Диференціальне числення

<u>Завдання 20.</u> Продиференціювати задану функцію.

20.1. $y = 2x^3 + 4\sqrt{x^7} - \operatorname{tg} x.$

20.2. $y = \dfrac{4}{x} - 3\sqrt[3]{x^2} + 3\sin x.$

20.3. $y = 3x^2 + 8\sqrt[4]{x} - 5\operatorname{arctg} x.$

20.4. $y = \dfrac{1}{4}x^4 - 2\sqrt{x} + \arcsin x.$

20.5. $y = \dfrac{5}{x^3} + 6\sqrt[3]{x} - 7\log_2 x.$

20.6. $y = \dfrac{2}{x^6} + 10\sqrt[5]{x} - 3e^x.$

20.7. $y = 2x^7 + 8\sqrt[4]{x^3} - \cos x.$

20.8. $y = \dfrac{8}{x} + 4\sqrt{x^3} + 2\ln x.$

20.9. $y = \dfrac{1}{2x^4} - 5\sqrt[5]{x^2} + 6\sin x.$

20.10. $y = \dfrac{x^4}{2} + 6\sqrt[3]{x^2} - 3\cos x.$

20.11. $y = \dfrac{2}{x^3} + 5\sqrt[5]{x^2} - 2\arccos x.$

20.12. $y = \dfrac{1}{3x} - 9\sqrt[3]{x^4} - 5 \cdot 4^x.$

20.13. $y = \dfrac{2}{5}x^5 + 8\sqrt[4]{x} - 3\operatorname{arcctg} x.$

20.14. $y=\frac{1}{2}x^4+6\sqrt[6]{x^2}-4\log_3 x.$

20.15. $y=7x^3+3\sqrt{x^5}-3^x.$

Завдання 21. Продиференціювати задану функцію.

21.1. $y=\sqrt[4]{3x^2+5x-4}.$

21.2. $y=\cos\left(4x^2+3x-2\right).$

21.3. $y=\mathrm{c}tg\left(2x^2+x-4\right).$

21.4. $y=\ln\left(2x^2-3x+5\right).$

21.5. $y=\sqrt{x^3-4x+5}.$

21.6. $y=\mathrm{tg}\left(3x^2+x-2\right).$

21.7. $y=\mathrm{arctg}\left(2x^2-1\right).$

21.8. $y=3^{2x^3-4x+3}.$

21.9. $y=\sqrt[5]{\left(2x^2-4x+5\right)^2}.$

21.10. $y=\arccos\left(3x^2+5\right).$

21.11. $y=\log_3\left(2x^2-4x+3\right).$

21.12. $y=2e^{4x^2+3x-2}.$

21.13. $y=\sqrt[3]{\left(2x^2+5x-3\right)^2}.$

21.14. $y=\sin\left(2x^2-3x+5\right).$

21.15. $y=\log_4\left(x^2+2x+7\right).$

Завдання 22. Продиференціювати задану функцію.

22.1. $y=3^x\ln(4x-3)$.

22.2. $y=\frac{e^{5x}}{2x^2-3}$.

22.3. $y=x^4\cos(2x^2-5)$.

22.4. $y=\frac{\mathrm{ctg}\,x}{\ln(2x+3)}$.

22.5. $y=e^{-2x^2}\,\mathrm{arcctg}\,x$.

22.6. $y=\frac{\sin\left(3x+2\right)}{\ln x}$.

22.7. $y=\cos x\cdot\ln(2x-3)$.

22.8. $y=\dfrac{\operatorname{tg}x}{\ln(2x-1)}$.

22.9. $y=\dfrac{e^{\cos x}}{3x^2-4}$.

22.10. $y=\dfrac{\ln x}{\sin(4x+3)}$.

22.11. $y=3^{\sin x}(4x-3)$.

22.12. $y=\dfrac{7^{5x}}{2x^2-3}$.

22.13. $y=\dfrac{4^{-x}}{2x^2-5}$.

22.14. $y=\dfrac{\operatorname{arctg}x}{\ln(2x+3)}$.

22.15. $y=\dfrac{\operatorname{arcctg}6x}{7x^3-3x+2}$.

<u>Завдання 23.</u> Продиференціювати задану функцію.

23.1. $y=x^{\sin x}$.

23.2. $y=(\sin x)^{2x}$.

23.3. $y=x^{\operatorname{arctg}x}$.

23.4. $y=(\cos x)^{\sqrt{x}}$.

23.5. $y=(\ln x)^{\operatorname{tg}x}$.

23.6. $y=(\arcsin x)^{x}$.

23.7. $y=x^{\arccos x}$.

23.8. $y=(\operatorname{ctg}x)^{\sqrt{x}}$.

23.9. $y=\left(\sqrt{x-1}\right)^{\sin x}$.

23.10. $y=(\ln x)^{x^2-3}$.

23.11. $y=(\operatorname{tg}x)^{x}$.

23.12. $y=(\log_2 x)^{2x}$.

23.13. $y=x^{\sqrt{x}}$.

23.14. $y=x^{e^x}$.

23.15. $y=(\arccos x)^{x}$.

Завдання 24. Знайти похідну функції $y(x)$, що задана неявно рівнянням.

24.1. $x^3 + y^2 - 3xy = 0$.

24.2. $x - y = \cos(xy)$.

24.3. $y\sin x - \cos(x - y) = 0$.

