

ТЕМА 9. Моделі парної регресії та їх економетричний аналіз (парний кореляційно-регресійний аналіз)

Частина 2. Однофакторні нелінійні економетричні моделі

План

9.4. Специфікація моделі

9.5. Побудова однофакторної економетричної моделі

9.6. Коефіцієнт еластичності

9.4. Специфікація моделі

Економетрична модель – це функція чи система функцій, що описує кореляційно-регресійний зв'язок між економетричними показниками, один чи кілька з яких є залежною змінною, інші – незалежними.

Незалежні змінні моделі називаються пояснюючими, наперед заданими змінними. Залежні змінні називаються пояснювальними змінними.

Специфікація моделі – це аналітична форма економетричної моделі. Специфікація моделі може здійснюватись за допомогою різних видів функцій, які можуть бути застосовані для вивчення взаємозв'язків, а саме:

1) лінійної функції:

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^m a_j x_j + u, \quad (9.33)$$

2) степеневої функції:

$$y = a_0 \cdot \prod_{j=1}^m a_j x_j + u \quad (9.34)$$

та ін.

При цьому в процесі такого дослідження можна кілька разів повертатись до етапу специфікації моделі, уточнюючи перелік незалежних змінних та вид функції, що застосовується.

Специфікація моделі передбачає також добір факторів (чинників) для економічного дослідження. Адже коли вид функції та її складові не відповідають реальним залежностям, то йдеться про помилки специфікації.

Помилки специфікації моделі можуть бути трьох видів:

1) ігнорування істотної пояснюючої змінної при побудові економетричної моделі;

2) введення до моделі незалежної змінної, яка не стосується вимірюваного зв'язку;

3) використання невідповідних математичних форм залежності.

Перша з цих помилок призводить до зміщення оцінок, причому зміщення буде тим більшим, чим більша кореляція між введеними та не введеними до моделі змінними, а напрям залежить від знаку оцінок параметрів при введених змінних і від

характеру кореляції між введеними та не введеними змінними. Оцінки параметрів також будуть зміщеними (у такому разі вони вищі), тому можуть бути хибні висновки щодо значень параметрів генеральної сукупності.

Друга помилка специфікації. Якщо до моделі вводиться змінна, яка неістотно впливає на залежну змінну, то на відміну від першої помилки специфікації оцінки параметрів моделі не будуть зміщеними. Причому, за допомогою звичайних процедур можна отримати також не зміщені оцінки дисперсій цих параметрів. Але це не означає, що економетричну модель можна беззастережно розширювати за рахунок «неістотних» змінних. По-перше, існує ненульова ймовірність того, що в результаті використання вибірових даних змінна, яка зовсім не стосується моделі, покаже істотний зв'язок із залежною змінною. А це означає, що кількісний зв'язок між змінними буде виміряний неправильно.

Третя помилка специфікації. Припускається, що залежна змінна є лінійною функцією від деякої пояснювальної змінної, тоді як насправді тут краще підійшла б квадратична, кубічна чи якась поліноміальна залежність вищого порядку. У цьому разі наслідки такі самі, як і при першій помилці, тобто оцінки параметрів моделі матимуть зміщення. Питання про вибір найкращої форми залежності має базуватись на перевірці ступеня узгодженості виду функції з вихідними даними спостережень.

Адекватність побудованої моделі можна встановити, аналізуючи залишки моделі. Вони обчислюються як різниці між фактичними значеннями залежної змінної і обчисленими за моделлю. Перевірити розподіл залишків на невинпадковість їх характеру можна за критерієм Дарбіна-Уотсона. Тоді перевірка моделі на існування автокореляції першого порядку аналогічна перевірці того, наскільки вдало вибрано форму економетричної моделі.

9.5. Побудова однофакторної економетричної моделі

Зв'язки між економічними явищами часто бувають нелінійними. Наприклад, зв'язок між собівартістю зерна і врожайністю має вид гіперболи, зв'язок між фондівдачею основних засобів і коефіцієнтом використання виробничих потужностей являє собою параболу, зв'язок між витратами на харчування (в перерахунку на одну споживчу одиницю) і кількістю дітей у сім'ї виражається степеневим рівнянням.

В економетричних дослідженнях досить часто використовуються такі нелінійні моделі:

$$\text{гіпербола: } y = a_0 + a_1 \frac{1}{x} + u;$$

$$\text{показникова функція: } y = a_0 + a_1^x + u;$$

$$\text{напівлогарифмічна функція: } y = a_0 + a_1 \cdot \ln x + u;$$

$$\text{логарифмічна функція: } \ln y = a_0 + a_1 \cdot x + u;$$

парабола: $y = a_0 + a_1 \cdot \sqrt{x} + u$, $y = a_0 + a_1 \cdot x^2 + u$, $y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + u$;

степенева функція: $y = a_0 \cdot x^{a_1} + u$.

Для вивчення нелінійних зв'язків необхідно перетворити криву регресії в функцію, яка лінійна відносно параметрів a_0 і a_1 , тобто провести лінеаризацію рівняння регресії. Тобто, у випадках, коли функція є нелінійною (але не поліномом), її зводять до лінійної, наприклад шляхом логарифмування та наступної заміни нелінійних змінних на лінійні (заміни в залежності від виду функції).

Метод приведення нелінійної функції до лінійного виду називають **лінеаризацією** рівняння регресії.

Розглянемо методику лінеаризації наведених вище функцій:

1. Якщо $y = a_0 + a_1 \frac{1}{x}$ то заміною аргументу $x' = \frac{1}{x}$ зводимо рівняння до виду

$$y = a_0 + a_1 \cdot x'.$$

2. Якщо $y = a_0 \cdot a_1^x$, то логарифмуючи це рівняння, отримуємо $\ln y = \ln a_0 + x \cdot \ln a_1$. Заміною змінних $y' = \ln y$, $a'_0 = \ln a_0$ та $a'_1 = \ln a_1$ отримуємо $y' = a'_0 + a'_1 \cdot x$.

3. У випадку $y = a_0 + a_1 \cdot \ln x$, приймаючи $x' = \ln x$, отримуємо лінеаризовану функцію $y = a_0 + a_1 \cdot x'$.

4. Якщо $y = a_0 + a_1 \cdot x^2$ чи $y = a_0 + a_1 \cdot \sqrt{x}$, то заміною $x' = \sqrt{x}$ або $x' = x^2$ зведемо їх до лінійної функції.

5. Для функції $\ln y = a_0 + a_1 \cdot x$ робимо заміну $y' = \ln y$ і отримуємо лінійну економетричну модель $y' = a_0 + a_1 \cdot x$.

6. Степеневу функцію виду $y = a_0 x^{a_1}$ можна привести до лінійного виду шляхом логарифмування лівої і правої частини рівняння:

$$\ln y = \ln a_0 + a_1 \ln x.$$

Зробивши заміну нелінійних величин на лінійні $y' = \ln y$, $a'_0 = \ln a_0$, $x' = \ln x$, отримаємо лінійну модель: $y' = a'_0 + a_1 \cdot x'$.

