

МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Локальні функції і перехід від класичного методу Рітца до методу скінченних елементів

Основна складність при застосуванні методу Рітца і методів зважених нев'язок пов'язана з вибором базисних функцій, які повинні задовольняти граничні умови і бути означеними в усій області, де розшукується розв'язок. У зв'язку зі складністю геометрії конструкції підбір таких функцій виявляється дуже складним.

Прогресивною виявилася ідея локалізації базисних функцій, тобто використання кусково-неперервних функцій, які описуються різними виразами на окремих ділянках області. Такий підхід є характерним для методу скінченних елементів, який з математичної точки зору є методом Рітца (або варіантом методу зважених нев'язок) із кусково-неперервними базисними функціями. У цьому випадку інтеграли у варіаційному рівнянні обчислюються як сума інтегралів по окремих підобластях.

Особливість методу скінченних елементів полягає в тому, що підобласті мають порівняно просту форму, і базисні функції для них однотипні.

Розглянемо використання таких локально означених функцій при визначенні переміщень стержня, який розтягується силою F (рис. 2.1, *а*). Як відомо, переміщення в цьому випадку описується лінійною функцією (рис. 2.1, *б*). Виберемо базисні функції кусково-лінійними, не рівними нулю тільки біля відповідного вузла, в якому їх значення дорівнює одиниці. За межами двох ділянок біля вузла функція тотожно дорівнює нулю (рис. 2.1, *в*).

Переміщення у стержні апроксимуються таким виразом:

$$u = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i q_i,$$

або у матричній формі

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{N}} \mathbf{q}, \quad (2.1)$$

де

$$\bar{\mathbf{N}} = (\bar{N}_1 \quad \bar{N}_2 \quad \bar{N}_3 \quad \bar{N}_4), \quad \mathbf{q} = (q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4)^T.$$

Базисні функції N_i неперервні на ділянці $[0, L]$ і мають розривні перші похідні (рис. 2.1).

Продовжуючи розв'язок методом Рітца, скористаємось варіаційним рівнянням Лагранжа

$$-\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV + \int_0^L \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} dx = 0, \quad (2.2)$$

де \mathbf{p} – навантаження, розподілене по довжині стержня (у даному випадку $\mathbf{p} = F\delta(x - L)$, де $\delta(x - L)$ – функція Дірака); $L = l_1 + l_2 + l_3$.

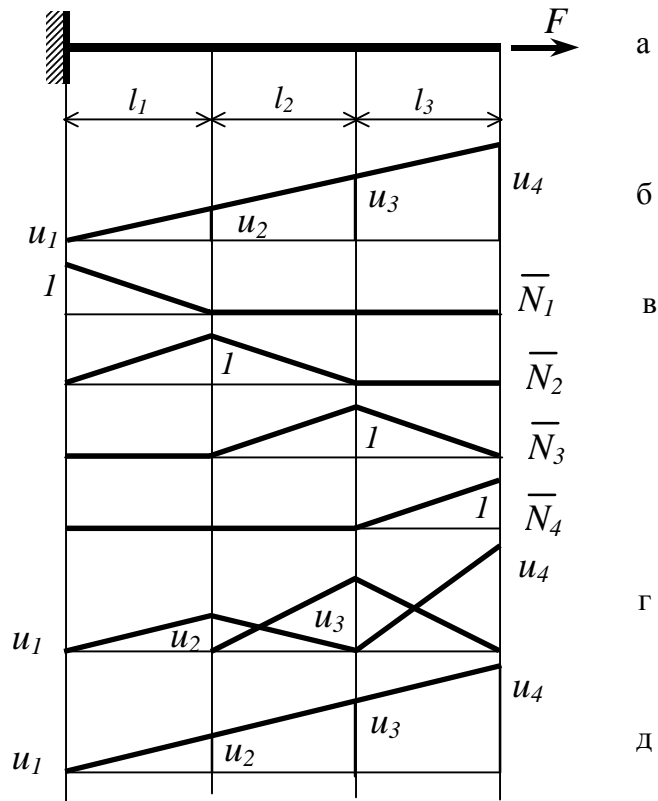


Рис. 2.1. Скінченно-елементне моделювання переміщень у стержні

Для стержня при розтягу-стиску маємо такі співвідношення для деформацій $\varepsilon = \frac{du}{dx}$ і напружень $\sigma = E \frac{du}{dx}$ (E – модуль пружності матеріалу).