24.4. $y\ln y = x$.

24.5. $x^4 + y^4 = 3x^2y^2$.

24.6. $x^3 + xy^2 - y = 4x$.

24.7. $y = 1 + xe^y$.

24.8. $\ln y - \dfrac{y}{x} = 7$.

24.9. $\sin y = xy^2 + 5$.

24.10. $y - \cos(x - y) = 0$.

24.11. $x^4 + y^3 + \sin x = 0$.

24.12. $x - y = \sqrt{xy}$.

24.13. $y^2\sin x - \cos x = e^y$.

24.14. $x\log_3 y = x^4 - 3xy$.

24.15. $x^3 + y^4 = 3xy^3$.

Завдання 25. Знайти похідну вказаного порядку.

25.1. $y = x\cos x^2, \quad y''' - ?$

25.2. $y = (5x - 1)\ln^2 x, \quad y''' - ?$

25.3. $y = \left(4x^3 + 5\right)e^{2x+1}, \quad y^{IV} - ?$

25.4. $y = \left(x^2 + 3\right)\ln(x - 3), \quad y^{IV} - ?$

25.5. $y = \dfrac{\sin 2x}{x}, \quad y''' - ?$

25.6. $y = (4x + 3)2^{-x}, \quad y''' - ?$

25.7. $y = x\ln(1 - 3x), \quad y^{IV} - ?$

25.8. $y=\dfrac{\log_3 x}{x^2}, \quad y''' - ?$

25.9. $y=\dfrac{\ln(x-2)}{x-2}, \quad y^{V} - ?$

25.10. $y=\dfrac{\ln x}{x^5}, \quad y''' - ?$

25.11. $y=x^2\cos x, \quad y''' - ?$

25.12. $y=\left(5x^3-1\right)\ln x, \quad y'' - ?$

25.13. $y=\left(2x^2-3\right)e^{2x}, \quad y''' - ?$

25.14. $y=\left(x^2+3\right)\sin x, \quad y''' - ?$

25.15. $y=\dfrac{\cos 3x}{x}, \quad y'' - ?$

<u>Завдання 26.</u> Знайти похідну функції $y(x)$, що задана параметрично.

26.1. $\begin{cases} x=\cos 2t \\ y=\dfrac{2}{\cos^2 t} \end{cases}.$

26.2. $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2} \\ y=\dfrac{1}{t} \end{cases}.$

26.3. $\begin{cases} x=e^t\cos t \\ y=e^t\sin t \end{cases}.$

26.4. $\begin{cases} x=\sqrt{t} \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{1-t}} \end{cases}.$

26.5. $\begin{cases} x=\operatorname{tg} t \\ y=\dfrac{1}{\sin 2t} \end{cases}.$

26.6. $\begin{cases} x=\sqrt{t^3-1} \\ y=\ln t \end{cases}.$

26.7. $\begin{cases} x = t + \sin t \\ y = 2 + \cos t \end{cases}.$

26.8. $\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \operatorname{tg} t \end{cases}.$

26.9. $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \ln\cos t \end{cases}.$

26.10. $\begin{cases} x = e^t \\ y = \arcsin t \end{cases}.$

26.11. $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \dfrac{2}{t} \end{cases}.$

26.12. $\begin{cases} x = \sqrt{1-4t^2} \\ y = \operatorname{tg} 2t \end{cases}.$

26.13. $\begin{cases} x = \cos t \\ y = e^t + 3t \end{cases}.$

26.14. $\begin{cases} x = 6\sqrt[3]{t^2} \\ y = \operatorname{arctg} t \end{cases}.$

26.15. $\begin{cases} x = 3t^3 - 9t \\ y = \arcsin t \end{cases}.$

<u>Завдання 27.</u> Обчислити наближено значення функції $y = f\left(x\right)$ у точці x_0, використовуючи диференціал функції.

27.1. $y=\sqrt[3]{x},\ x_0=7{,}76$.

27.2. $y=\arcsin x,\ x_0=0{,}08$.

27.3. $y=\sqrt{4x-1},\ x_0=2{,}56$.

27.4. $y=x^6,\ x_0=2{,}01$.

27.5. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}},\ x_0=1{,}58$.

27.6. $y=\sqrt[3]{x^2},\ x_0=1{,}03$.

27.7. $y=x^{11},\ x_0=1{,}02$.

27.8. $y=\sqrt{4x-3},\ x_0=1{,}78$.

27.9. $y=\sqrt{x^2+x+3},\ x_0=1{,}97$.

27.10. $y=x^5,\ x_0=2{,}97$.

27.11. $y=\sqrt{x},\ x_0=8{,}87$.

27.12. $y=\operatorname{arctg} x,\ x_0=0{,}05$.

27.13. $y=\sqrt{2x+1},\ x_0=3{,}92$.

27.14. $y=x^4,\ x_0=4{,}01$.

27.15. $y=\sqrt[3]{3x-1},\ x_0=3{,}06$.

<u>Завдання 28.</u> Знайти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y=f(x)$ у точці з абсцисою x_0.

28.1. $y=\dfrac{1+3x^2}{3+x^2},\quad x_0=1.$

28.2. . $y=\dfrac{x}{x^2+1},\quad x_0=-2.$

28.3. $y=2x+\dfrac{1}{x},\quad x_0=1.$

28.4. $y=\dfrac{x^2+3}{x-4},\quad x_0=2.$

28.5. $y=\dfrac{x^2-3x+6}{x^2},\quad x_0=3.$

28.6. $y=\dfrac{x^3+2}{x^3-2},\quad x_0=2$.