Параметри цієї моделі можна знайти, розв'язавши лінеаризовану систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} n \cdot \ln a_0 + a_1 \cdot \sum_{i=1}^n \ln x_i = \sum_{i=1}^n \ln y_i \\ \ln a_0 \cdot \sum_{i=1}^n \ln x_i + a_1 \cdot \sum_{i=1}^n (\ln x_i)^2 = \sum_{i=1}^n \ln y_i \cdot \ln x_i \end{cases} \quad (9.35)$$

$$a'_0 = \exp(\ln a_0).$$

Такими ж методами можна лінеаризувати інші нелінійні функції. Графіки та системи рівнянь найбільш уживаних функцій зростання наведені у Додатку А.

Алгоритм побудови однофакторної економетричної моделі

1. Побудова концептуальної моделі.

Передбачає встановлення причинно-наслідкового зв'язку між соціально-економічними досліджуваними показниками.

2. Ідентифікація змінних та специфікація моделі.

Процес ідентифікації передбачає визначення факторів X (факторних, незалежних, екзогенних змінних) та Y (результативна, залежна, ендогенна).

Побудова поля кореляції (діаграми розсіювання) та емпіричної лінії регресії. Вибір форми зв'язку. Лінеаризація моделі у випадку її нелінійності.

3. Оцінювання параметрів моделі методом 1 МНК.

Розрахунок параметрів лінійної або лінеаризованої моделі a_0 та a_1 шляхом розв'язання системи нормальних рівнянь.

4. Оцінювання напряму та щільності кореляційного зв'язку.

Розрахунок середніх дисперсій та середньоквадратичних відхилень для змінних x та y і визначення тісноти зв'язку між ними.

Для оцінки тісноти лінійного зв'язку обчислюють коефіцієнт кореляції Пірсона (формули (9.7), (9.9), (9.10)), а для оцінки нелінійного кореляційного зв'язку використовують так зване кореляційне відношення, яке обчислюється за формулою:

$$\eta_{xy} = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (9.36)$$

де y_i – фактичні (емпіричні, поточні) значення результативного показника; $\hat{y}_i$ – теоретичні (розрахункові) значення результативного показника; $\bar{y}$ – середнє значення y .

Величина кореляційного відношення знаходиться в межах $0 \leq \eta_{xy} \leq 1$. У випадку функціонального зв'язку $\eta_{xy} = 1$. Якщо кореляційний зв'язок відсутній, то $\eta_{xy} = 0$. Однак, значення $\eta_{xy} = 0$ не свідчить про відсутність причинної залежності між економічними явищами.

У випадку, коли $\eta_{xy} > |r|$ крива лінія точніше апроксимує залежність, ніж пряма. Для лінійної форми зв'язку виконується умова $\eta_{xy} = |r|$. Чим ближче η_{xy} до 1, тим точніше нелінійна залежність апроксимує зв'язок між корельованими величинами.

Теоретично показники η_{yx} та η_{xy} рівнозначні, але $\eta_{xy} = \eta_{yx}$ лише у випадку лінійної залежності. В цьому випадку $\eta_{xy} = \eta_{yx} = r_{xy} = r_{yx}$

В усіх інших випадках, тобто при нелінійній залежності $\eta_{xy} \neq \eta_{yx}$, коефіцієнт кореляції по абсолютній величині менший за найменше із цих двох кореляційних відношень.

У практичній діяльності нас зазвичай цікавить тільки одне із кореляційних відношень, а саме: кореляційне відношення між фактором, прийнятим за функцію, і фактором, прийнятим за аргумент.

З метою якісного тлумачення числових значень коефіцієнта кореляції Пірсона (r_{xy}) і кореляційного відношення (η_{xy}) використовують таку шкалу:

$ r_{xy} , \eta_{xy}$	Якісна оцінка щільності зв'язку
0-0,1	зв'язок відсутній
0,1-0,3	зв'язок слабкий
0,3-0,5	зв'язок помірний
0,5-0,7	зв'язок відчутний
0,7-0,9	зв'язок щільний
0,9-1	зв'язок дуже щільний

На співвідношеннях між η_{xy} і r_{xy} можемо побудувати критерій криволінійності зв'язку між змінними y і x . Спрощена формула такого ряду критерію має такий вигляд:

$$K = \frac{\sqrt{n}}{0,67449} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\eta^2 - r^2} \quad (9.37)$$

Якщо значення обчисленого $K > 2,5$, то кореляційний зв'язок можна вважати криволінійним.

5. Оцінка значущості коефіцієнта парної кореляції r_{xy} (кореляційного відношення η_{xy}) та розрахунок його довірчих меж.

Оскільки статистика як метод дослідження має справу з даними, в яких досліджувані аналітиком закономірності створені різними випадковими факторами, тому більшість статистичних досліджень супроводжується перевіркою деяких припущень або гіпотез про джерела цих даних.

Основне перевірочне припущення називається **нульовою гіпотезою** і переважно формулюється як відсутність різниць, відсутність впливу фактору, рівність нулю значень вибірових характеристик тощо.

Друге перевірочне припущення (не завжди строго протилежне або обернене першому) називається **конкуруючою або альтернативною гіпотезою**.

При перевірці статистичних гіпотез можливі помилки (помилкові тлумачення) двох видів:

- можна відкинути нульову гіпотезу, коли вона насправді правильна (помилка першого роду);
- можна прийняти нульову гіпотезу, коли вона насправді не правильна (помилка другого роду).

Питання відносно перевірки гіпотез розглянемо з двох позицій. По-перше, можемо припустити, що спочатку формулюється гіпотеза, а мета дослідження полягає у виявленні її можливого використання.

У цьому випадку виникає завдання перевірки гіпотези на значущість. По-друге, ми можемо спочатку провести експеримент і потім визначити, які із теоретичних гіпотез відповідають результатам дослідження, що призведе до побудови довірчих інтервалів.

Теорія перевірки гіпотез займається розвитком методів або процедур для вирішення питання стосовно нульової гіпотези. Існує два взаємно доповнюючих один одного підходи для розробки таких правил: 1) перевірка значимості (значущості) та 2) довірчі інтервали.

1) Перевірка значимості r_{xy} та η_{xy}

Для статистичного висновку про наявність або відсутність кореляційного зв'язку між досліджуваними змінними необхідно провести перевірку рівня значущості вибіркового коефіцієнта кореляції. Використаний критерій для розв'язку задач такого типу ґрунтується на розподілі різних статистик і називається критерієм значущості.

