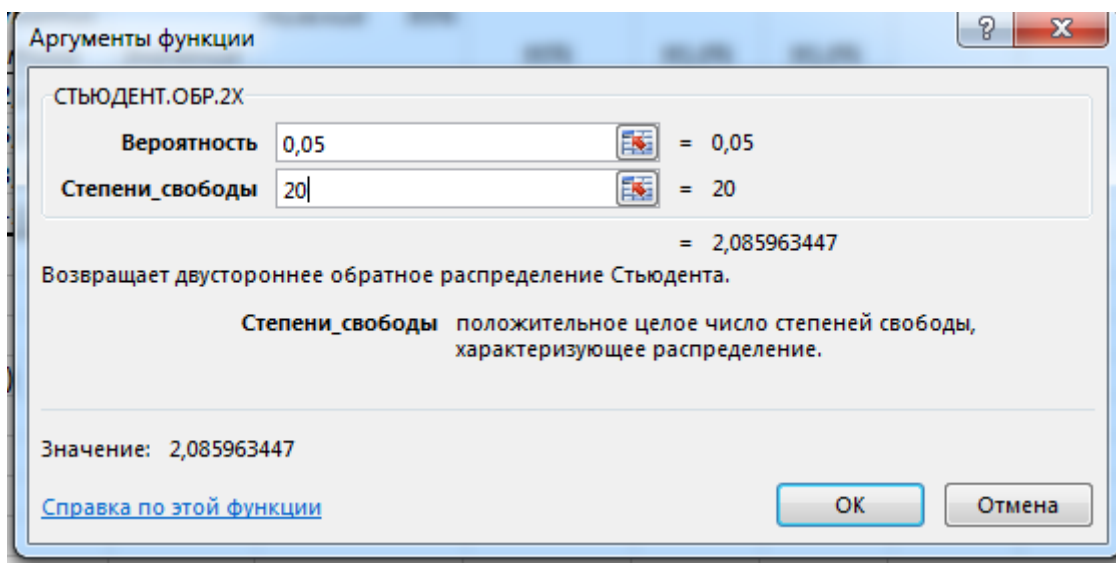


Рис. 5. Діалогове вікно функції «СТЮДЕНТ.ОБР.2Х» з даними моделі

Перевірку статистичної значимості кожного оціненого параметру здійснюємо шляхом перевірки виконання умови  $|t_{b_j}^*| > t_{кр}$ , ( $j = \overline{0, 3}$ ). Оскільки умова перевірки виконується -  $|t_{b_0}^*| > t_{кр}$ ,  $|t_{b_1}^*| > t_{кр}$ ,  $|t_{b_2}^*| > t_{кр}$ ,  $|t_{b_3}^*| > t_{кр}$  відповідно  $2,240 > 2,086$ ;  $5,721 > 2,086$ ;  $3,184 > 2,086$  та  $|-2,359| > 2,086$  це свідчить про те, що всі параметри багатофакторної лінійної регресії є статистично значимі.

Виконаємо перевірку статистичної значимості коефіцієнта множинної кореляції  $R^2$ . Для цього розраховуємо значення t-статистики для коефіцієнта парної кореляції за наступною залежністю:

$$t_R^* = \frac{R \sqrt{n - k}}{\sqrt{1 - R^2}},$$

де  $n$  – розмір статистичної вибірки,  $k$ - число параметрів моделі.

В результаті проведених розрахунків отримаємо наступне значення цього показника

$$t_R^* = \frac{R \sqrt{n - k}}{\sqrt{1 - R^2}} = \frac{0,980 \sqrt{24 - 4}}{\sqrt{1 - 0,961}} = 22,193.$$

Порівнявши розрахункове значення t-статистики для коефіцієнта множинної кореляції з критичним значенням критерію Стюдента  $|t_R^*| > t_{кр}$  ( $22,193 > 2,086$ ) можна зробити висновок, що коефіцієнт множинної кореляції  $R$  є статистично значимий.

Таким чином за результатами вищенаведених досліджень можна зробити висновок про те, що отримана оцінена багатofакторна лінійна регресійна модель є якісною та статистично значимою. Тому на її основі можна здійснювати адекватний економіко-математичний аналіз і прогнозування.

