ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ РОБОТИ

Розрахувати перехідний процес в усіх елементах електричного ланцюга (рис. 3) при замиканні та розмиканні ключа *S*.

Параметри елементів: J = 1 А; R_1 = 100 Ом; R_2 = 100 Ом; R_3 = 50 Ом; C = 1 мкФ.

Припускаємо, що напрямок струмів є таким як вказано на рис. 3

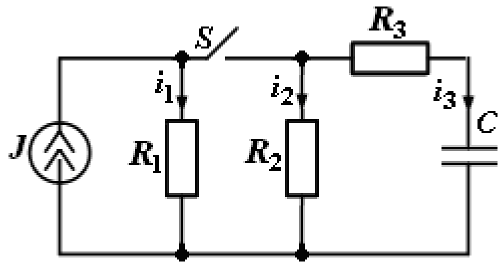

Рис. 3

Розрахунок перехідного процесу класичним методом

Замикання ключа

Після замикання ключа *S* схема електричного ланцюга має вигляд рис. 4.

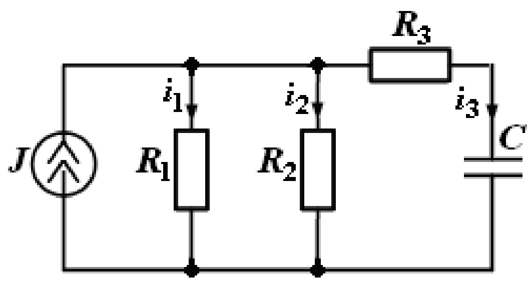

Рис. 4

Будемо шукати напругу на конденсаторі C як суму вимушеної u'_C та вільної u''_C складових:

$$u_C = u'_C + u''_C.$$

1. Вимушена складова u'_C співпадає з напругою на конденсаторі в усталеному режимі. Оскільки в усталеному режимі струм через конденсатор C не протікає, вимушена напруга на ньому буде співпадати з напругою на паралельно з’єднаних резисторах R_1 та R_2.

$$u'_C = U'_C = J \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}.$$

2. Для знаходження вільної складової складемо диференційне рівняння електричного ланцюга відносно напруги на конденсаторі u_C.

Струм i_3 співпадає із струмом конденсатора i_C, який у свою чергу пропорційний швидкості зміни напруги на конденсаторі

$$i_3 = i_C = C\frac{du_C}{dt}.$$

Якщо позначити напругу на джерелі струму як $u_{ВХ}$, суму струмів i_1 та i_2 можна записати таким чином:

$$i_1 + i_2 = \frac{u_{вх}}{R_{12}},$$

де $R_{12} = \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$.

Напруга $u_{ВХ}$ співпадає з напругою на послідовно з’єднаних елементах C та R_3, яку можна описати таким чином :

$$u_{вх} = u_C + u_{R_3} = u_C + i_3 R_3 = u_C + R_3 C \cdot \frac{du_C}{dt}.$$

У відповідності з першим законом Кірхгофа можна записати :

$$i_1 + i_2 + i_3 = J.$$

Або підставляючи одержані вище співвідношення :

$$\frac{\left(u_C + CR_3 \cdot \dfrac{dU_C}{dt}\right)}{\left(\dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}\right)} + C \cdot \frac{du_C}{dt} = J\,.$$

Приводячи подібні, одержуємо остаточний вигляд диференційного рівняння електричного ланцюга відносно напруги на ємності u_C:

$$C \cdot (R_3 \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2} + 1)\frac{du_C}{dt} + (\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2})u_C = J.$$

3. Для визначення вільної складової u''_C треба розв’язати *однорідне* диференційне рівняння:

$$C(R_3 \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2} + 1)\frac{du''_C}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2}u''_C = 0.$$

Складаємо характеристичне рівняння :

$$p\left[C(R_3 \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2} + 1)\right] + \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2} = 0.$$

Корінь характеристичного рівняння :

$$p = -\frac{(R_1 + R_2)/R_1 \cdot R_2}{C\left[R_3(R_1 + R_2) + R_1 \cdot R_2\right]/R_1 \cdot R_2} = -\frac{R_1 + R_2}{C\left[R_3(R_1 + R_2) + R_1 \cdot R_2\right]}.$$