Процедура перевірки значущості починається з формулювання нульової гіпотези H_0 . У загальному випадку вона полягає в тому, що між параметром вибірки і параметром генеральної сукупності немає ніяких суттєвих різниць. Альтернативна гіпотеза H_1 полягає в тому, що між цими параметрами є суттєві різниці. Наприклад, при перевірці наявності кореляції в генеральній сукупності нульова гіпотеза полягає в тому, що істинний коефіцієнт кореляції рівний нулю ($H_0: \rho = 0$). Якщо в результаті перевірки виявиться, що нульова гіпотеза неприйнятна, то вибіркового коефіцієнта кореляції r_{xy} значно відрізняється від нуля (нульова гіпотеза відкидається і приймається альтернативна H_1). Іншими словами, припущення відносно некорельованості випадкових змінних в генеральній сукупності треба признати необґрунтованим. І навпаки, якщо на основі критерію значущості нульова гіпотеза приймається, тобто r_{xy} міститься в допустимій зоні випадкового розсіювання, тоді немає підстави вважати сумнівним припущення відносно некорельованості змінних у генеральній сукупності.

При перевірці значущості встановлюють значення її рівня α , який дає певну впевненість в тому, що помилкові висновки можуть бути нечасто. Рівень значущості виражає ймовірність того, що нульова гіпотеза H_0 відкидається тоді,

коли вона насправді є правильною. Зрозуміло, що має сенс вибрати ймовірність якомога меншою.

Перевіряючи значущість коефіцієнта парної кореляції, встановлюють наявність або відсутність кореляційного зв'язку між досліджуваними явищами. При відсутності зв'язку коефіцієнт кореляції генеральної сукупності рівний нулю ($\rho = 0$). Процедура перевірки гіпотези починається з формулювання нульової та альтернативної гіпотез:

H_0 : різниця між вибіркоvim коефіцієнтом кореляції r і $\rho = 0$ є незначною;

H_1 : різниця між r і $\rho = 0$ значна і, як наслідок, між змінними y і x є суттєвий зв'язок.

Вибірковий коефіцієнт кореляції, розрахований на основі вибірових даних, є точковою оцінкою коефіцієнта кореляції, і в свою чергу, є випадковою величиною. Тому, доцільно виконати перевірку гіпотези про відсутність кореляційного зв'язку, тобто перевіряється нульова гіпотеза $H_0 : r_{xy}=0$ і альтернативна гіпотеза $H_1 : r_{xy} \neq 0$.

Отже, у випадках незначного обсягу вибірки або при $|r| \leq 0,5$ необхідно здійснити статистичне тестування лінійного коефіцієнта кореляції Пірсона r_{xy} (для лінійних моделей) або кореляційного відношення η_{xy} (для нелінійних моделей) на значущість за t -критерієм Стюдента (псевдонім англійського статистика У.С. Госсета).

Послідовність перевірки коефіцієнта кореляції Пірсона r_{xy} на значущість:

1. Формулювання статистичних гіпотез.

Статистичні гіпотези сформулюємо наступним чином. Перевіримо нульову гіпотезу $H_0 : r_{xy}=0$ проти альтернативної гіпотези $H_1 : r_{xy} \neq 0$.

2. Обчислення фактичного (розрахункового, емпіричного) значення t -критерію за формулою:

$$t_{\text{розрах}} = \frac{|r_{xy}|}{\sigma_r} = r_{xy} \cdot \sqrt{\frac{n-m}{1-r_{xy}^2}} = r_{xy} \sqrt{\frac{k}{1-r_{xy}^2}} \quad (9.38)$$

3. Встановлення критичних (теоретичних, табличних) значень t -статистики з урахуванням рівня значущості α і ступеня свободи $k=n-m$ за таблицею t -розподілу (де n - обсяг вибіркової сукупності або кількість спостережень, m - кількість параметрів моделі). Таблицю значень t -статистики наведено в Додатку Б до лекції.

В соціально-економічних дослідженнях рівень значущості α зазвичай приймають рівним 0,05, тоді довірна ймовірність $p = 1-\alpha=0,95$. Рівень значущості $\alpha=0,05$ означає, що в 5% випадків ми можемо помилитися, а в 95% випадків наші висновки правильні.

Під терміном ступінь вільності (свободи) в економетрії розуміють число, яке показує, скільки незалежних елементів інформації зі змінних y_i ($i=1, \dots, n$) потрібно

для розрахунку даної суми квадратів. В кореляційному аналізі в п.п. 2.2 ми розглядали рівняння, яке пов'язує суми (формули (9.18), (9.19)):

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (9.18)$$

Або вираз (9.18) у скороченому вигляді:

$$TSS = ESS + RSS \quad (9.19)$$

Кожна із зазначених сум пов'язана зі ступенями вільності: для загальної суми квадратів TSS потрібно $(n-1)$ незалежних чисел, тобто ступенів вільності; для регресійної суми квадратів ESS ($k_1=m-1$) ступенів вільності; для залишкової суми квадратів RSS ($k_2=n-m$) ступенів вільності.

Для парної лінійної регресії ступень вільності $k=n-2$.

4. Перевірка умови $|t_{\text{розрах}}| > t_{\alpha, k}$.

Розраховане за формулою (9.38) значення $|t_{\text{розрах}}|$ порівнюють з його критичним (теоретичним, табличним) значенням при прийнятому рівні значущості α та числі ступенів свободи $k=n-m$:

– якщо умова виконується, то гіпотеза H_0 про нульове значення коефіцієнта кореляції у генеральній сукупності на рівні значущості α не підтверджується, відповідно коефіцієнт кореляції з ймовірністю $p=1-\alpha$ є статистично значущим. Тобто в генеральній сукупності існує лінійний зв'язок.

– якщо умова не виконується, то нульова гіпотеза H_0 на рівні значущості α приймається, коефіцієнт кореляції є статистично незначущим. Отже, в генеральній сукупності не існує лінійного зв'язку.

Перевірку значущості кореляційного відношення η_{xy} виконують аналогічно до перевірки значущості коефіцієнта кореляції r_{xy} . Єдина відмінність полягає в обчисленні характеристики $t_{\text{розрах}}$ – у формулі (9.38) замість значення коефіцієнта кореляції r_{xy} фігурує кореляційне відношення η_{xy} .

2) Надійні інтервали для r_{xy} та η_{xy}

Визначення надійних інтервалів для коефіцієнта парної кореляції (кореляційного відношення).

Для цього необхідно визначити граничну помилку коефіцієнту кореляції Δr .

$$\Delta r = \pm t_{\alpha, k} \cdot \sigma_r \quad (9.39)$$

де $t_{\alpha, k}$ – нормовані (табличні) значення t -критерію Стюдента, визначені з рівнем значущості α та числом ступенів вільності k ;

σ_r – дисперсія коефіцієнта парної кореляції, що визначається за формулою:

$$\sigma_r = \frac{1 - r^2}{\sqrt{n - m}} = \frac{1 - r^2}{\sqrt{k}} \quad (9.40)$$

Отже, довірчі межі коефіцієнта парної кореляції (кореляційного відношення) визначаються через оцінку дисперсії σ_r .

Таким чином, з довірчою ймовірністю $p=1-\alpha$ оцінка показника тісноти зв'язку r для генеральної сукупності буде знаходитись у межах:

$$\rho = r \pm t_{\alpha,k} \cdot \sigma_r \quad (9.41 \text{ А})$$

або

$$r - t_{\alpha,k} \cdot \sigma_r \leq \rho \leq r + t_{\alpha,k} \cdot \sigma_r \quad (9.41 \text{ Б})$$

6. Перевірка статистичної значущості оцінок параметрів моделі a_0 і a_1 та визначення їх надійних інтервалів.