28.7. $y = x^2 + 8\sqrt{x} - 32, \quad x_0 = 4$.

28.8. $y = \sqrt[3]{x^2} - 20, \quad x_0 = -8$.

28.9. $y = 8\sqrt[4]{x} - 70, \quad x_0 = 16$.

28.10. $y = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}, \quad x_0 = 4$.

28.11. $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}, \quad x_0 = -3$.

28.12. . $y = \dfrac{5x - x^2}{3-2x}, \quad x_0 = -1$

28.13. $y = \dfrac{x^3}{2+x^2}, \quad x_0 = 1.$

28.14. $y = 5x + \dfrac{1}{x^2}, \quad x_0 = 2.$

28.15. $y = \dfrac{5x+6}{x^2}, \quad x_0 = -1.$

<u>Завдання 29.</u> Знайти найбільше та найменше значення функції $y = f\left(x\right)$ на відрізку $\left[a, b\right]$.

29.1. $y = \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^3, \quad x \in \left[1, 3\right].$

29.2. $y = (x+2)\cdot e^{1-x}, \quad x \in \left[-2, 2\right].$

29.3. $y = \ln(x^2 - 2x + 2), \quad x \in \left[0, 3\right].$

29.4. $y = \dfrac{x^3+4}{x^2}, \quad x \in [1,2].$

29.5. $y = (x-1)\cdot e^x, \quad x \in [0,3].$

29.6. $y = x \cdot \ln x, \quad x \in \left[\dfrac{1}{e^2}, 1\right].$

29.7. $y = e^{4x-x^2}, \quad x \in [1,3].$

29.8. $y = (x+1)\cdot \sqrt[3]{x^2}, \quad x \in [-1,3].$

29.9. $y = x^3 + 6x - 4, \quad x \in [-2,2].$

29.10. $y = x^3 \cdot e^{1+x}, \quad x \in [-4,0].$

29.11. $y = \dfrac{x}{9-x^2}, \quad x \in [-2,2].$

29.12. $y = 2\sqrt{x} - x, \quad x \in [0,4].$

29.13. $y = x - 4\sqrt{x} + 5, \quad x \in [1,9].$

29.14. $y = x^3 - 3x + 1, \quad x \in \left[\dfrac{1}{2}, 2\right].$

29.15. $y = \dfrac{x-1}{x+2}, \quad x \in [0,4].$

<u>Завдання 30.</u> Знайти границю функції за допомогою правила Лопіталя.

30.1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{1-\cos x}.$

30.2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1-\cos 6x}..$

30.3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{x}\right)$.

30.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+e^{-x}-2}{\ln\cos x}$..

30.5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{\ln x}$.

30.6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{1-e^{-x}}\right)$.

30.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^{2}})}{x}$.

30.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(e^{x}+e^{-x}-1)}{x}$.

30.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\ln(1+x)}$.

30.10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(e^{x}+1\right)-2\left(e^{x}-1\right)}{x^{3}}$.

30.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{\operatorname{tg} x-x}$.

30.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{1-\cos 3x}$.

30.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\operatorname{tg} x}{\mathrm{xsinx}}$.

30.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+\cos x-2}{\ln\cos x}$.

30.15. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{x-1}$.

Завдання 31. Виконати загальне дослідження функції.

31.1. $y=\dfrac{x^{3}}{2}-\dfrac{3}{2}x^{2}-12x+3$.

31.2. $y=2x^{3}+15x^{2}+36x-5$.

31.3. $y=\dfrac{4}{3}x^{3}+2x^{2}-8x+3$.

31.4. $y=x^{3}+\dfrac{9}{2}x^{2}-12x+5$.

31.5. $y=\dfrac{1}{3}x^{3}+\dfrac{3}{4}x^{2}-\dfrac{5}{2}x+3$.

31.6. $y = x^3 + x^2 - 5x + 4$.

31.7. $y = 4x^3 - 9x^2 + 6x + 3$.

31.8. $y = \frac{2}{3}x^3 - 5x^2 + 8x + 3$.

31.9. $y = x^3 - 12x^2 + 21x + 5$.

31.10. $y = \frac{5}{6}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 20x + 4$.

31.11. $y = \frac{2x^3}{3} - 3x^2 - 20x + 3$.

31.12. $y = 3x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 18x + 27$.

31.13. $y = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 3$.

31.14. $y = \frac{2}{3}x^3 + 7x^2 + 12x + 5$.

31.15. $y = 5x^3 - 3x^2 - 9x + 2$.

Завдання 32. Виконати загальне дослідження функції.

32.1. $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$.

32.2. $y = \frac{5x}{4 - x^2}$.

32.3. $y = \frac{x^2 - 5}{x - 3}$.

32.4. $y = \frac{(x+1)^2}{x^2 + 1}$.

32.5. $y = \frac{2x - 1}{(x-1)^2}$.

32.6. $y = \frac{3x + 6}{x^2 - 4}$.

32.7. $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$.

32.8. $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$.

32.9. $y=\dfrac{5x}{4-x^2}$.

32.10. $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$

32.11. $y=\dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$.