Стала часу електричного ланцюга при замиканні ключа *S*, є величиною оберненою до кореня характеристичного рівняння:

$$\tau_3 = \frac{1}{p} = C\frac{\left[R_3(R_1 + R_2) + R_1 \cdot R_2\right]}{R_1 + R_2} = C(R_3 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}).$$

4. Таким чином, напруга на конденсаторі в перехідному режимі описується таким виразом :

$$u_C = u'_C + u''_C = J \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + A \cdot e^{-t/\tau_3}.$$

5. Визначимо сталу інтегрування *A*, з урахуванням початкових умов. Оскільки у момент комутації ($t = 0$) початкова напруга на конденсаторі

дорівнює нулю $u_C(0)=0$, одержуємо таке співвідношення:

$$0 = J\cdot\frac{R_1\cdot R_2}{R_1+R_2}+A;$$

Отже

$$A = -J\cdot\frac{R_1\cdot R_2}{R_1+R_2}.$$

6. Таким чином, після замикання ключа *S*, напруга на конденсаторі *C* в перехідному режимі змінюється за таким законом :

$$u_C(t) = J\cdot\frac{R_1\cdot R_2}{R_1+R_2}\left(1-e^{-t/\tau_3}\right).$$

7. Знаючи напругу на конденсаторі $u_C(t)$, визначаємо усі інші струми та напруги, використовуючи співвідношення, одержані в п. 2.

Так струм i_3:

$$i_3(t)=i_C(t)=C\frac{du_C}{dt}=J\cdot\frac{R_1\cdot R_2}{R_1+R_2}\cdot\frac{1}{\left(R_3+\dfrac{R_1\cdot R_2}{R_1+R_2}\right)}\cdot e^{-t/\tau_3}.$$

Аналогічно визначаємо інші струми та напруги.

Розмикання ключа

Після розмикання ключа електричний ланцюг розпадається на два взаємно не пов’язані ланцюги (рис. 5).

Оскільки ліва частина ланцюга не містить реактивні елементи, перехідний процес в ній буде відбуватися миттєво і одразу після комутації в резисторі R_1 встановлюється струм $i_1=J$.

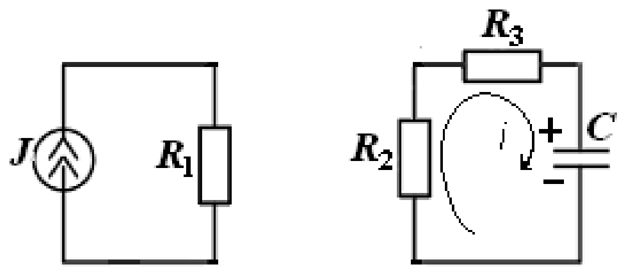

Рис. 5

Права частина ланцюга містить реактивний елемент – конденсатор *C*. Отже в ній буде відбуватися перехідний процес, який будемо шукати у вигляді суми вимушеної і вільної складових

$$u_C = u'_C + u''_C.$$

1. Оскільки після комутації у правій частині ланцюга зовнішні джерела енергії відсутні, вимушена напруга на конденсаторі $u'_C = 0$.

2. Для знаходження вільної складової складаємо диференційне рівняння відносно напруги на конденсаторі u_C з урахуванням прийнятого напрямку струму *i*.

$$i\left(R_2 + R_3\right) + u_C = 0.$$

Оскільки $i = C \cdot \dfrac{du_C}{dt}$,

одержуємо остаточний вигляд диференційного рівняння:

$$C\left(R_2 + R_3\right)\frac{du_C}{dt} + u_C = 0.$$

Оскільки зовнішні джерела енергії відсутні, диференційне рівняння ланцюга є однорідним.

3. Складемо характеристичне рівняння і визначимо його корінь:

$$C\left(R_2 + R_3\right) \cdot p + 1 = 0,$$

$$p = -\frac{1}{C\left(R_2 + R_3\right)}.$$

Отже стала часу при розмиканні ключа:

$$\tau_p = \frac{1}{p} = C\left(R_2 + R_3\right).$$

4. Таким чином напруга на конденсаторі C в перехідному режимі описується таким виразом:

$$u_C(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau_p}}.$$

5. Визначимо сталу інтегрування з урахуванням початкових умов.

У момент комутації (t = 0) початкова напруга на конденсаторі $u_C\left(0\right)$ дорівнювала усталеній напрузі попереднього режиму:

$$u_C\left(0\right) = J \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}.$$

Отже

$$A = J \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}.$$

6. Таким чином, напруга на конденсаторі після розмикання ключа S змінюється за таким законом :

$$u_C\left(t\right) = J \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot e^{-t/\tau_P}.$$

7. Знаючи напругу на конденсаторі, визначаємо струм та напругу на інших елементах.