1) Перевірка значимості (значущості) параметрів a_0 та a_1

Послідовність тестування за t-критерієм Стьюдента:

6.1. Формулюють і розглядають гіпотези:

$H_0 : a_j = 0$ ($j=0, 1$) – оцінка параметра незначуща;

$H_1 : a_j \neq 0$ ($j=0, 1$) – оцінка параметра значуща.

6.2. Обчислюють розрахункові значення t -критерію Стьюдента для параметрів a_0 та a_1 за формулами:

$$t_{a_0} = \frac{|a_0|}{\sigma_{a_0}}; \quad t_{a_1} = \frac{|a_1|}{\sigma_{a_1}}. \quad (9.42)$$

де σ_{a_0} – це стандартна помилка оцінки параметру a_0

$$\sigma_{a_0} = \sigma_u \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} \quad (9.43)$$

σ_{a_1} – це стандартна помилка оцінки параметру a_1

$$\sigma_{a_i} = \frac{\sigma_u}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} \quad (9.44)$$

корінь квадратний з дисперсії залишків (середньоквадратичне відхилення, середня похибка)

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n u_i^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2}} \quad (9.45)$$

6.3. Встановлення критичних (табличних) значень t -критерію з урахуванням рівня значущості $(1-\alpha)100\%$ і ступеня свободи $n-m$ за таблицею t -розподілу.

6.4. Перевірка умови $t_{a0}, t_{a1} \geq t_{\alpha,k}$

- якщо умова виконується, то t_{a0}, t_{a1} потрапляє у критичну область, нуль-гіпотеза відкидається і параметри a_0 та a_1 генеральної сукупності значущі;

- якщо умова не виконується, то t_{a0} , t_{a1} потрапляє в область значень, які відкидають, нуль-гіпотеза приймається, відповідні параметри є статистично незначущими.

2) Надійні інтервали для параметрів a_0 та a_1

Визначення інтервалів надійності для оцінок параметрів моделі за t -розподілом при рівні значущості 0,05.

Оцінка значущості довірчих границь параметрів a_0 та a_1 лінійної (лінеалізованої) функції $y = a_0 + a_1 \times x$. Спочатку знаходять граничні помилки коефіцієнтів регресії:

$$\Delta a_i = \pm t_{\alpha, k} \cdot \sigma_{a_i} \quad (9.46)$$

де $t_{\alpha, k}$ – нормовані (табличні) значення t -критерію Стюдента, визначені з рівнем значущості α та числом ступенів вільності k ;

σ_{a_i} – визначається за формулами (9.43) та (9.44).

Тоді, межі довірчих інтервалів становлять:

$$\tilde{a}_0 = a_0 \pm t_{\alpha, k} \cdot \sigma_{a_0}; \quad \tilde{a}_1 = a_1 \pm t_{\alpha, k} \cdot \sigma_{a_1} \quad (9.47)$$

де $t_{\alpha, k}$ – табличне значення t – критерію Стюдента при рівні значущості α та $k = n - m - 1$ степенях свободи.

Рівняння регресії для генеральної сукупності можна записати у вигляді:

$$\tilde{y} = (a_0 \pm t_{\alpha, k} \cdot \sigma_{a_0}) + (a_1 \pm t_{\alpha, k} \cdot \sigma_{a_1}) \cdot x \quad (9.48)$$

Зауваження: У підручнику Благун (Математичні методи в економіці) на с. 68 наведено рис., що надають геометричний зміст граничної помилки параметрів a_0 та a_1 .

7. Адекватність економетричної моделі статистичним даним оцінюється за F -критерієм Фішера. Під адекватністю економетричної моделі розуміють відповідність моделі статистичним даним, за якими вона побудована.

Тестування регресійної моделі на адекватність за F -критерієм Фішера здійснюють для перевірки наявності (відсутності) зв'язку між факторами у такій послідовності:

7.1. Формулюють і розглядають гіпотези:

Розглянемо гіпотезу $H_0 : a_1 = 0$ проти альтернативної $H_1 : a_1 \neq 0$. Це рівнозначно тому, що перевіряється значущість коефіцієнту детермінації r^2 (гіпотеза $H_0 : r^2 = 0$, проти альтернативної $H_1 : r^2 \neq 0$).

$H_0 : a_1 = 0$ – оцінка параметра незначуща;

$H_1 : a_1 \neq 0$ – оцінка параметра значуща.

7.2. Знаходимо розрахункове (фактичне) значення F -критерію Фішера за формулою:

$$F_p = \frac{\delta_y^2}{\sigma_u^2}, \quad (9.49)$$

де

$$\delta_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{m} \quad \sigma_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-m-1} \quad (9.50)$$

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{n-m-1} \cdot \sum_{i=1}^n u_i^2 = \frac{1}{n-m-1} \cdot \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \quad (9.51)$$

$$\delta_y^2 = \frac{1}{m-1} \cdot \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \quad (9.52)$$

n – кількість дослідів (спостережень); m – кількість факторів, включених у модель.

На практиці при розрахунку F – статистики часто суму $\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$ замінюють різницею (див. формули (9.18) та (9.19)).

Оскільки

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2,$$

то

$$\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 - \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

Тоді формула розрахунку фактичного значення F –критерію Фішера буде мати вигляд:

$$F_p = \frac{\sigma_y^2 - \sigma_u^2}{\sigma_u^2}.$$

або

$$F_p = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 / (m-1)}{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 / (n-m-1)} : \quad (9.52)$$

або

$$F_p = \frac{MSE}{MSR} = \frac{n-m}{m-1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}$$

7.3. Задаємо рівень значущості $(1-\alpha)100\%$ і обчислюємо ступені свободи $k_1=m-1, k_2=n-m$.

7.4. За таблицею розподілу функції Фішера з урахуванням значень α , k_1 , k_2 . знаходимо табличне значення F_{α,k_1,k_2} (див. Додаток В в лекції).

7.5. Отримане розрахункове значення порівнюється з табличним. Перевіряємо виконання умови $F_p > F_{\alpha,k_1,k_2}$:

- якщо умова виконується, то вважається, що економетрична модель є адекватною з ймовірністю $p=1-\alpha$ існуючому зв'язку між ознаками x , y (лінійна форма зв'язку підтверджується);
- якщо умова не виконується, то з ймовірністю p розглянуту парну лінійну регресію не можна вважати адекватною (лінійна форма зв'язку не підтверджується).

Тестування за критерієм Фішера дає змогу перевірити базову (нульову) гіпотезу ($H_0 : a_j=0$ ($j=0, 1$)) проти альтернативної ($H_1 : a_j \neq 0$ ($j=0, 1$)) з метою отримання відповіді на питання щодо кращого шляху апроксимації даних – за середнім значенням $\hat{y}_i = \bar{y}$, чи за регресійною моделлю $\hat{y}_i = a_0 + a_1 \cdot x$, де $a_1 \neq 0$.

