§ 1. Обчислення визначених інтегралів

1. *Визначеним інтегралом* від функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається границя інтегральної суми при умові, що довжина найбільшого з елементарних відрізків прямує до нуля:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum f(\alpha_i)\Delta x_i.$$

Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a;b]$, то границя інтегральної суми існує і не залежить від способу ділення відрізка $[a;b]$ на частини і від вибору точок α_i.

2. Основні властивості визначеного інтеграла:

2.1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

2.2. $\int_a^a f(x)dx = 0$.

2.3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad a < c < b$.

2.4. $\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$.

2.5. $\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$.

2.6. $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a), \quad a < c < b$.

2.7. Якщо m і M – найменше та найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$, то:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

2.8. Якщо $f(x) \le \varphi(x),$ то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx,$ $x \in [a; b]$.

3. Правила обчислення визначених інтегралів:

3.1. *Формула Ньютона – Лейбніца*:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

де $F(x)$ первісна для $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$.

3.2. *Заміна змінної*:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt,$$

де $x = \varphi(t)$ – функція, неперервна разом зі своєю похідною $\varphi'(t)$ на відрізку $\alpha \le t \le \beta$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, $f[\varphi(t)]$ – функція неперервна на $[\alpha; \beta]$.

∢ **Задача 1**. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{4dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Розв'язування. Використовуючи властивість 2.5, знайдемо первісну функції:

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{4dx}{\sqrt{1-x^2}} = 4\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 4\arcsin x\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 4(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} -$$

$$-\arcsin\frac{1}{2}) = 4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

∢ **Задача 2**. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin x dx.$$

Розв'язування. Зробимо заміну змінної, підставимо $t = \cos x$. Тоді $dt = -\sin x dx$, а $\sin x dx = -dt$. Знайдемо нові межі інтегрування:

якщо $x = 0$, то $t = \cos 0 = 1$;

якщо $x = \frac{\pi}{2}$, то $t = \cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Таким чином,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin x dx = -\int_1^0 t^3 dt = -\frac{1}{4} t^4 \Big|_1^0 = -\frac{1}{4}(0^4 - 1^4) = \frac{1}{4}.$$