Після підстановки ε, σ у (2.2) і інтегрування по площі поперечного перерізу, одержимо

$$-EA \int_0^L \delta \left(\frac{d\mathbf{u}}{dx} \right)^T \frac{d\mathbf{u}}{dx} dx + \int_0^L \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} dx = 0. \quad (2.3)$$

Підставляючи далі переміщення \mathbf{u} (2.1), одержимо систему рівнянь відносно невідомих переміщень вузлів \mathbf{q}

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{F}, \quad (2.4)$$

де \mathbf{K} – матриця жорсткості;
 \mathbf{F} – вектор зовнішніх сил;

$$\mathbf{K} = EA \int_0^L \begin{bmatrix} \bar{N}'_1 \bar{N}'_1 & \bar{N}'_1 \bar{N}'_2 & \bar{N}'_1 \bar{N}'_3 & \bar{N}'_1 \bar{N}'_4 \\ \bar{N}'_2 \bar{N}'_1 & \bar{N}'_2 \bar{N}'_2 & \bar{N}'_2 \bar{N}'_3 & \bar{N}'_2 \bar{N}'_4 \\ \bar{N}'_3 \bar{N}'_1 & \bar{N}'_3 \bar{N}'_2 & \bar{N}'_3 \bar{N}'_3 & \bar{N}'_3 \bar{N}'_4 \\ \bar{N}'_4 \bar{N}'_1 & \bar{N}'_4 \bar{N}'_2 & \bar{N}'_4 \bar{N}'_3 & \bar{N}'_4 \bar{N}'_4 \end{bmatrix} dx, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{F} = (0 \ 0 \ 0 \ F)^T,$$

(штрихом позначені похідні $\bar{N}'_i = \frac{d\bar{N}_i}{dx}$).

Врахуємо при обчисленні інтегралів у матриці жорсткості, що кожна з функцій \bar{N}_i є ненульовою тільки на двох суміжних ділянках, і позначимо функції зліва і справа, відповідно, \bar{N}_{i1} і \bar{N}_{i2} (i – номер функції \bar{N}_i). Тоді інтеграли у (2.5) можна записати на кожній ділянці окремо

$$\begin{aligned} \int_0^L \bar{N}'_1 \bar{N}'_1 dx &= \int_0^{l_1} \bar{N}'_{12} \bar{N}'_{12} dx, & \int_0^L \bar{N}'_1 \bar{N}'_2 dx &= \int_0^{l_1} \bar{N}'_{12} \bar{N}'_{21} dx, \\ \int_0^L \bar{N}'_1 \bar{N}'_3 dx &= 0, & \int_0^L \bar{N}'_1 \bar{N}'_4 dx &= 0, \\ \int_0^L \bar{N}'_2 \bar{N}'_1 dx &= \int_0^{l_1} \bar{N}'_{21} \bar{N}'_{12} dx, & \int_0^L \bar{N}'_2 \bar{N}'_3 dx &= \int_0^{l_2} \bar{N}'_{22} \bar{N}'_{31} dx, \\ \int_0^L \bar{N}'_2 \bar{N}'_2 dx &= \int_0^{l_1} \bar{N}'_{21} \bar{N}'_{21} dx + \int_0^{l_2} \bar{N}'_{22} \bar{N}'_{22} dx, & \int_0^L \bar{N}'_2 \bar{N}'_4 dx &= 0, \text{ і т. д.} \end{aligned} \quad (2.6)$$

З урахуванням такого розділення інтегралів на окремих ділянках, матрицю \mathbf{K} можна записати у вигляді суми матриць, визначених для кожної ділянки.

На ділянці $(0 - l_1)$

$$\mathbf{K}_1 = EA \int_0^{l_1} \begin{bmatrix} \bar{N}'_{12} \bar{N}'_{12} & \bar{N}'_{12} \bar{N}'_{21} \\ \bar{N}'_{21} \bar{N}'_{12} & \bar{N}'_{21} \bar{N}'_{21} \end{bmatrix} dx. \quad (2.7)$$

На ділянці $(l_1 - l_2)$

$$\mathbf{K}_2 = EA \int_{l_1}^{l_2} \begin{bmatrix} \bar{N}'_{22} \bar{N}'_{22} & \bar{N}'_{22} \bar{N}'_{31} \\ \bar{N}'_{31} \bar{N}'_{22} & \bar{N}'_{31} \bar{N}'_{31} \end{bmatrix} dx. \quad (2.8)$$