8. Оцінка довірчих границь базисних середніх значень $\hat{y}_i$ та довірчих зон рівняння регресії. Для цього визначаємо довірчі границі для кожного базисного значення при заданому рівні значимості за формулою:

$$\Delta y_i = \frac{t_{\alpha,k} \cdot \sigma_u}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1 + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sigma_x^2}}. \quad (9.53)$$

Тоді оцінка кожного базисного середнього складе:

$$\tilde{y}_i = \hat{y}_i \pm \Delta y_i. \quad (9.52)$$

З'єднавши на графіку плавною лінією усі значення $\max \tilde{y}_i = \hat{y}_i + \Delta y_i$ та відповідно $\min \tilde{y}_i = \hat{y}_i - \Delta y_i$, отримаємо так звану довірчу зону рівняння регресії.

9. Визначення середнього значення прогнозу, його довірчої границі та зони.

Середнє значення прогнозу показника y_p визначаємо методом математичної екстраполяції шляхом підстановки в економетричну модель замість x його відносного прогнозного значення x_p . Такий метод прогнозування називається *методом математичної екстраполяції*, а прогнозне значення результативного показника – *точковим прогнозом*.

Для знаходження інтервального прогнозу розраховують його довірчі межі за формулою:

$$\Delta y_p = t_{\alpha,k} \cdot \frac{\sigma_u}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_p - \bar{x})^2}{\sigma_x^2}}. \quad (9.54)$$

Похибку прогнозу оцінюють за формулою:

$$\Delta y_p = \pm t_{\alpha, k} \cdot \frac{\sigma_u}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_p - \bar{x})^2}{\sigma_x^2}} \quad (9.54)$$

Прогноз («істинне» значення прогнозу) буде знаходитись у межах

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_p &= \hat{y}_p \pm \Delta y_p \\ \text{або} \\ \hat{y}_i - \Delta \hat{y}_i &\leq \tilde{y}_i \leq \hat{y}_i + \Delta \hat{y}_i. \end{aligned} \quad (9.55)$$

При щільній кореляції (більше 0,75) прогнозні значення можуть бути прийняті у бізнес-плануванні результативного показника на найближчу перспективу. При цьому слід пам'ятати, що чим даліше від базисних показників взято прогнозне значення фактору x_p , тим менш надійний прогноз, тим більша імовірність значного відхилення від середнього розрахункового значення, тобто довірча зона прогнозування розширюється.

9.6. Коефіцієнт еластичності

Аналіз економетричної моделі буде вважатись неповним, якщо не будуть розраховані коефіцієнти еластичності. У випадку лінійної парної регресії коефіцієнт еластичності визначається за формулою:

$$KE = a_1 \cdot \frac{\bar{x}}{\bar{y}} \quad (9.56)$$

де a_1 – параметр економетричної моделі;

$\bar{x}, \bar{y}$ – середні значення ознак x та y .

При граничному переході для «миттєвих» змін аргументу x , коефіцієнт еластичності для функції $y=f(x)$ обчислюється за формулою:

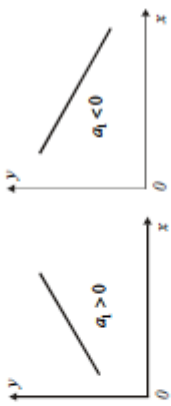
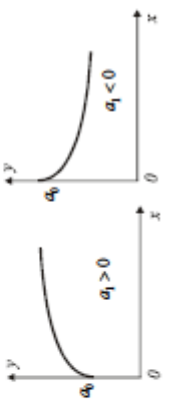
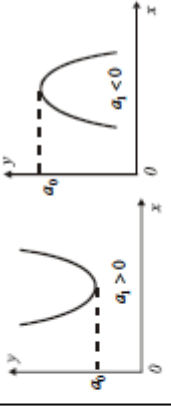
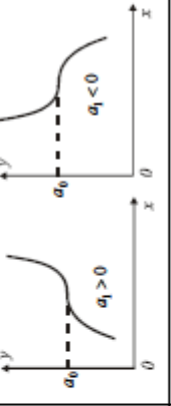
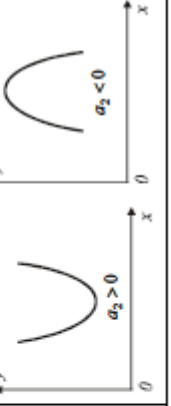
$$KE = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)}. \quad (9.57)$$

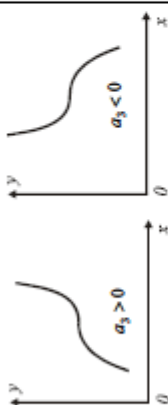
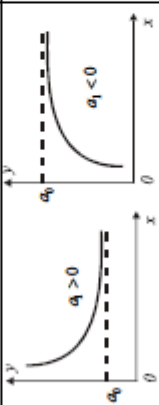
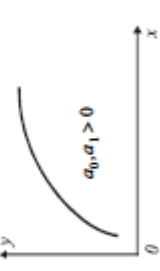
Коефіцієнт еластичності показує: на скільки відсотків в середньому зміниться результативний показник y , якщо незалежна змінна x зміниться на 1%. Коефіцієнт еластичності доцільно розраховувати у випадках, коли змінні x та y мають різні одиниці виміру.

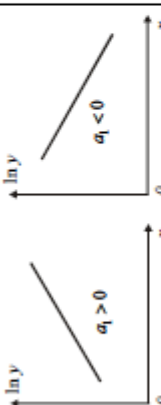
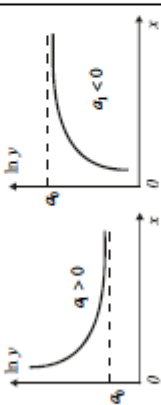
Формули розрахунку коефіцієнтів еластичності для різних функцій представлено у таблиці