### 3. Виконаємо прогнозні розрахунки на основі отриманої економетричної моделі.

З використанням отриманої моделі  $\hat{y} = 27,710 + 1,049x_1 + 1,514x_2 - 1,584x_3$  можна отримати прогнозні значення залежної змінної при задаванні перспективного значення пояснювальних змінних. Прогноз на перспективу є двох видів: точковий та інтервальний.

**Точковий прогноз продуктивності праці** ( $\hat{Y}_{np}$ ) визначається за формулою:

$$\hat{Y}_{np} = X_{np}^T \cdot B,$$

де  $X_{np}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ x_{1np} \\ x_{2np} \\ x_{3np} \end{pmatrix} = (1 \quad x_{1np} \quad x_{2np} \quad x_{3np})$  - транспонований вектор прогнозних

значень пояснюючих змінних;  $x_{1np}$  - прогнозне (очікуване) значення фондомісткості продукції;  $x_{2np}$  - прогнозне (очікуване) значення коефіцієнта плинності робочої сили;  $x_{3np}$  - прогнозне (очікуване) значення рівня витрат робочого часу;

$$B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \text{вектор оцінок параметрів моделі.}$$

**Інтервальний прогноз для математичного сподівання продуктивності праці** визначається за формулою:

$$\hat{Y}_{np} - t_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_\varepsilon \sqrt{X_{np}^T (X^T X)^{-1} X_{np}} \leq M(Y_{np}) \leq \hat{Y}_{np} + t_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_\varepsilon \sqrt{X_{np}^T (X^T X)^{-1} X_{np}}.$$

**Інтервальний прогноз для індивідуального значення продуктивності праці** визначається за формулою:

$$\hat{Y}_{np} - t_{\alpha/2} \hat{\sigma}_\varepsilon \sqrt{1 + X_{np}^T (X^T X)^{-1} X_{np}} \leq Y_{np} \leq \hat{Y}_{np} + t_{\alpha/2} \hat{\sigma}_\varepsilon \sqrt{1 + X_{np}^T (X^T X)^{-1} X_{np}},$$

де  $X_{np} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_{1np} \\ x_{2np} \\ x_{3np} \end{pmatrix}$  - вектор прогнозних значень пояснюючих змінних;  $x_{1np}$  - прогнозне

(очікуване) значення фондомісткості продукції;  $x_{2np}$  - прогнозне (очікуване) значення коефіцієнта плинності робочої сили;  $x_{3np}$  - прогнозне (очікуване) значення рівня втрат робочого часу.

Матриця  $(X^T X)$  – матриця, яка має наступний вигляд:

$$X^T X = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_{1i} & \sum_{i=1}^n x_{2i} & \sum_{i=1}^n x_{3i} \\ \sum_{i=1}^n x_{1i} & \sum_{i=1}^n x_{1i}^2 & \sum_{i=1}^n x_{1i} \cdot x_{2i} & \sum_{i=1}^n x_{1i} \cdot x_{3i} \\ \sum_{i=1}^n x_{2i} & \sum_{i=1}^n x_{2i} \cdot x_{1i} & \sum_{i=1}^n x_{2i}^2 & \sum_{i=1}^n x_{2i} \cdot x_{3i} \\ \sum_{i=1}^n x_{3i} & \sum_{i=1}^n x_{3i} \cdot x_{1i} & \sum_{i=1}^n x_{3i} \cdot x_{2i} & \sum_{i=1}^n x_{3i}^2 \end{bmatrix};$$

$(X^T X)^{-1}$  - обернена матриця до матриці  $(X^T X)$ ;  $\hat{\sigma}_\varepsilon$  - стандартна похибка моделі;  $t_{\alpha/2}$  - критичне значення t-критерію Стюдента.