На ділянці $(l_2 - l_3)$

$$\mathbf{K}_3 = EA \int_{l_2}^{l_3} \begin{bmatrix} \bar{N}'_{32} \bar{N}'_{32} & \bar{N}'_{32} \bar{N}'_{41} \\ \bar{N}'_{41} \bar{N}'_{32} & \bar{N}'_{41} \bar{N}'_{41} \end{bmatrix} dx. \quad (2.9)$$

Функції \bar{N}_{i1} і \bar{N}_{i2} при відліку змінної x від початку стержня можна записати в такому вигляді:

$$\bar{N}_{i1} = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad \bar{N}_{i2} = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}. \quad (2.10)$$

Таким чином, матрицю жорсткості можна синтезувати з матриць жорсткості окремих ділянок (2.7)-(2.9), які назвемо скінченними елементами. Матриці жорсткості для кожної ділянки (скінченного елемента) можна одержати незалежно в локальних осях, пов'язаних із цією ділянкою. Локальні функції для i -тої ділянки зображено на рис. 2.2.

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{l_i}, \quad N_2(x) = \frac{x}{l_i}, \quad (2.11)$$

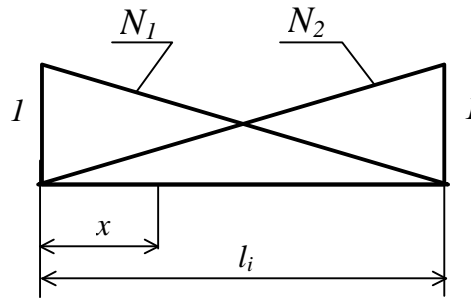


Рис. 2.2. Локальні функції для i -тої ділянки

Матриця жорсткості для i -го скінченного елемента стержня буде такою:

$$\mathbf{K}_i = \frac{EA_i}{l_i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Саме у можливості побудови повної матриці жорсткості конструкції з матриць жорсткості елементів, одержаних незалежно від конструкції в цілому, і полягає основна особливість методу скінченних елементів. Згідно з МСЕ спочатку розглядають кожний елемент і будують його матрицю жорсткості, після чого елементи об'єднують з урахуванням умов нерозривності і граничних умов. У більшості випадків використовують елементи однакової форми, що дозволяє будувати матрицю жорсткості тільки один раз.

Продовжимо розв'язок, використовуючи матриці жорсткості (2.7)-(2.9), одержані для кожної ділянки стержня.

Наступним етапом має бути одержання матриці жорсткості стержня. Матриці кожного скінченного елемента необхідно поєднати, щоб одержати матрицю для стержня. Для цього розглянемо скінченно-елементну модель стержня і окремий скінченний елемент і прирівняємо відповідні

переміщення (рис. 2.3). Це можна виконати у вигляді таблиці, яку називають матрицею індексів (табл. 2.1).

Таблиця 2.1

Матриця індексів

№ елемента	Переміщення елемента	
	1	2
1	1	2
2	2	3
3	3	4

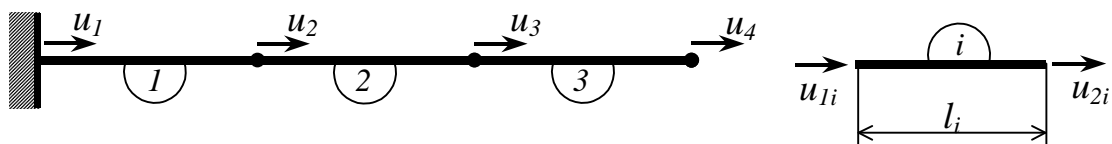


Рис. 2.3. Скінченно-елементна модель стержня і окремий скінченний елемент

У відповідності з цією таблицею індекси елементів матриці жорсткості необхідно змінити на глобальні. Наприклад, для першого елемента

$$K_{11}^{(1)} = K_{11}, \quad K_{12}^{(1)} = K_{12}, \quad K_{22}^{(1)} = K_{22}, \quad K_{21}^{(1)} = K_{21}.$$

Для другого елемента

$$K_{11}^{(2)} = K_{22}, \quad K_{12}^{(2)} = K_{23}, \quad K_{22}^{(2)} = K_{33}, \quad K_{21}^{(2)} = K_{32}.$$

Для третього елемента

$$K_{11}^{(3)} = K_{33}, \quad K_{12}^{(3)} = K_{34}, \quad K_{22}^{(3)} = K_{44}, \quad K_{21}^{(3)} = K_{43}.$$

Складаючи компоненти з однаковими індексами, одержимо

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & 0 \\ 0 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(3)} \\ 0 & 0 & K_{21}^{(3)} & K_{22}^{(3)} \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Після обчислення інтегралів матриця \mathbf{K} матиме такий вигляд:

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Структуру матриці показано на рис. 2.4.