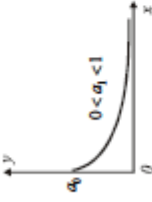
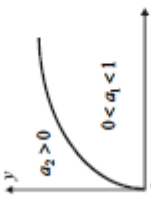
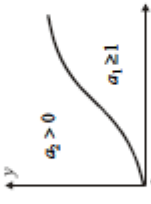
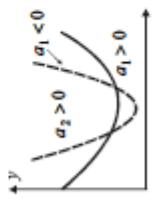
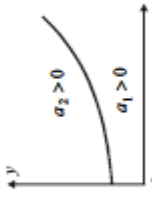
Вид рівняння регресії	Частинний коефіцієнт еластичності
1	2
1 $y = a_0 + a_1x$	$KE = a_1 \frac{\bar{x}}{\bar{y}}$
2 $y = a_0 \cdot x^{a_1}$	$KE = a_1$
3 $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$	$KE = \frac{x(a_1 + 2a_2x)}{a_0 + a_1x + a_2x^2}$
4 $y = a_0 + \frac{a_1}{x}$	$KE = -\frac{a_1}{a_1 + a_0x}$
5 $y = a_0 + a_1 \ln x$	$KE = x \ln a_1$
6 $y = a_0 + a_1 \cdot e^x$	$KE = \frac{a_1 x e^x}{a_1 e^x + a_0}$
7 $y = a_0 + a_1 \sqrt{x}$	$KE = \frac{a_1 x}{2a_1 x + 2a_0 \sqrt{x}}$
8 $y = a_0 + a_1 x^2$	$KE = \frac{2a_1 x^2}{a_1 x^2 + a_0}$
9 $y = a_0 + a_1 x^3$	$KE = \frac{3a_1 x^3}{a_1 x^3 + a_0}$
10 $y = \frac{1}{a_0 + a_1 x}$	$KE = -\frac{a_1 x}{a_1 x + a_0}$
11 $y = \frac{1}{a_0 + a_1 e^{-x}}$	$KE = \frac{a_1 x}{a_1 + a_0 e^{-x}}$
12 $y = a_0 \cdot a_1^x$	$KE = x \ln a_1$
13 $y = \frac{e^{a_1}}{a_0 x}$	$KE = -\frac{a_1}{x}$
14 $y = a_0 \cdot e^{a_1 x}$	$KE = a_1 x$
15 $y = a_0 \cdot x^{a_1 x}$	$KE = a_1 x (\ln + 1)$
16 $y = \frac{x}{a_0 + a_1 x}$	$KE = \frac{a_0}{a_0 + a_1 x}$

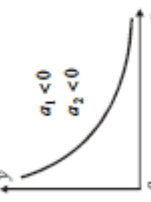
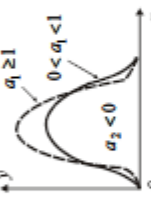
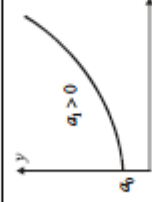
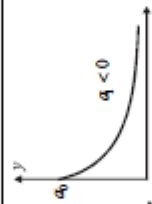
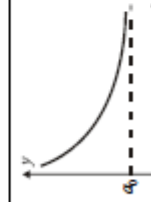
Функції зростання

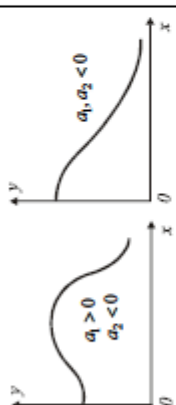
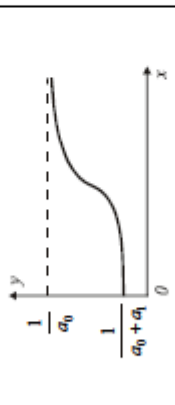
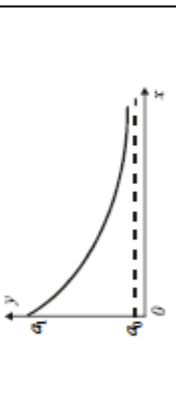
Вид рівняння регресії	Схематичний графік	Формула лінійної зв'язі	Системи нормальних рівнянь по методу найменших квадратів
1	2	3	4
$y = a_0 + a_1 x$			$\begin{cases} nx_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i x_i \end{cases}$
$y = a_0 + a_1 \sqrt{x}$		$\begin{cases} X = \sqrt{x} \\ Y = y \end{cases}$	$\begin{cases} nx_0 + a_1 \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} + a_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \sqrt{x_i} \end{cases}$
$y = a_0 + a_1 x^2$		$\begin{cases} X = x^2 \\ Y = y \end{cases}$	$\begin{cases} nx_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^4 = \sum_{i=1}^n y_i x_i^2 \end{cases}$
$y = a_0 + a_1 x^3$		$\begin{cases} X = x^3 \\ Y = y \end{cases}$	$\begin{cases} nx_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^6 = \sum_{i=1}^n y_i x_i^3 \end{cases}$
$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$		$\begin{cases} X_1 = x \\ X_2 = x^2 \\ Y = y \end{cases}$	$\begin{cases} nx_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 = \sum_{i=1}^n y_i x_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 = \sum_{i=1}^n y_i x_i^2 \end{cases}$

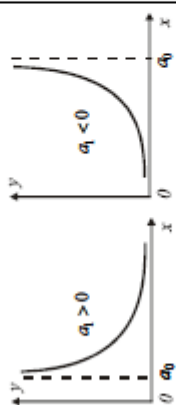
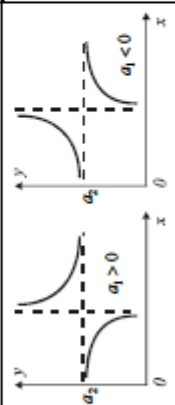
$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$		$X_1 = x,$ $X_2 = x^2,$ $X_3 = x^3$ $Y = y$	$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_3 \sum_{i=1}^n x_i^3 = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_3 \sum_{i=1}^n x_i^4 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 + a_3 \sum_{i=1}^n x_i^5 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^4 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^5 + a_3 \sum_{i=1}^n x_i^6 = \sum_{i=1}^n x_i^3 y_i \end{cases}$
$y = a_0 + \frac{a_1}{x}$		$X = \frac{1}{x},$ $Y = y$	$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} + a_1 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i} \end{cases}$
$y = a_0 + a_1 \ln x$		$X = \ln x,$ $Y = y$	$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^n \ln x_i = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n \ln x_i + a_1 \sum_{i=1}^n (\ln x_i)^2 = \sum_{i=1}^n y_i \ln x_i \end{cases}$

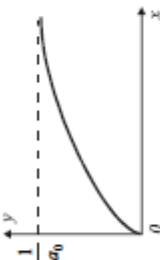
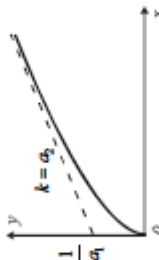
$\ln y = a_0 + a_1 x$		$X = x,$ $Y = \ln y$	$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \ln y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i \ln y_i \end{cases}$
$\ln y = a_0 + \frac{a_1}{x}$		$X = \frac{1}{x},$ $Y = \ln y$	$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^n \ln y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} + a_1 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\ln y_i}{x_i} \end{cases}$
$y = a_0 x^a$		$X = \ln x,$ $Y = \ln y$	$\begin{cases} n \ln a_0 + a_1 \sum_{i=1}^n \ln x_i = \sum_{i=1}^n \ln y_i \\ \ln a_0 \sum_{i=1}^n \ln x_i + a_1 \sum_{i=1}^n (\ln x_i)^2 = \sum_{i=1}^n \ln y_i \ln x_i \end{cases}$