**3.1. Точковий прогноз продуктивності праці** визначаємо в наступній послідовності.

**3.1.1.** На робочому аркуші, на якому вводили вихідні дані задачі (див. рис. 1), в комірках B28:B31 розміщуємо компоненти вектору прогнозних значень пояснюючих

змінних  $X_{np} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_{1np} \\ x_{2np} \\ x_{3np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 60 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$  (рис. 6). Тобто в ці комірки вводимо прогнозні

(очікувані) значення фондомісткості продукції  $x_{1np} = 60 \text{ тис.грн. / тис.грн.}$ ; коефіцієнта плинності робочої сили  $x_{2np} = 4\%$  та рівня втрат робочого часу  $x_{3np} = 5\%$ .

|                                                                                                                                          |                         |          |    |   |   |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|----------|----|---|---|
| B35 : <input type="button" value="✕"/> <input type="button" value="✓"/> <input type="button" value="fx"/> =МУМНОЖ(B33:E33;Лист3!B17:B20) |                         |          |    |   |   |
|                                                                                                                                          | A                       | B        | C  | D | E |
| 27                                                                                                                                       |                         |          |    |   |   |
| 28                                                                                                                                       |                         | 1        |    |   |   |
| 29                                                                                                                                       | $X_{np}=$               | 60       |    |   |   |
| 30                                                                                                                                       |                         | 4        |    |   |   |
| 31                                                                                                                                       |                         | 5        |    |   |   |
| 32                                                                                                                                       |                         |          |    |   |   |
| 33                                                                                                                                       | $X_{np \text{ транс}}=$ | 1        | 60 | 4 | 5 |
| 34                                                                                                                                       |                         |          |    |   |   |
| 35                                                                                                                                       | $Y_{np \text{ теор}}=$  | 88,76187 |    |   |   |

Рис. 6. Результати визначення точкового прогнозу продуктивності праці

**3.1.2.** За допомогою вбудованої функції **ТРАНСП** виконуємо транспонування вектору  $X_{np}$ .

Функція **ТРАНСП** – перетворює горизонтально орієнтований діапазон комірок у вертикально орієнтований та навпаки. Для активізації даної функції використовують «Мастер функций» та обрають категорію «Ссылки и массивы». Транспонування масиву полягає в тому, що перший рядочок масиву 1 стає першим стовпчиком нового масиву 2, другий рядочок – другим стовпчиком і т.д.

Виділяємо діапазон комірок, в яких мають бути розташовані компоненти транспонованого масиву  $X_{np}^T$  (в нашому прикладі - B33:E33).

Викликати функцію **ТРАНСП**. В поле «Массив» ввести аргументи, які відповідають компонентам масиву  $X_{np}$ , що розташовані в комірках з адресою B28:B31. Для завершення вводу натиснути комбінацію клавіш Ctrl + Shift + Enter, в результаті чого отримуємо масив  $X_{np \text{ транс}}$ , наведений на рис. 6. Якщо діалогове вікно функції вже закрили, то для завершення вводу поставити курсор в будь-яку з комірок, де розташований транспонований вектор (в нашому прикладі B33:E33) та натиснути кнопку «F2», а потім натиснути комбінацію клавіш Ctrl + Shift + Enter.

**3.1.3.** Використовуючи функцію «**МУМНОЖ**» знайти добуток векторів  $X_{np}^T \cdot B$ .

Функція «**МУМНОЖ**» – дозволяє отримати добуток двох масивів. Для активації даної функції використовують «Мастер функций» та обрають категорію

«Математические». Результатом добутку є масив з кількістю рядочків, як в масиві 1 та кількістю стовпців, як в масиві 2.

Ставимо курсор в комірку, де будемо обраховувати прогнозне значення  $\hat{Y}_{np}$  (B35). Викликаємо функцію «МУМНОЖ». В діалоговому вікні функції заповнюємо поля (рис. 7). В поле «Массив1» вводимо аргументи, які відповідають вектору  $X_{np}^T$  (B33:E33), в поле «Массив2» вводимо аргументи, які відповідають вектору  $B$  (Лист3!B17:B20). Оскільки знайдені нами коефіцієнти вектору  $B$  знаходяться на іншому аркуші, вказуємо комірки з назвою аркуша, на якому отримали «ВЫВОД ИТОГОВ» (рис. 3).

