## *§ 2. Невласні інтеграли*

1. *Невласними інтегралами* називаються:

   1) інтеграли з нескінченними межами;

   2) інтеграли від розривної функції або від функції, необмеженої у точках відрізку інтегрування.

2. Невласні інтеграли від функції $f(x)$ з необмеженими межами розглядають так:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty} \int_c^b f(x)dx.$$

Якщо вказані границі існують (будуть скінченними числами), то відповідний інтеграл називається *збіжним* і він дорівнює своїй границі.

Якщо якась границя не існує або дорівнює нескінченності, то інтеграл називається *розбіжним*.

3. У випадку необмеженої на $[a;b]$ функції $f(x)$ її точки розриву можуть бути на лівому кінці або на правому кінці, або всередині проміжку інтегрування $[a;b]$. Тоді невласні інтеграли визначають так:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx,$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx,$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1\to0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2\to0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx.$$

Якщо вказані границі існують, то відповідний інтеграл називається *збіжним*. У протилежному випадку інтеграл називається *розбіжним*.

∢ **Задача 1**. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$.

*Розв'язування.* На основі означення невласного інтеграла знаходимо:

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{b}x^{-2}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{1}^{b}=-\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{b}-1\right)=1\,.$$

Оскільки границя існує і дорівнює 1, то заданий невласний інтеграл збігається і дорівнює 1.

∢ **Задача 2**. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{2-x}$.

*Розв'язування.* Якщо $x\to 2$, підінтегральна функція $\frac{1}{2-x}\to+\infty$. Точка $x=2$ – точка розриву.

Тому

$$\int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{2-x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0}^{2-\varepsilon}\frac{dx}{2-x}=\lim_{\varepsilon\to 0}[-\ln(2-x)]\Big|_{0}^{2-\varepsilon}=$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to 0}[\ln(2-2+\varepsilon)-\ln 2]=-\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\varepsilon+\ln 2=+\infty.$$

Заданий невласний інтеграл розбіжний.

* *

*