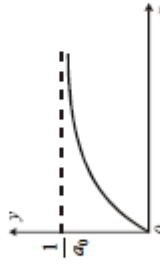
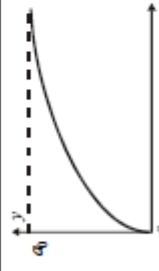
$y = a_0 \cdot a_1^x$	 	$X = x,$ $Y = \ln y$	$\begin{cases} n \ln a_0 + \ln a_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \ln y_i \\ \ln a_0 \sum_{i=1}^n x_i + \ln a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i \ln y_i \end{cases}$
$y = a_0 \cdot x^{a_1} \cdot e^{a_2 x}$	   	$X_1 = x,$ $X_2 = \ln x,$ $Y = \ln y$	$\begin{cases} n \ln a_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n \ln x_i = \sum_{i=1}^n \ln y_i \\ \ln a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i \ln x_i = \sum_{i=1}^n x_i \ln y_i \\ \ln a_0 \sum_{i=1}^n \ln x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i \ln x_i + a_2 \sum_{i=1}^n (\ln x_i)^2 = \sum_{i=1}^n \ln x_i \ln y_i \end{cases}$

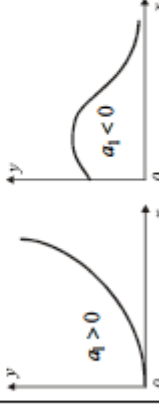
	 		
$y = a_0 e^{a_1 x}$	 	$X = x,$ $Y = \ln y$	$\begin{cases} n \ln a_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \ln y_i \\ \ln a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i \ln y_i \end{cases}$
$y = a_0 \cdot e^{\frac{a_1}{x}}$	 	$X = \frac{1}{x},$ $Y = \ln y$	$\begin{cases} n \ln a_0 + a_1 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^n \ln y_i \\ \ln a_0 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} + a_1 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\ln y_i}{x_i} \end{cases}$

$y = a_0 \cdot e^{a_1 x + a_2 x^2}$		$X_1 = x,$ $X_2 = x^2,$ $Y = \ln y$	$\begin{cases} n \ln a_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n \ln y_i \\ \ln a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 = \sum_{i=1}^n x_i \ln y_i \\ \ln a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \ln y_i \end{cases}$
$y = \frac{1}{a_0 + a_1 e^{-x}}$		$X = e^{-x},$ $Y = \frac{1}{y}$	$\begin{cases} n a_0 + a_1 \sum_{i=1}^n e^{-x_i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i} \\ a_0 \sum_{i=1}^n e^{-x_i} + a_1 \sum_{i=1}^n (e^{-x_i})^2 = \sum_{i=1}^n \frac{e^{-x_i}}{y_i} \end{cases}$
$y = a_0 + a_1 \cdot e^{-x}$		$X = e^{-x},$ $Y = y$	$\begin{cases} n a_0 + a_1 \sum_{i=1}^n e^{-x_i} = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n e^{-x_i} + a_1 \sum_{i=1}^n (e^{-x_i})^2 = \sum_{i=1}^n y_i e^{-x_i} \end{cases}$

$y = \frac{x}{a_0 + a_1 e^{-x}}$		$X = e^{-x},$ $Y = \frac{x}{y}$	$\begin{cases} n a_0 + a_1 \sum_{i=1}^n e^{-x_i} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{y_i} \\ a_0 \sum_{i=1}^n e^{-x_i} + a_1 \sum_{i=1}^n (e^{-x_i})^2 = \sum_{i=1}^n \frac{x_i e^{-x_i}}{y_i} \end{cases}$
$y = \frac{1}{a_0 + a_1 x}$		$X = x,$ $Y = \frac{1}{y}$	$\begin{cases} n a_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i} \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{y_i} \end{cases}$
$y = \frac{1}{a_0 + a_1 x}$		$X = x,$ $Y = \frac{1}{y - a_2},$ a_2 подбирается, $\eta(a_2) \rightarrow \min$	$\begin{cases} n a_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i - a_2} \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{y_i - a_2} \end{cases}$

$y = \frac{x}{a_0 + a_1 x}$		$X = x,$ $Y = \frac{x}{y}$	$\begin{cases} nx_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{y_i} \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{y_i} \end{cases}$
$y = \frac{x}{a_0 + a_1 x} + a_2 x$		$\hat{X} = x,$ $\hat{Y} = \frac{x}{y - a_2 x}$, a_2 выбран- растётся, $\eta(a_2) \rightarrow \min$	$\begin{cases} nx_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{y_i - a_2 x_i} \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{y_i - a_2 x_i} \end{cases}$
$y = \frac{1}{a_1 x^2 + a_0}$		$X = x^2,$ $Y = \frac{1}{y}$	$\begin{cases} nx_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i} \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^4 = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{y_i} \end{cases}$

$y = \frac{x}{a_1 x^2 + a_0}$		$X = x^2$ $Y = \frac{x}{y}$	$\begin{cases} nx_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{y_i} \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^4 = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^3}{y_i} \end{cases}$
$y = \frac{1}{a_0 + \frac{a_1}{x}}$		$X = \frac{1}{x},$ $Y = \frac{1}{y}$	$\begin{cases} nx_0 + a_1 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i} \\ a_0 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} + a_1 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i x_i} \end{cases}$
$y = \frac{a_0 x}{x + a_1}$			$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i - a_1 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{y_i}, \\ a_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i^2 - n y_i^2)} \end{cases}$

$y = a_0 + a_1 e^x$		$X = e^x$ $Y = y,$	$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^n e^{x_i} = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n e^{x_i} + a_1 \sum_{i=1}^n (e^{x_i}) = \sum_{i=1}^n y_i e^{x_i} \end{cases}$
$y = a_0 x^{\alpha_1 x}$		$X = x \ln x,$ $Y = \ln y$	$\begin{cases} n \ln a_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i \ln x_i = \sum_{i=1}^n \ln y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i \ln x_i + a_1 \sum_{i=1}^n (x_i \ln x_i)^2 = \sum_{i=1}^n x_i \ln x_i \ln y_i \end{cases}$

Додаток Б

Критичні значення t – критерію Стьюдента (t_{tabl})

Ступені свободи	Рівень значущості α та довірча ймовірність P					
	$\alpha = 0,40$	$\alpha = 0,20$	$\alpha = 0,10$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,02$	$\alpha = 0,01$
	$P = 0,60$	$P = 0,80$	$P = 0,90$	$P = 0,95$	$P = 0,98$	$P = 0,99$
1	1,376	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
40	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
60	0,848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
120	0,845	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617
∞	0,842	2,282	1,645	1,960	2,326	2,576