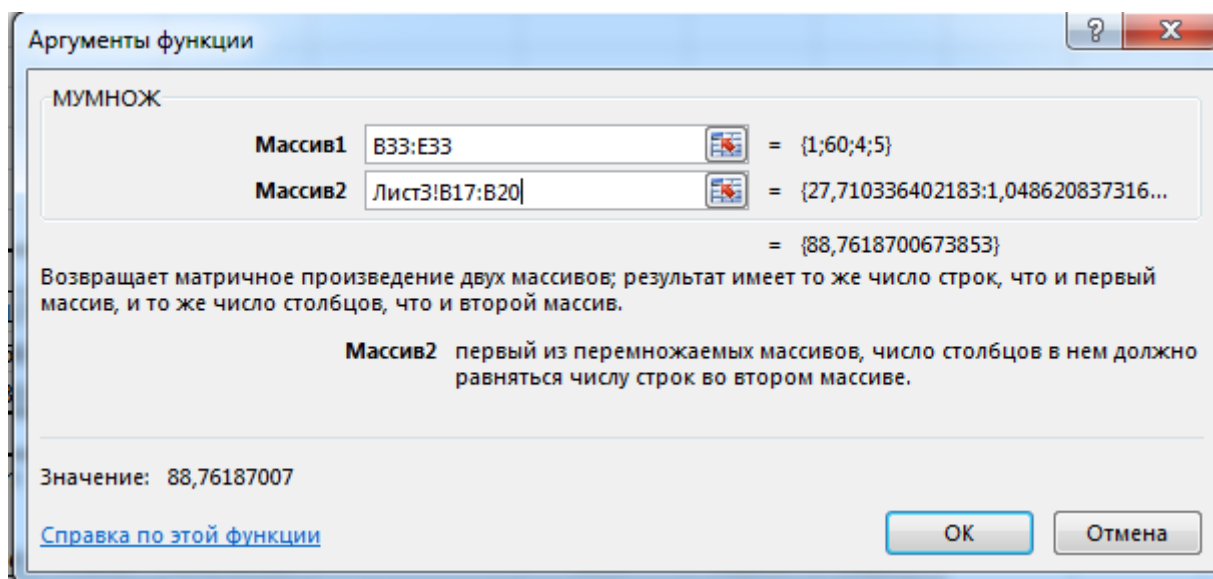


Рис. 7. Діалогове вікно функції «МУМНОЖ»

Для завершення вводу і отримання результату функції натиснути комбінацію клавіш «Ctrl + Shift + Enter».

В клітинці з адресою B35 отримаємо значення точкового прогнозу продуктивності праці  $\hat{Y}_{np} = 88,762$  (рис. 6).

За результатами проведених розрахунків можна зробити висновок про те, що при заданих значеннях фондомісткості продукції 60 тис. грн. / тис. грн., коефіцієнта плинності робочої сили 4% та рівня втрат робочого часу 5% точкове прогнозне значення продуктивності праці буде на рівні 88,762 тис.грн. /людино-год.

**3.2. З метою визначення інтервального прогнозу для математичного сподівання продуктивності праці проведемо розрахунки в наступній послідовності.**

**3.2.1.** В комітках В37:Е40 розміщуємо компоненти матриці  $(X^T X)$ , розраховані згідно формули наведеної вище (див. стор 9). Для цього скористаємось вбудованими функціями, наведеними на рис. 8.

|    | A                    | B             | C                          | D                          | E                          |
|----|----------------------|---------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 37 |                      | 24            | =СУММ(С3:С26)              | =СУММ(Д3:Д36)              | =СУММ(Е3:Е26)              |
| 38 | $X_{\text{транс}}X=$ | =СУММ(С3:С26) | =СУММКВ(Д3:Д26)            | =СУММПРОИЗВ(С3:С26;Д3:Д26) | =СУММПРОИЗВ(С3:С26;Е3:Е26) |
| 39 |                      | =СУММ(Д3:Д26) | =СУММПРОИЗВ(Д3:Д26;С3:С26) | =СУММКВ(Д3:Д26)            | =СУММПРОИЗВ(Д3:Д26;Е3:Е26) |
| 40 |                      | =СУММ(Е3:Е26) | =СУММПРОИЗВ(Е3:Е26;С3:С26) | =СУММПРОИЗВ(Е3:Е26;Д3:Д26) | =СУММКВ(Е3:Е26)            |
| 41 |                      |               |                            |                            |                            |

Рис. 8. Вбудовані функції MS EXCEL для розрахунку матриці  $(X^T X)$

Після розрахунку функцій наведених на рис. 8, отримуємо їх результати в в цих комітках (В37:Е40) як наведено на рис. 9.