32.12. $y=\dfrac{3x^2}{8-x^3}$.

32.13. $y=\dfrac{x^3}{3(x-1)^2}$.

32.14. $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$.

32.15. $y=\dfrac{x^3}{x^2-x+1}$.

<u>Завдання 33.</u> Виконати загальне дослідження функції.

33.1. $y=(2x+3)e^{-2x-2}$.

33.2. $y=2\ln\dfrac{x}{x+1}-1$.

33.3. $y=(4-x)e^{x-3}$.

33.4. $y=x\ln x$.

33.5. $y=e^{\frac{1}{2-x}}$.

33.6. $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

33.7. $y=\ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

33.8. $y=(x+1)^2e^{2x}$.

33.9. $y=x^2-2\ln x$.

33.10. $y=xe^{\frac{1}{x}}$.

33.11. $y=x^2e^{-\frac{x^2}{2}}$.

33.12. $y=x-\ln\left(1+x^2\right)$.

33.13. $y = x^2 - 2\ln x.$

33.14. $y = \ln\left(\dfrac{x}{x+2}\right) + 2.$

33.15. $y = \sqrt[3]{x}\, e^{\frac{2}{3x}}.$

Загальне дослідження функцій

Загальне дослідження функцій доцільно виконувати за наступною ***схемою.***

1. Знаходимо область визначення функції і з'ясовуємо, чи має графік точки перетину з координатними осями. Досліджуємо функцію на парність та непарність.

2. Досліджуємо графік функції на наявність асимптот.

3. Знаходимо похідну 1-го порядку і критичні точки 1-го роду (якщо вони існують). Визначаємо знак y' на інтервалах, які дістаємо в результаті розбиття області визначення функції критичними точками 1-го роду.

4. Знаходимо похідну 2-го порядку і критичні точки 2-го роду (якщо вони існують). Визначаємо знак y'' на інтервалах, які дістаємо в результаті розбиття області визначення функції критичними точками 2-го роду.

5. Критичні точки 1-го та 2-го роду вказуємо на координатній прямій. В результаті область визначення буде розбита на інтервали. Будуємо таблицю, в якій у першому рядку записуємо ці інтервали та критичні точки.

Інтервали та критичні точки (x)	
y'	
y''	
y	

а) Використовуючи y' з'ясовуємо, на яких інтервалах функція зростає або спадає, та досліджуємо критичні точки 1-го роду на екстремуми.

б) Використовуючи y'', досліджуємо на інтервалах графік функції на опуклість та угнутість.

Результати досліджень в пунктах а) і б) заносимо до останнього рядка таблиці. Обчислюємо значення функції в точках екстремуму і знаходимо точки перегину.

6. Будуємо графік функції.

<u>**Приклад 1.**</u> Виконати загальне дослідження функції $y = 2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ а) Область визначення функції – $D = (-\infty; +\infty)$.

б) Для знаходження точки перетину графіка функції з віссю Oy обчислимо значення функції у точці $x = 0$:

$$y(0) = 2 \cdot 0 - \frac{3}{4} \cdot 0^2 - \frac{1}{6} \cdot 0^3 = 0.$$

Отже, графік функції перетинає вісь Oy у точці $y = 0$, тобто проходить через початок координат – точку $O(0;0)$.

в) Для знаходження точок перетину графіка функції з віссю Ox слід розв'язати рівняння $y(x) = 0$:

$$2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3 = 0, \quad x\left(2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{6}x^2\right) = 0,$$ звідки

$$x = 0 \text{ або } 2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{6}x^2 = 0.$$

Корені квадратного рівняння:

$$x_1 = \frac{-9 - \sqrt{273}}{4} \approx -6,4; \quad x_2 = \frac{-9 + \sqrt{273}}{4} \approx 1,9.$$

Отже, графік функції перетинає вісь Ox у точках $x_1 \approx -6,4$, $x_2 \approx 1,9$ та у точці $x = 0$ (початок координат).

г) Функція ні парна, ні непарна, оскільки $y(-x) \neq y(x)$ та $y(-x) \neq -y(x)$.

2 Дослідимо графік функції на наявність асимптот.

а) Рівняння *похилих асимптот*

$$y = kx + b, \tag{1}$$

де

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(y(x) - kx \right), \tag{2}$$

якщо границі існують і скінченні.

Оскільки для заданої функції

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{6}x^2 \right) = \infty,$$

то похилих асимптот графік функції не має.

б) Пряма $x = x_0$ є *вертикальною асимптотою* графіка функції $y(x)$, якщо

$$\lim_{x \to x_0} y(x) = \infty. \tag{3}$$

Оскільки функція елементарна і областю визначення функції є вся числова пряма, то вертикальних асимптот немає.

$\boxed{3}$ Знайдемо похідну 1-го порядку:

$$y' = \left(2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3\right)' = 2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2 .$$

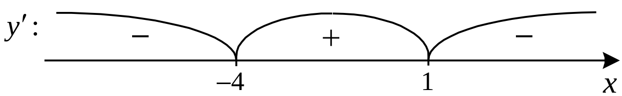
Критичні точки 1-го роду слід шукати серед точок, в яких: а) $y' = 0$; б) y' не існує.

а) $y' = 0$: $\quad 2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2 = 0$, або $x^2 + 3x - 4 = 0$, звідки $x = -4$ та $x = 1$.