Додаток В

Таблиця F – розподілу для ймовірності $p = 0,95$

Число ступенів свободи $k_1 = m$													
k_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	162	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244	245
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4
3	10,1	9,55	9,28	9,20	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74	8,73
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,94	5,91	5,89
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,70	4,68	4,66
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00	3,98
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,60	3,57	3,55
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28	3,26
9	5,12	4,26	3,88	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07	3,05
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91	2,90
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79	2,76
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69	2,66
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,63	2,60	2,58
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,57	2,53	2,51
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,51	2,48	2,45
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,46	2,42	2,40
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,41	2,38	2,35
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34	2,31
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,34	2,31	2,28
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,31	2,28	2,25
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,28	2,25	2,22
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,26	2,23	2,20
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,24	2,20	2,18
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,22	2,18	2,15
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,20	2,16	2,14
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,18	2,15	2,12
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,17	2,13	2,10
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,15	2,12	2,09
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,14	2,10	2,08
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,13	2,09	2,06
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,04	2,00	1,97
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,99	1,95	1,92
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,95	1,92	1,89
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,14	2,07	2,02	1,97	1,93	1,89	1,86
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,13	2,06	2,00	1,95	1,91	1,88	1,84
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,11	2,04	1,99	1,94	1,90	1,86	1,83
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93	1,89	1,85	1,82
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,18	2,09	2,02	1,96	1,91	1,87	1,83	1,80
140	3,91	3,06	2,67	2,44	2,28	2,16	2,08	2,01	1,95	1,90	1,86	1,82	1,79
160	3,90	3,05	2,66	2,43	2,27	2,16	2,07	2,00	1,94	1,89	1,85	1,81	1,78
180	3,89	3,05	2,65	2,42	2,26	2,15	2,06	1,99	1,93	1,88	1,84	1,81	1,77
200	3,88	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	2,06	1,98	1,93	1,88	1,84	1,80	1,77
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,79	1,75	1,72

Таблиця F – розподілу для ймовірності $p = 0,95$ (продовження)

Число ступенів свободи $k_1 - m$													
k_2	14	15	16	17	18	19	20	30	40	50	100	200	∞
1	245	246	246	247	247	248	248	250	251	252	253	254	254
2	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5
3	8,71	8,70	8,69	8,68	8,67	8,67	8,66	8,62	8,60	8,58	8,55	8,54	8,53
4	5,87	5,86	5,84	5,83	5,82	5,81	5,80	5,75	5,72	5,70	5,66	5,65	5,63
5	4,64	4,62	4,60	4,59	4,58	4,57	4,56	4,50	4,46	4,44	4,41	4,39	4,37
6	3,96	3,94	3,92	3,91	3,90	3,88	3,87	3,81	3,77	3,75	3,71	3,69	3,67
7	3,53	3,51	3,49	3,48	3,47	3,46	3,44	3,38	3,34	3,32	3,27	3,25	3,23
8	3,24	3,22	3,20	3,19	3,17	3,16	3,15	3,08	3,04	3,02	2,97	2,95	2,93
9	3,03	3,01	2,99	2,97	2,96	2,95	2,94	2,86	2,83	2,80	2,76	2,73	2,71
10	2,86	2,85	2,83	2,81	2,80	2,79	2,77	2,70	2,66	2,64	2,59	2,56	2,54
11	2,74	2,72	2,70	2,68	2,67	2,66	2,65	2,57	2,53	2,51	2,46	2,43	2,40
12	2,64	2,62	2,60	2,58	2,57	2,56	2,54	2,47	2,43	2,40	2,36	2,32	2,30
13	2,55	2,53	2,51	2,50	2,48	2,47	2,46	2,38	2,34	2,31	2,26	2,23	2,21
14	2,48	2,46	2,44	2,43	2,41	2,40	2,39	2,31	2,27	2,24	2,19	2,16	2,13
15	2,42	2,40	2,38	2,37	2,35	2,34	2,33	2,25	2,20	2,18	2,12	2,10	2,07
16	2,37	2,35	2,33	2,32	2,30	2,29	2,28	2,19	2,15	2,12	2,07	2,04	2,01
17	2,33	2,31	2,29	2,27	2,26	2,24	2,23	2,15	2,10	2,08	2,02	1,99	1,96
18	2,29	2,27	2,25	2,23	2,22	2,20	2,19	2,11	2,10	2,08	1,98	1,95	1,92
19	2,26	2,23	2,21	2,20	2,18	2,17	2,16	2,07	2,03	2,00	1,94	1,91	1,88
20	2,22	2,20	2,18	2,17	2,15	2,14	2,12	2,04	1,99	1,97	1,91	1,88	1,84
21	2,20	2,18	2,16	2,14	2,12	2,11	2,10	2,01	1,96	1,94	1,88	1,84	1,81
22	2,17	2,15	2,13	2,11	2,10	2,08	2,07	1,98	1,94	1,91	1,85	1,82	1,78
23	2,15	2,13	2,11	2,09	2,08	2,06	2,05	1,96	1,91	1,88	1,82	1,79	1,76
24	2,13	2,11	2,09	2,07	2,05	2,04	2,03	1,94	1,89	1,86	1,80	1,77	1,73
25	2,11	2,09	2,07	2,05	2,04	2,02	2,01	1,92	1,87	1,84	1,78	1,75	1,71
26	2,09	2,07	2,05	2,03	2,02	2,00	1,99	1,90	1,85	1,82	1,76	1,73	1,69
27	2,08	2,06	2,04	2,02	2,00	1,99	1,97	1,88	1,84	1,81	1,74	1,71	1,67
28	2,06	2,04	2,02	2,00	1,99	1,97	1,96	1,87	1,82	1,79	1,73	1,69	1,65
29	2,05	2,03	2,01	1,99	1,97	1,96	1,94	1,85	1,81	1,77	1,71	1,67	1,64
30	2,04	2,01	1,99	1,98	1,96	1,95	1,93	1,84	1,79	1,76	1,70	1,66	1,62
40	1,95	1,92	1,90	1,89	1,87	1,85	1,84	1,74	1,69	1,66	1,63	1,60	1,51
50	1,89	1,87	1,85	1,83	1,81	1,80	1,78	1,69	1,63	1,60	1,59	1,55	1,44
60	1,86	1,84	1,82	1,80	1,78	1,76	1,75	1,65	1,59	1,56	1,48	1,44	1,39
70	1,84	1,81	1,79	1,77	1,75	1,74	1,72	1,62	1,57	1,53	1,45	1,40	1,35
80	1,82	1,79	1,77	1,75	1,73	1,72	1,70	1,60	1,54	1,51	1,43	1,38	1,32
90	1,80	1,78	1,76	1,74	1,72	1,70	1,69	1,59	1,53	1,49	1,41	1,36	1,30
100	1,79	1,77	1,75	1,73	1,71	1,69	1,68	1,57	1,52	1,48	1,39	1,34	1,28
120	1,78	1,75	1,73	1,71	1,69	1,67	1,66	1,55	1,50	1,46	1,37	1,32	1,25
140	1,76	1,74	1,72	1,70	1,68	1,66	1,65	1,54	1,48	1,44	1,35	1,30	1,23
160	1,75	1,73	1,71	1,69	1,67	1,65	1,64	1,53	1,47	1,43	1,34	1,28	1,21
180	1,75	1,72	1,70	1,68	1,66	1,64	1,63	1,52	1,46	1,42	1,33	1,27	1,20
200	1,74	1,72	1,69	1,67	1,66	1,64	1,62	1,52	1,46	1,41	1,32	1,26	1,19
∞	1,69	1,67	1,64	1,62	1,60	1,59	1,57	1,46	1,39	1,35	1,24	1,17	1,00