|    | A                                                                       | B           | C       | D       | E       |
|----|-------------------------------------------------------------------------|-------------|---------|---------|---------|
| 28 |                                                                         | 1           |         |         |         |
| 29 | $X_{\text{пр}}=$                                                        | 60          |         |         |         |
| 30 |                                                                         | 4           |         |         |         |
| 31 |                                                                         | 5           |         |         |         |
| 32 |                                                                         |             |         |         |         |
| 33 | $X_{\text{пр транс}}=$                                                  | 1           | 60      | 4       | 5       |
| 34 |                                                                         |             |         |         |         |
| 35 | $Y_{\text{пр теор}}=$                                                   | 88,76187007 |         |         |         |
| 36 |                                                                         |             |         |         |         |
| 37 |                                                                         | 24          | 1117    | 163,8   | 200,9   |
| 38 | $X_{\text{транс}}X=$                                                    | 1117        | 1286,94 | 6872,1  | 8656    |
| 39 |                                                                         | 159,8       | 6872,1  | 1286,94 | 1574,83 |
| 40 |                                                                         | 200,9       | 8656    | 1574,83 | 1966,09 |
| 41 |                                                                         |             |         |         |         |
| 42 | $(X_{\text{транс}}X)_{\text{обр}}=$                                     | 0,197       | 0,001   | -0,019  | -0,010  |
| 43 |                                                                         | 0,001       | 0,000   | 0,000   | 0,000   |
| 44 |                                                                         | 0,012       | 0,000   | 0,038   | -0,032  |
| 45 |                                                                         | -0,035      | 0,000   | -0,028  | 0,026   |
| 46 |                                                                         |             |         |         |         |
| 47 | $X_{\text{прог т}} * (X_{\text{т}}^T X)_{\text{обр}}$                   | 0,143       | 0,000   | -0,017  | 0,002   |
| 48 |                                                                         |             |         |         |         |
| 49 | $X_{\text{прог т}} * (X_{\text{т}}^T X)_{\text{обр}} * X_{\text{прог}}$ | 0,079       |         |         |         |
| 50 |                                                                         |             |         |         |         |

Рис. 9. Результати виконання розрахунків для прогнозних значень

**3.2.2.** З метою визначення компонентів матриці  $(X^T X)^{-1}$  (рис. 9) в комітках В42:Е45 використовуємо вбудовану функцію МОБР(В37:Е40).

Функція **МОБР** – дозволяє отримати обернену матрицю. Для активізації даної функції використовують «Мастер функций» та обирають категорію

«Математические». Вона застосовується до масивів, у яких кількість рядочків дорівнює кількості стовпчиків. Деякі квадратні матриці не можуть бути оберненими, в таких випадках функція МОБР видає повідомлення про помилку «#ЧИСЛО!». Визначник такої матриці дорівнює нулю.

Виділяємо діапазон комірок, де будемо обраховувати обернену матрицю  $(X^T X)^{-1}$  - B42:E45. Викликаємо функцію МОБР. В поле «Массив» вводимо аргументи, які відповідають компонентам масиву  $(X^T X)$  – B37:E40. Для завершення вводу і отримання результату функції натиснути комбінацію клавіш «Ctrl + Shift + Enter».

**3.2.3.** Для розрахунку добутку матриць  $X_{np}^T (X^T X)^{-1} X_{np}$  двічі використовуємо функцію МУМНОЖ. Спочатку множимо вектор  $X_{np}^T$  (знаходиться в комірках B33:E33) на  $(X^T X)^{-1}$  (знаходиться в комірках B42:E45) і отримаємо результат функції МУМНОЖ(B33:E33;B42:E45) в комірках B47:E47 (рис. 9). Потім множимо отриманий вектор  $X_{np}^T (X^T X)^{-1}$  (знаходиться в комірках B47:E47) на  $X_{np}$  (знаходиться в комірках B28:B31) і отримаємо результат функції МУМНОЖ(B47:E47;B28:B31) в комірці B49 (рис. 9).