б) y' не існує: таких точок немає, оскільки похідна визначена при будь-якому $x \in D$.

Отже, маємо дві критичні точки 1-го роду $x = -4$, $x = 1$.

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак y' на отриманих інтервалах:



(наприклад, $y'(-6) = -25 < 0$, $y'(0) = 2 > 0$, $y'(2) = -3 < 0$).

$\boxed{4}$ Знайдемо похідну 2-го порядку:

$$y'' = \left(2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2\right)' = -\frac{3}{2} - x .$$

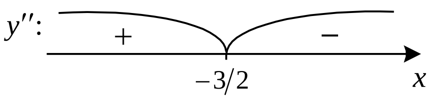
Критичні точки 2-го роду слід шукати серед точок, в яких: а) $y'' = 0$; б) y'' не існує.

а) $y''=0$: $-\dfrac{3}{2}-x=0$, $x=-\dfrac{3}{2}$.

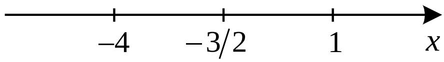
б) y'' не існує: таких точок немає.

Отже, маємо одну критичну точку 2-го роду $x=-\dfrac{3}{2}$.

Вказуємо критичну точку на координатній прямій і визначаємо знак y'' на отриманих інтервалах:



$\boxed{5}$ Вкажемо критичні точки 1-го та 2-го роду на координатній прямій:



Отже, маємо чотири інтервали: $(-\infty;-4)$, $(-4;-1,5)$, $(-1,5;\ 1)$, $(1;+\infty)$.

Заповнимо таблицю. Заповнюючи рядки, що відповідають y' та y'', використовуємо результати досліджень у пунктах $\boxed{3}$ та $\boxed{4}$.

x	$(-\infty;-4)$	-4	$(-4;-1,5)$	$-1,5$	$(-1,5;1)$	1	$(1;+\infty)$
y'	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
y''	$+$		$+$	0	$-$		$-$
y	□ $\cup$	min $y(-4)=$ $=-9\dfrac{1}{3}$	□ $\cup$	т. п. $y(-1,5)=$ $=-4\dfrac{1}{8}$	□ $\cap$	max $y(1)=1\dfrac{1}{12}$	□ $\cap$

Позначення:

□ – функція спадає;

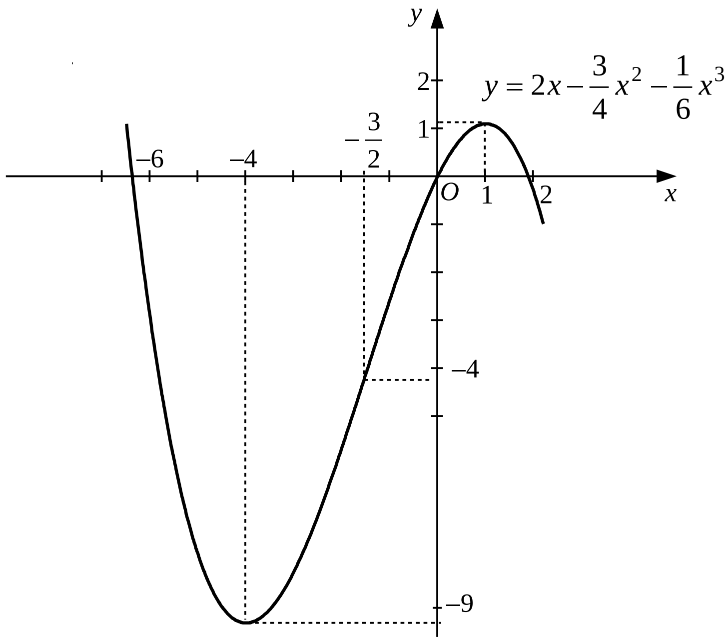
□ – функція зростає;

$\bigcup$ – графік угнутий;

$\bigcap$ – графік опуклий;

т.п. – точка перегину графіка.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Будуємо графік функції, використовуючи результати пунктів $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{5}}$.



Приклад 2. Виконати загальне дослідження функції $y=\dfrac{x^4}{x^3+1}-\dfrac{1}{2}$.

$\boxed{1}$ а) Область визначення функції – $D=(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$.

б) Графік перетинає вісь Oy у точці $y=-0,5$.

в) Знайдемо точки перетину графіка з віссю Ox :

$$\frac{x^4}{x^3+1}-\frac{1}{2}=0,\quad \frac{2x^4-x^3-1}{2(x^3+1)}=0.$$

Звідси маємо рівняння $2x^4-x^3-1=0$. Розклавши ліву частину на множники

$$2x^4-x^3-1=\left(x^4-x^3\right)+\left(x^4-1\right)=x^3(x-1)+(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)=$$

$$=(x-1)\left(2x^3+x^2+x+1\right),$$

знаходимо корінь $x=1$. Можна показати, скориставшись графічним методом, що кубічне рівняння $2x^3+x^2+x+1=0$ має один дійсний корінь, який лежить на інтервалі $(-1;0)$. Але оскільки знаходження коренів кубічного рівняння пов’язане з використанням громіздких формул, то обмежимось вказівкою однієї точки перетину графіка функції з віссю Oy – $x=1$.

г) Функція ні парна, ні непарна.

$\boxed{2}$ Дослідимо графік функції на наявність асимптот.