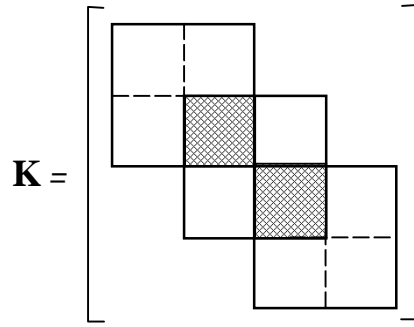


Рис. 2.4. Структура матриці жорсткості системи

Для того, щоб урахувати закріплення, треба реалізувати умову $u_1 = 0$. Це можна було зробити, викресливши у матриці жорсткості стержня (2.14) перші рядок і стовпець. Відповідно видалимо перші елементи матриць переміщень і зовнішніх навантажень. Зазначимо, що після такої операції необхідно виконати перенумерацію невідомих (у даному випадку друге переміщення стане першим і т.д.). У системі MathCAD і існуючих програмах МСЕ така перенумерація проводиться автоматично. Рівняння для визначення невідомих переміщень з урахуванням значень коефіцієнтів матриць жорсткості елементів (усі елементи прийняті однаковими) матиме вигляд

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{F}, \quad (2.15)$$

де

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Розв'язок рівняння (2.15) буде точним, оскільки степінь апроксимуючих поліномів відповідає дійсному

$$q_1 = 0, \quad q_4 = \frac{Fl}{EA}, \quad q_3 = \frac{2}{3}q_4, \quad q_2 = \frac{1}{3}q_4. \quad (2.17)$$

Сили у вузлах можна знайти, помноживши матрицю (2.11) на вектор знайдених переміщень

$$\mathbf{R} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F \\ 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Таким чином, ми одержали розв'язок задачі розтягу стержня за допомогою методу скінченних елементів. Цей варіант МСЕ називають методом скінченних елементів у переміщеннях, у зв'язку з тим, що невідомими тут є переміщення. Далі буде розглядатися саме цей варіант МСЕ, як найбільш поширений у практиці розрахунків.

2.2. Алгоритм методу скінченних елементів

Узагальнюючи розглянуту методику, можна сформулювати таку послідовність використання МСЕ (алгоритм):

- 1) дискретизація конструкції, тобто подання її як сукупності скінченних елементів;
- 2) побудова матриць жорсткості елементів;
- 3) побудова загальної матриці жорсткості та вектора навантажень для усієї області;
- 4) накладення граничних умов і редукція (тобто відповідне зменшення розмірів) матриць жорсткості, векторів невідомих і навантаження;
- 5) розв'язок системи рівнянь відносно вузлових переміщень;
- 6) визначення інших необхідних величин, які залежать від вузлових невідомих.

Розглянемо ці етапи спочатку в загальних рисах. Конкретні реалізації подані в наступних розділах.

2.2.1. Дискретизація конструкції

Розділення конструкції на окремі скінченні елементи є дуже відповідальним етапом розрахунку. Від правильного розділення залежить як точність розрахунку, так і його трудомісткість. Оскільки ця операція не має теоретичного обґрунтування, ефективність її повністю залежить від інженерних навичок того, хто нею займається. Використання малих елементів хоча і підвищує точність розрахунку, але збільшує кількість невідомих і порядок рівнянь для їх визначення. У зв'язку з цим необхідно вибирати розміри елементів у відповідності з градієнтами тих величин, які визначаються. У місцях, де розшукувана величина змінюється швидко, розміри елементів зменшують.

У методі скінченних елементів використовуються елементи різних форм і розмірів. Вибір елемента залежить від характеру задачі, від точності розв'язку, яку треба забезпечити.