Струм в електричному колі:

$$i = i_C = C\frac{du_C}{dt} = -J \cdot \frac{R_1 R_2}{\left(R_1 + R_2\right)} \cdot \frac{1}{\left(R_2 + R_3\right)} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_P}}.$$

Знак мінус говорить про те, що реальний напрямок струму буде протилежний до вказаного на рис.

Напругу на резисторах R_2 та R_3 знаходимо відповідно як iR_2 та iR_3.

Розрахунок перехідного процесу операторним методом

Замикання ключа

1. Переходимо до операторної схеми заміщення:

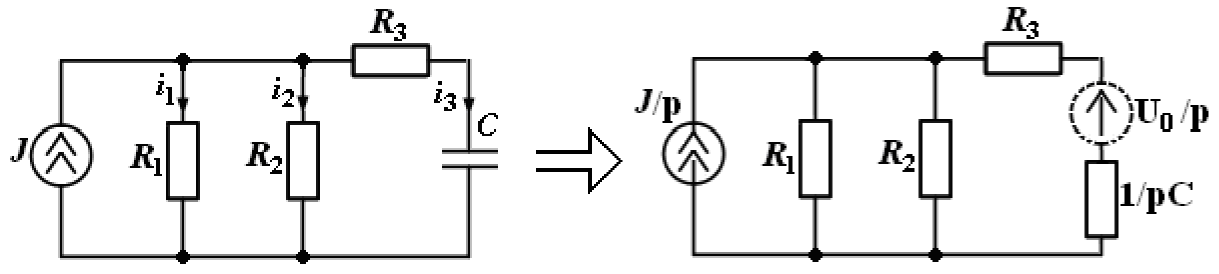

Рис. 6

Оскільки початкова напруга на конденсаторі у момент замикання ключа (t = 0) $u_C(0) = U_0 = 0$ в операторній схемі заміщення фактично відсутнє додаткове джерело напруги $\frac{U_0}{p}$.

2. Будемо шукати зображення напруги на конденсаторі як:

$$U_C(p) = I_3(p) \cdot \frac{1}{pC}.$$

3. Зображення струму $I_3(p)$ за методом чужого опору:

$$I_3(p) = \frac{J}{p} \cdot R_{12} \frac{1}{R_3 + pC + R_{12}},$$

де $R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$.

4. З урахуванням п. п. 2, 3 зображення напруги на конденсаторі :

$$U_C(p) = \frac{J}{p} \cdot \frac{R_{12}}{pC} \cdot \frac{1}{R_3 + \frac{1}{pC} + R_{12}} = \frac{J}{p} \cdot \frac{R_{12}}{pC\left(R_3 + R_{12}\right) + 1}.$$

5. Для знаходження оригіналу $u_C(t)$ скористаємося теоремою розкладання.

Вводимо позначення:

$$G(p) = J \cdot R_{12};$$
$$H(p) = p \cdot \left[pC(R_3 + R_{12}) + 1 \right] = p^2 \left[C(R_3 + R_{12}) \right] + p;$$
$$H'(p) = 2pC(R_3 + R_{12}) + 1.$$

Корені характеристичного рівняння $H(p) = 0$ будуть такими:

$$p_1 = 0; \;\; p_2 = -\frac{1}{C(R_3 + R_{12})}; \;\; \tau_3 = \frac{1}{p_2} = C(R_3 + R_{12}).$$

Відповідно до теореми розкладання:

$$u_C(t) = \sum_{k=1}^{2} \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} \cdot e^{p_k t} = \frac{JR_{12}}{2p_1 C(R_3 + R_{12}) + 1} \cdot e^{p_1 t} + \frac{JR_{12}}{2p_2 C(R_3 + R_{12}) + 1} e^{p_2 t} =$$
$$= JR_{12}\left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$

Враховуючи, що $R_{12} = \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$, одержаний вираз повністю співпадає з виразом, одержаним класичним методом.