а) Похилі асимптоти знаходимо за формулами (1), (2):

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\dfrac{x^4}{x^3+1}-\dfrac{1}{2}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^3+1}-\frac{1}{2x}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1+\dfrac{1}{x^3}}-\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2x}=$$

$$=\frac{1}{1+0}-0=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^4}{x^3+1}-\frac{1}{2}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4-x\left(x^3+1\right)}{x^3+1}-\frac{1}{2}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x}{x^3+1}-\frac{1}{2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^3}}-\frac{1}{2}=\frac{0}{0+1}-\frac{1}{2}=-0,5;$$

підставляємо k та b у формулу (1): $y=1\cdot x+\left(-0,5\right)=x-0,5$.

Отже, графік функції має похилу асимптоту $y=x-0,5$ при $x\to\pm\infty$.

б) Оскільки точка $x_0=-1$ не належить області визначення D заданої функції, то її графік може мати вертикальну асимптоту. Для цього розглянемо співвідношення (3): оскільки $\lim\limits_{x\to-1}\left(x^3+1\right)=0$, а $\lim\limits_{x\to-1}x^4=1\neq0$, то

$$\lim_{x\to-1}\left(\frac{x^4}{x^3+1}-\frac{1}{2}\right)=\infty.$$

Звідси випливає, що пряма $x=-1$ є вертикальною асимптотою.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Знайдемо похідну 1-го порядку:

$$y' = \left(\frac{x^4}{x^3+1} - \frac{1}{2} \right)' = \left(\frac{x^4}{x^3+1} \right)' - \left(\frac{1}{2} \right)' = \frac{\left(x^4\right)'\left(x^3+1\right) - x^4\left(x^3+1\right)'}{\left(x^3+1\right)^2} - 0 =$$

$$= \frac{4x^3\left(x^3+1\right) - x^4 \cdot 3x^2}{\left(x^3+1\right)^2} = \frac{x^6+4x^3}{\left(x^3+1\right)^2}.$$

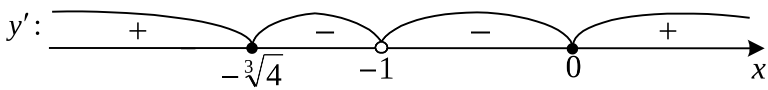
Критичні точки 1-го роду:

а) $y' = 0$: $\dfrac{x^6+4x^3}{\left(x^3+1\right)^2} = 0$, $x^3\left(x^3+4\right) = 0$, звідки $x = 0$, $x = -\sqrt[3]{4}$;

б) y' не існує: $\varnothing$.

Отже, маємо дві критичні точки 1-го роду $x = -\sqrt[3]{4} \approx -1{,}59$ та $x = 0$.

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак y' на отриманих інтервалах (точка $x = -1$ виколота, оскільки не належить області визначення функції):



(наприклад, $y'(-2) = \dfrac{32}{49} > 0$, $y'\left(-\sqrt[3]{2}\right) = -4 < 0$, $y'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{31}{49} < 0$, $y'\left(1\right) = 1 > 0$).

$\boxed{\mathbf{4}}$ Знайдемо похідну 2-го порядку:

$$y'' = \left(\frac{x^6 + 4x^3}{(x^3+1)^2} \right)' = \frac{\left(x^6 + 4x^3\right)' \left(x^3+1\right)^2 - \left(x^6 + 4x^3\right)\left(\left(x^3+1\right)^2\right)'}{\left(\left(x^3+1\right)^2\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(6x^5 + 12x^2\right)\left(x^3+1\right)^2 - \left(x^6+4x^3\right)\left(x^3+1\right)3x^2}{\left(x^3+1\right)^4} =$$

$$= \frac{6x^2\left(x^3+1\right)\left[\left(x^3+2\right)\left(x^3+1\right) - \left(x^6+4x^3\right)\right]}{\left(x^3+1\right)^4} =$$

$$= \frac{6x^2\left(x^6+3x^3+2-x^6-4x^3\right)}{\left(x^3+1\right)^3} = \frac{6x^2\left(2-x^3\right)}{\left(x^3+1\right)^3}.$$

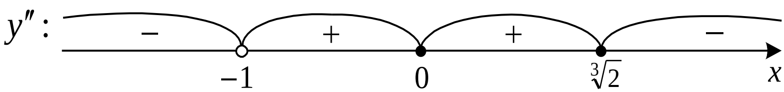
Критичні точки 2-го роду:

а) $y'' = 0$: $\dfrac{6x^2\left(2-x^3\right)}{\left(x^3+1\right)^3} = 0$, $x^2\left(2-x^3\right) = 0$, звідки $x = 0$, $x = \sqrt[3]{2}$;

б) y'' не існує: $\varnothing$.

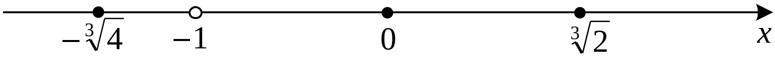
Отже, маємо дві критичні точки 2-го роду $x = 0$ та $x = \sqrt[3]{2} \approx 1,26$.

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак y'' на отриманих інтервалах:



(взяли, наприклад, на відповідних інтервалах точки -2, $-\dfrac{1}{2}$, 1, 2).