При заміні конструкції сукупністю дискретних елементів важливо забезпечити якомога більшу відповідність між моделлю і конструкцією.

Найпростішими є одновимірні (стержневі) елементи (рис. 2.5). Площа поперечного перерізу елемента може бути сталою по довжині. Найчастіше такий елемент зустрічається у розрахунках стержневих конструкцій. Елемент може мати два і більше вузлів.

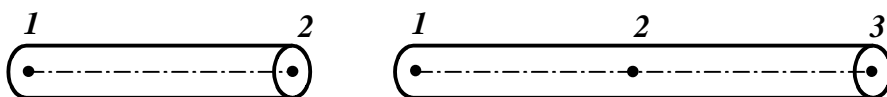


Рис. 2.5. Одновимірні скінченні елементи

Для побудови дискретної моделі двовимірної області використовуються двовимірні скінченні елементи (рис. 2.6). Найчастіше використовуються трикутники і чотирикутники з різною кількістю вузлів.

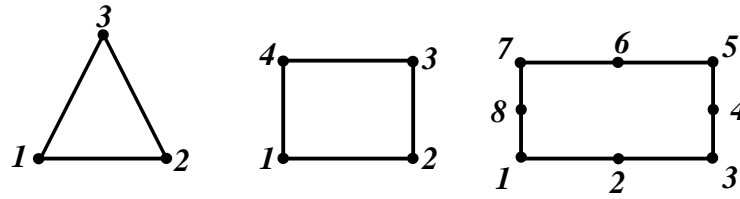


Рис. 2.6. Двовимірні скінченні елементи

Тривимірні тіла моделюють такими елементами, як тетраедр і паралелепіпед (рис. 2.7).

Для дискретизації осесиметричних тіл широко використовують осесиметричні скінченні елементи, створені обертанням плоскої фігури відносно осі.

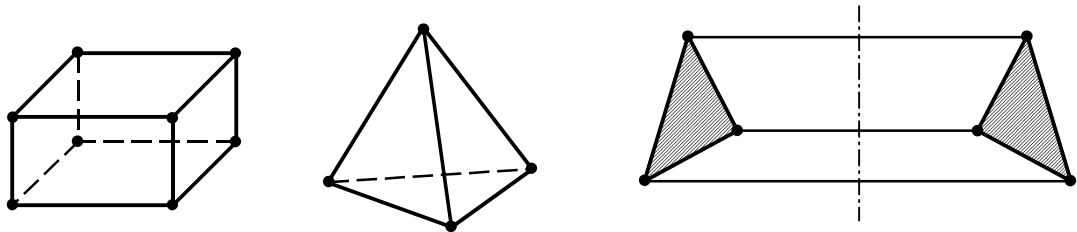


Рис. 2.7. Об'ємні скінченні елементи

Процес дискретизації може бути розділений на два етапи: розділення тіла на елементи і нумерація елементів і вузлів. Найбільш простим є розділення стержневих конструкцій на одновимірні елементи. Наприклад, конструкцію ферми (рис. 2.8) можна розділити на скінченні елементи – стержні ферми з вузлами у вузлах ферми.

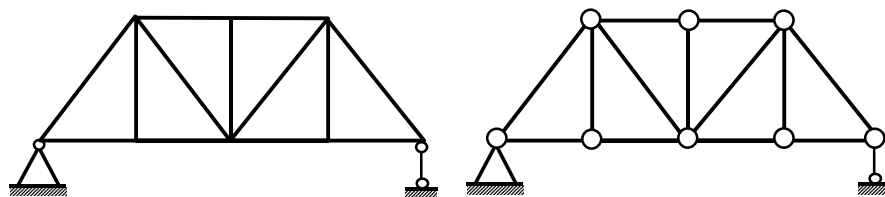


Рис. 2.8. Скінченно-елементна модель ферми

Для двовимірних конструкцій найбільш раціональним є розділення на трикутні й прямокутні елементи.

Загальні рекомендації щодо етапу дискретизації зводяться до таких:

- 1) розміри елементів повинні забезпечувати необхідну точність описання переміщень і напружень, для чого вони повинні змінюватись у відповідності з величиною градієнтів переміщень і напружень;
- 2) тип елементів, що використовується, повинен забезпечити адекватність роботи конструкції та її скінченно-елементної моделі, а також достатню точність апроксимації форми й умов закріплення конструкції;

3) нумерація повинна забезпечувати мінімальну частину стрічки глобальної матриці жорсткості. Чим менше ширина стрічки, тим зручніше для розв'язку одержана система рівнянь МСЕ. Для цього нумерація повинна проводитись уздовж поперечного перерізу конструкції (рис. 2.9, *a*). Для замкнутих контурів нумерація проводиться симетрично відносно початкового вузла (рис. 2.9, *б*).