6. Усі інші струми та напруги можна визначити в часовій області з використанням одержаної напруги $u_C(t)$, аналогічно класичному методу. Можна також спочатку з операторної схеми заміщення визначити операторні зображення відповідних струмів та напруг, а потім з використанням теореми розкладання визначити їх оригінали. Наприклад, зображення напруги на резисторі R_3:

$$U_{R_3}(p) = I_3(p) \cdot R_3.$$

Зображення напруги на резисторах R_1 та R_2:

$$U_{R_{12}}(p) = I_3(p) \cdot \left(R_3 + \frac{1}{pC} \right) \text{ і т.д.}$$

Розмикання ключа

1. Операторна схема заміщення представлена на рис. 7.

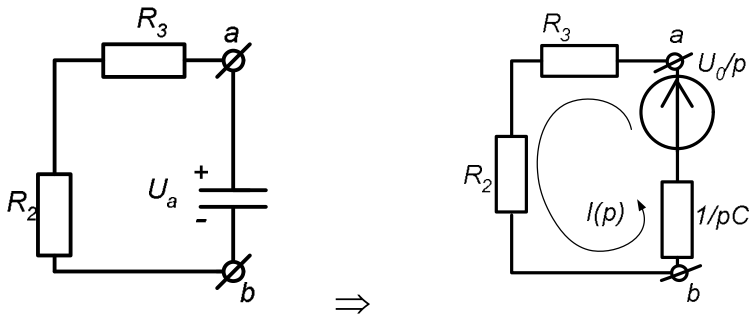

Рис. 7

У момент розмикання ключа на конденсаторі C була початкова напруга U_0, яка дорівнює усталеній напрузі попереднього режиму $U_0 = J \cdot R_{12}$.

2. Зображення струму, що виникає в колі після розмикання ключа :

$$I(p) = \frac{U_0}{p} \cdot \frac{1}{R_2 + R_3 + \dfrac{1}{pC}} = \frac{U_0 \cdot C}{pC(R_2 + R_3) + 1}.$$

3. Зображення напруги на конденсаторі C, це є зображення напруги між точками a та b:

$$U_C(p) = \frac{U_0}{p} - I(p) \cdot \frac{1}{pC} = \frac{U_0}{p} - \frac{U_0}{p\left[pC(R_2 + R_3) + 1\right]}.$$

4. Для знаходження оригіналу $u_C(t)$ скористаємося теоремою розкладання. Оскільки зображення напруги $U_C(p)$ є сумою двох складових, теорему розкладання треба було б застосувати до кожної складової окремо. Однак зображення першої складової є табличним, тобто $\frac{U_0}{p} \doteqdot U_0$.

Отже теорему розкладання застосуємо тільки для другої складової.

Вводимо позначення :

$$G(p) = U_0;$$
$$H(p) = p\left[pC(R_2 + R_3) + 1\right] = p^2 C(R_2 + R_3) + p;$$
$$H'(p) = 2pC(R_2 + R_3) + 1.$$

Корені характеристичного рівняння $H(p) = 0$ будуть такими :

$$p_1 = 0; \qquad p_2 = -\frac{1}{C(R_2 + R_3)}; \qquad \tau_P = \frac{1}{p_2} = C(R_2 + R_3).$$

Відповідно до теореми розкладання:

$$u_C(t) = U_0 - \sum_{k=1}^{2} \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} \cdot e^{p_k t} =$$

$$= U_0 - \frac{U_0}{2p_1 C(R_2 + R_3) + 1} \cdot e^{p_1 t} - \frac{U_0}{2p_2 C(R_2 + R_3) + 1} \cdot e^{p_2 t} = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_p}}$$

Враховуючи, що $U_0 = J \cdot \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$ запишемо остаточний вираз:

$$u_C = J \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_p}},$$

який співпадає з одержаним класичним методом.

Таким чином, результати одержані класичним та операторним методом повністю співпадають. Після одержання результатів у загальному вигляді, підставляємо чисельні значення параметрів елементів, розраховуємо параметри перехідного процесу і будуємо графіки.

Основні параметри перехідного процесу

Параметр / Стан ключа S	τ, формула	τ, чисельне значення	τ_p, тривалість перехідного процесу ($t_{\text{ПП}} \approx 3\tau$)
Замкнений	$\tau_3 = C(R_3 + R_{12})$	$0.1 \cdot 10^{-3} c$	$0.3 \cdot 10^{-3} c$
Розімкнений	$\tau_P = C(R_2 + R_3)$	$0.15 \cdot 10^{-3} c$	$0.45 \cdot 10^{-3} c$