$\boxed{5}$ Вкажемо критичні точки 1-го та 2-го роду на координатній прямій:

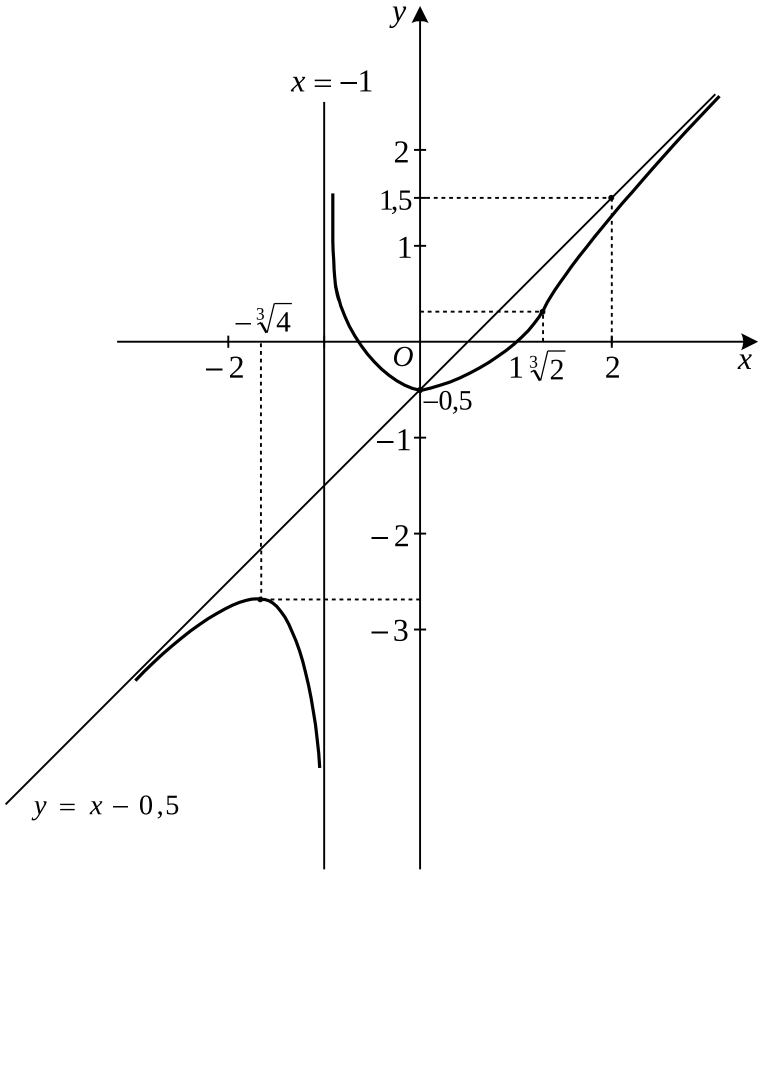


Отже, маємо п’ять інтервалів: $\left(-\infty,-\sqrt[3]{4}\right)$, $\left(-\sqrt[3]{4},-1\right)$, $\left(-1,0\right)$, $\left(0,\sqrt[3]{2}\right)$, $\left(\sqrt[3]{2},+\infty\right)$.

Заповнимо таблицю.

x	$\left(-\infty;-\sqrt[3]{4}\right)$	$-\sqrt[3]{4}$	$\left(-\sqrt[3]{4};-1\right)$	$\left(-1;0\right)$	0	$\left(0;\sqrt[3]{2}\right)$	$\sqrt[3]{2}$	$\left(\sqrt[3]{2};+\infty\right)$
y'	+	0	—	—	0	+		+
y''	—		—	+	0	+	0	—
y	$\cap$	max $y(-\sqrt[3]{4})\approx$ $\approx -2,62$	$\cap$	$\cup$	min $y(0)=-0,5$	$\cup$	т.п. $y(\sqrt[3]{2})\approx$ $\approx 0,34$	$\cap$

$\boxed{\mathbf{6}}$ Будуємо графік функції, використовуючи результати пунктів $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{5}}$.



Приклад 3. Виконати загальне дослідження функції $y=\sqrt[3]{x^2}\,e^{\frac{2x}{3}}$.

$\boxed{1}$ а) Область визначення функції – $D=(-\infty;+\infty)$.

б) Для знаходження точки перетину графіка функції з віссю Oy обчислимо значення функції у точці $x=0$:

$$y(0)=\sqrt[3]{0^2}\cdot e^{\frac{2\cdot 0}{3}}=0.$$

Отже, графік функції перетинає вісь Oy у точці $y=0$, тобто проходить через початок координат – точку $O(0;0)$.

в) Для знаходження точок перетину графіка функції з віссю Ox Слід розв'язати рівняння $y(x)=0$:

$$\sqrt[3]{x^2}\,e^{\frac{2x}{3}}=0 \text{ або } \sqrt[3]{x^2}=0\text{. Звідси } x=0.$$

Отже, графік функції перетинає вісь Ox у точці $x=0$ (початок координат).

г) Функція ні парна, ні непарна, оскільки $y(-x)\neq y(x)$ та $y(-x)\neq -y(x)$.

$\boxed{2}$ Дослідимо графік функції на наявність асимптот.