**3.2.4.** Визначаємо мінімальне значення інтервального прогнозу для математичного сподівання продуктивності праці – ліву частину нерівності

$$\hat{Y}_{np} - t_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_\varepsilon \sqrt{X_{np}^T (X^T X)^{-1} X_{np}} \leq M(Y_{np}) \leq \hat{Y}_{np} + t_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_\varepsilon \sqrt{X_{np}^T (X^T X)^{-1} X_{np}}, \text{ де}$$

$\hat{Y}_{np} = 88,762$  тис.грн./людино-год. (точковий прогноз продуктивності праці);  
 $t_{\alpha/2} = t_{кр} = 2,086$  - критичне значення t-критерію Стьюдента, яке було обраховано за допомогою вбудованої функції «СТЬЮДЕНТ.ОБР.2Х»;  $\hat{\sigma}_\varepsilon$  - стандартна похибка моделі – знаходиться на аркуші «ВЫВОД ИТОГОВ», комірка B7, в рядку «Стандартная ошибка» (див. рис.3).

В результаті отримуємо таке значення лівої частини нерівності:

$$\hat{Y}_{np} - t_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_\varepsilon \sqrt{X_{np}^T (X^T X)^{-1} X_{np}} = 88,762 - 2,086 \cdot 2,332 \cdot \sqrt{0,079} = 87,395$$

Визначаємо максимальне значення інтервального прогнозу для математичного сподівання продуктивності праці – праву частину нерівності

$$\hat{Y}_{np} + t_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_\varepsilon \sqrt{X_{np}^T (X^T X)^{-1} X_{np}} = 88,762 + 2,086 \cdot 2,332 \cdot \sqrt{0,079} = 90,129$$

Тоді маємо

$$87,395 \leq M(Y_{np}) \leq 90,129.$$

За результатами проведених розрахунків, з ймовірністю 95%, можна зробити висновок про те, що при заданих значеннях фондомісткості продукції 60 тис. грн. / тис. грн.; коефіцієнта плинності робочої сили 4% та рівня втрат робочого часу 5% середнє значення залежної змінної у генеральній сукупності буде знаходитись в межах 87,395 тис.грн./людино-год. до 90,129 тис.грн./людино-год.

**3.3. Для визначення інтервального прогнозу для індивідуального значення продуктивності праці, виконуємо наступні розрахунки.**

Визначаємо мінімальне значення інтервального прогнозу для індивідуального значення продуктивності праці, ліву частину нерівності:

$$\hat{Y}_{np} - t_{\alpha/2} \hat{\sigma}_{\varepsilon} \sqrt{1 + X_{np}^T (X^T X)^{-1} X_{np}} \leq Y_{np} \leq \hat{Y}_{np} + t_{\alpha/2} \hat{\sigma}_{\varepsilon} \sqrt{1 + X_{np}^T (X^T X)^{-1} X_{np}} .$$

$$\hat{Y}_{np} - t_{\alpha/2} \hat{\sigma}_{\varepsilon} \sqrt{1 + X_{np}^T (X^T X)^{-1} X_{np}} = 88,762 - 2,086 \cdot 2,332 \cdot \sqrt{1 + 0,079} = 83,709$$

Обчислюємо максимальне значення інтервального прогнозу для індивідуального значення продуктивності праці.

$$\hat{Y}_{np} + t_{\alpha/2} \hat{\sigma}_{\varepsilon} \sqrt{1 + X_{np}^T (X^T X)^{-1} X_{np}} = 88,762 + 2,086 \cdot 2,332 \cdot \sqrt{1 + 0,079} = 93,815$$

Отже маємо

$$83,709 \leq Y_{np} \leq 93,815$$

За результатами проведених розрахунків, з ймовірністю 95%, можна стверджувати, що при заданих значеннях фондомісткості продукції 60 тис. грн. / тис. грн.; коефіцієнта плинності робочої сили 4% та рівня втрат робочого часу 5% індивідуальне (окреме) значення залежної змінної у генеральній сукупності буде знаходитись в межах від 83,709 тис.грн./людино-год. до 93,815 тис.грн./людино-год.

#### **4. Висновки.**

Виконуємо економіко-математичний аналіз моделі продуктивності праці в наступній послідовності.

1) За результатами розрахунків було отримане таке оцінене вибіркове рівняння регресії

$$\hat{y} = 27,710 + 1,049x_1 + 1,514x_2 - 1,584x_3$$

та вибіркова економетрична модель

$$y = 27,710 + 1,049x_1 + 1,514x_2 - 1,584x_3 + e .$$

2) Отриманий K=коефіцієнт множинної кореляції, R=0,980, вказує на те, що між продуктивністю праці та факторами, що впливають на цей показник існує лінійний,

прямий та сильний кореляційний зв'язок оскільки, його значення наближується до одиниці.