В усіх випадках необхідно намагатись зменшити різницю між номерами сусідніх вузлів.

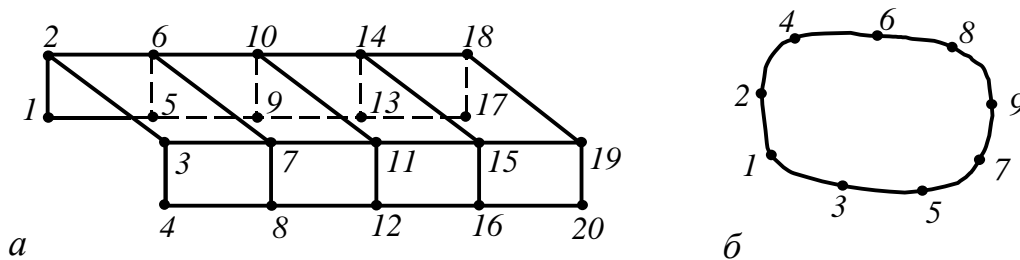


Рис. 2.9. Послідовність нумерації вузлів: уздовж поперечного перерізу (*a*); симетрично відносно початкового вузла (*б*)

В існуючих програмних комплексах, які використовують МСЕ, операція розділення на елементи, як правило, автоматизована. Для цього використовуються різні методи побудови сітки на поверхні або в об'ємі конструкції [15]. Детальніше методика дискретизації розглядається у розділах 4 і 7.

2.2.2. Побудова матриць жорсткості елементів

У більшості випадків при розрахунках конкретних конструкцій користуються готовими матрицями жорсткості, які наводяться у довідниках [31, 36] або у бібліотеках відповідних програмних комплексів. Однак, іноді необхідно самостійно обчислювати матриці жорсткості, зокрема у випадках, коли компоненти матриць визначаються чисельним способом.

Для побудови матриць жорсткості елементів використовують варіаційне рівняння Лагранжа або рівняння методу зважених нев'язок, записані для одного елемента. Основним етапом тут є вибір апроксимуючих функцій, що описують дійсне поле переміщень в елементі. Ці функції повинні, як і координатні функції у методі Рітца, задовольняти умови допустимості і повноти для даної задачі. Допустимість передбачає неперервність функцій та їх похідних до $p-1$ порядку (p – порядок найвищої похідної у варіаційному рівнянні) і коректність визначення параметрів в умовах варіаційного формулювання. Для виконання умов повноти апроксимуючі функції повинні задовольняти умову незмінності похідних, згідно з якою похідні у варіаційному рівнянні повинні ставати незмінними зі зменшенням розмірів елемента. Похідні p -го порядку

можуть мати розриви першого роду, але при зменшенні розмірів елемента повинні залишатись сталими. Якщо виконуються умови допустимості й повноти, розв'язок за методом скінченних елементів буде наближатись до точного при зменшенні розмірів елемента.

2.2.3. Синтез скінченно-елементної моделі конструкції

Синтезом називають процес складання елементів у зв'язану скінченно-елементну модель конструкції. Оскільки сили, що діють у вузлах, є коефіцієнтами матриці жорсткості елементів, а у вузлі сходиться декілька елементів, синтез зводиться до складання відповідних коефіцієнтів матриць жорсткості декількох елементів по кожному з напрямків вузлових переміщень і розміщення цієї суми у відповідній клітинці глобальної матриці жорсткості. Формально операцію синтезу можна провести за допомогою розглянутої вище матриці індексів. Розглянемо цю процедуру докладніше.

Під набором індексів для кожного елемента розуміють значення локальних узагальнених переміщень, яких ті набувають при глобальній нумерації переміщень для конструкції в цілому. Глобальна нумерація визначається при дискретизації системи на скінченні елементи. Локальна нумерація пов'язана з вибором функцій апроксимації і є однаковою для однотипних елементів.