а) для знаходження похилих асимптот розглянемо окремо два випадки: $x\to-\infty$ та $x\to+\infty$:

Якщо $x\to+\infty$, маємо за формулами (2):

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2}\,e^{\frac{2x}{3}}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{2x}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(e^{\frac{2x}{3}}\right)'}{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{3}e^{\frac{2x}{3}}}{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}=\lim_{x\to\infty}2x^{\frac{2}{3}}e^{\frac{2x}{3}}=\infty.$$

отже, похилих асимптот при $x\to+\infty$ графік функції не має.

Якщо $x\to-\infty$, маємо

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2}\,e^{\frac{2x}{3}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{\frac{2x}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}e^{-\frac{2x}{3}}}=0.$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\big(y(x)-kx\big)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^2}e^{\frac{2x}{3}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{e^{-\frac{2x}{3}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x^2}\right)'}{\left(e^{-\frac{2x}{3}}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}}{\frac{-2}{3}e^{-\frac{2x}{3}}}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}e^{-\frac{2x}{3}}}=0\,.$$

Отже, за формулою (1) при $x\to-\infty$ похилою асимптотою є пряма $y=0$.

б) Оскільки функція елементарна і областю визначення функції є вся числова пряма, то вертикальних асимптот немає.

$\boxed{3}$ Знайдемо похідну 1-го порядку:

$$y' = \left(\sqrt[3]{x^2} e^{\frac{2x}{3}} \right)' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \cdot e^{\frac{2x}{3}} + \frac{2}{3} \sqrt[3]{x^2} e^{\frac{2x}{3}} = \frac{2e^{\frac{2x}{3}} \left(1 + x\right)}{3\sqrt[3]{x}}.$$

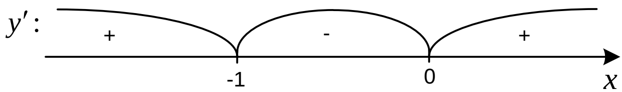
Критичні точки 1-го роду:

а) $y' = 0$: $2e^{\frac{2x}{3}} \left(1+x\right) = 0$, або $1 + x = 0$, звідки $x = -1$.

б) y' не існує: $\sqrt[3]{x} = 0$, звідки $x = 0$.

Отже, маємо дві критичні точки 1-го роду $x = -1$, $x = 0$.

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак y' на отриманих інтервалах:



(наприклад, $y'(-6) \approx 0{,}03 > 0$, $y'(-0{,}5) \approx -0{,}3 < 0$, $y'(2) \approx 6{,}02 > 0$).

$\boxed{4}$ Знайдемо похідну 2-го порядку:

$$y'' = \left(\frac{2e^{\frac{2x}{3}} \left(1+x\right)}{3\sqrt[3]{x}} \right)' = \frac{e^{\frac{2x}{3}} \left(4x^2 + 8x - 2\right)}{9\sqrt[3]{x^4}}.$$

Критичні точки 2-го роду:

а) $y'' = 0$: $4x^2 + 8x - 2 = 0$.

Корені квадратного рівняння:

$$x_1 = \frac{-8 - \sqrt{96}}{8} = -\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{6}\right); \qquad x_2 = \frac{-8 + \sqrt{96}}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{6} - 1.$$

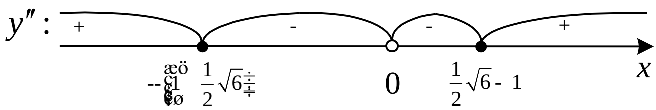
б) y'' не існує: $\sqrt[3]{x^4}=0$, звідки $x=0$.

Отже, маємо три критичних точки 2-го роду

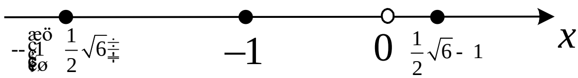
$$x_1=\frac{-8-\sqrt{96}}{8}=-\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)\approx-2,2;,\qquad x_2=0,$$

$$x_3=\frac{-8+\sqrt{96}}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{6}-1\approx0,2.$$

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак y'' на отриманих інтервалах:



$\boxed{5}$ Вкажемо критичні точки 1-го та 2-го роду на координатній прямій:



Отже, маємо п’ять інтервалів: $\left(-\infty;-1-\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)$, $\left(-1-\frac{1}{2}\sqrt{6};-1\right)$, $(-1;\ 0)$, $\left(0;\frac{1}{2}\sqrt{6}-1\right)$, $\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}-1;+\infty\right)$.

Заповнимо таблицю. Заповнюючи рядки, що відповідають y' та y'', використовуємо результати досліджень у пунктах $\boxed{3}$ та $\boxed{4}$.

x	$\left(-\infty;-1-\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)$	$-1-\frac{1}{2}\sqrt{6}$	$\left(-1-\frac{1}{2}\sqrt{6};-1\right)$	-1
y'	+		+	0
y''	+	0	-	
y	□ $\cup$	т.п. $y\left(-1-\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)\approx 0,4$	□ $\cap$	max $y(-1)\approx 0,5$

Продовження таблиці

$(-1;0)$		0	$\left(0;\frac{1}{2}\sqrt{6}-1\right)$	$\frac{1}{2}\sqrt{6}-1$	$\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}-1;+\infty\right)$
-		не існує	+		+
-		не існує	$-$	0	+
□ $\cap$		min $y(0)=0$	□ $\cap$	т.п. $y\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}-1\right)\approx 0,4$	□ $\cup$

$\boxed{\mathbf{6}}$ Будуємо графік функції, використовуючи результати пунктів $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{5}}$.