3) Коефіцієнт детермінації  $R^2 = 0,961$ , показує, що зміна значення продуктивності праці на 96,1% пояснюється зміною значень фондомісткості продукції, коефіцієнта плинності робочої сили та рівня втрат робочого часу, а на 3,9% - іншими випадковими факторами, що свідчить про високий рівень адекватності моделі в цілому.

4) Оскільки виконується умова  $F^* > F_{кр}$  ( $162,4 > 3,098$ ), то робимо висновок про адекватність побудованої економетричної моделі експериментальним даним.

5) Порівнявши розрахункове значення t-статистики для коефіцієнта множинної кореляції з критичним значенням критерію Стюдента  $|t_R^*| > t_{кр}$  ( $22,193 > 2,086$ ) можна зробити висновок, що коефіцієнт множинної кореляції  $R$  є статистично значимий.

6) Умова перевірки t-статистики Стюдента стосовно параметрів економетричної моделі  $b_0, b_1, b_2, b_3$  виконується:  $|t_{b_0}^*| > t_{кр}$ ,  $|t_{b_1}^*| > t_{кр}$ ,  $|t_{b_2}^*| > t_{кр}$ ,  $|t_{b_3}^*| > t_{кр}$  відповідно  $2,240 > 2,086$ ;  $5,721 > 2,086$ ;  $3,184 > 2,086$  та  $|-2,359| > 2,086$ . Це свідчить про те, що всі параметри багатofакторної лінійної регресії є статистично значимі.

Таким чином за результатами вищенаведених досліджень можна зробити висновок про те, що отримана оцінена багатofакторна лінійна регресійна модель є якісною та статистично значимою. Тому на її основі можна здійснювати адекватний економіко-математичний аналіз і прогнозування.

7) Точкове прогнозне значення продуктивності праці при заданих значеннях фондомісткості продукції 60 тис.грн./тис.грн., коефіцієнта плинності робочої сили 4% та рівня втрат робочого часу 5% буде на рівні 88,762 тис.грн. /людино-год.

8) Інтервальний прогноз для математичного сподівання продуктивності праці

$$87,395 \leq M(Y_{np}) \leq 90,129.$$

Тобто, з ймовірністю 95%, можна зробити висновок про те, що при заданих значеннях фондомісткості продукції 60 тис.грн./тис.грн.; коефіцієнта плинності робочої сили 4% та рівня втрат робочого часу 5% середнє значення залежної змінної у генеральній сукупності буде знаходитися в межах 87,395 тис.грн./людино-год. до 90,129 тис.грн./людино-год.

Інтервальний прогноз для індивідуального значення продуктивності праці  
 $83,709 \leq Y_{np} \leq 93,815$ .

Тобто, з ймовірністю 95%, можна стверджувати, що при заданих значеннях фондомісткості продукції 60 тис. грн. / тис. грн.; коефіцієнта плинності робочої сили 4% та рівня втрат робочого часу 5% індивідуальне (окреме) значення залежної змінної у генеральній сукупності буде знаходитись в межах від 83,709 тис.грн./людино-год. до 93,815 тис.грн./людино-год.

9) Оскільки нами було доведено статистичну значущість параметрів моделі, надамо їх економічну інтерпретацію.

На основі обчислених коефіцієнтів регресії  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  оцінюємо граничний вплив кожного фактору на продуктивність праці. На підставі обчислених значень можна зробити висновки про те, що у випадку збільшення фондомісткості продукції на 1 тис.грн./тис.грн. продуктивність праці в середньому збільшиться на 1,049 тис.грн./людино-год. за умови, що інші фактори такі як коефіцієнт плинності робочої сили та рівень втрат робочого часу, будуть незмінними. При збільшенні коефіцієнта плинності робочої сили на 1%, за умови, що фондомісткість продукції та рівень втрат робочого часу, будуть незмінними, продуктивність праці в середньому збільшиться на 1,514 тис.грн./людино-год. При збільшенні рівня втрат робочого часу на 1% при незмінних значеннях фондомісткості продукції та коефіцієнта плинності робочої сили, продуктивність праці в середньому зменшиться на 1,548 тис.грн./людино-год.