Для побудови матриці індексів спочатку складається топологічна матриця, яка встановлює відповідність між локальною і глобальною нумерацією вузлів кожного елемента (рис. 2.10)

$$\mathbf{Top} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 9 & 10 & 11 & 7 & 8 & 2 \\ 3 & 7 & 11 & 12 & 13 & 8 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

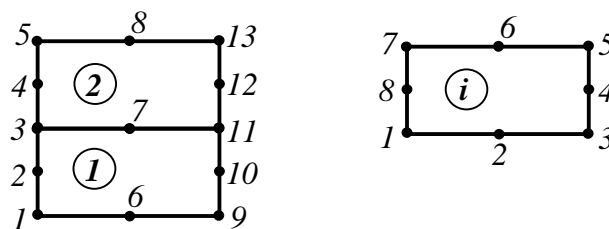


Рис. 2.10. Глобальна і локальна нумерації вузлів

Оскільки для складання глобальної матриці необхідні номери узагальнених координат, а не вузлів, необхідно домовитись про відповідність нумерації вузлів і узагальнених переміщень. Топологічна матриця використовується для одержання матриці індексів, яка встановлює відповідність між локальною і глобальною нумераціями переміщень вузлів елемента. При невеликій кількості вузлів можна

записати безпосередньо матрицю індексів, що задає відповідність між номерами глобальних і локальних узагальнених координат елемента (рис. 2.11, табл. 2.2).

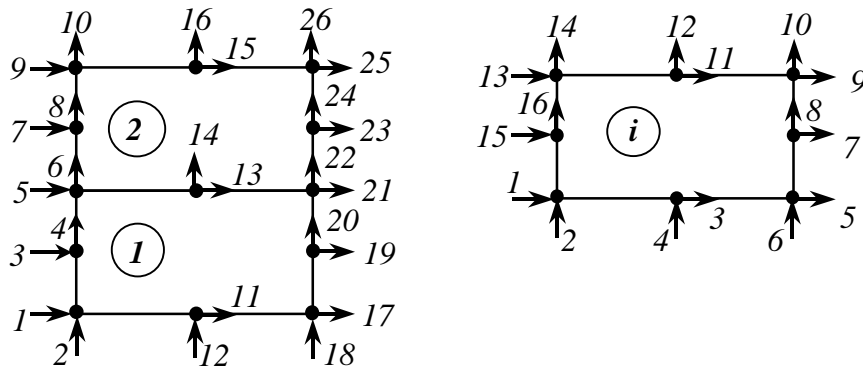


Рис. 2.11. Глобальна і локальна нумерації вузлових переміщень

Таблиця 2.2

Матриця індексів до рис. 2.11

№ елемента	Індекси вузлових переміщень															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	2	11	12	17	18	19	20	21	22	13	14	5	6	3	4
2	5	6	13	14	21	22	23	24	25	26	15	16	9	10	7	8

Після того, як повністю описано геометрію конструкції, необхідно задати граничні умови. Для МСЕ у формі методу переміщень, який розглядається у даному посібнику, найпростіше задати граничні умови відносно переміщень, і це вигідно відрізняє цей варіант МСЕ від інших. При формулюванні граничних умов у переміщеннях найчастіше зустрічаються випадки жорсткого закріплення у відповідних напрямках. Врахування нульового значення проводиться заміною нулем відповідного переміщення у матриці індексів і перенумерацією всіх залишених глобальних переміщень. Це рівнозначно викреслюванню з глобальної матриці жорсткості стовпця і рядка з номером координати, яка прирівнюється до нуля, що приводить до зменшення розміру глобальної матриці жорсткості. Оскільки цей спосіб приводить до незручностей, пов'язаних із необхідністю перенумерації переміщень, раціональнішим виявляється інший. На перетині головної діагоналі і рядка або стовпця з номером заданої координати ставиться одиниця, а у векторі навантажень системи рівнянь у відповідному рядку записується нуль або задане ненульове переміщення, інші коефіцієнти у відповідних рядку і стовпці прирівнюються до нуля.

Недолік цього варіанту полягає в тому, що одержана після такої операції матриця жорсткості стає несиметричною. Симетрію можна зберегти, використавши спосіб Пейна-Айронса [25]: якщо задається умова

$q_i = \bar{q}_i$, то діагональний елемент у i -му рядку матриці множиться на дуже велике число, а i -й елемент у векторі навантажень замінюється добутком того ж самого числа, значень \bar{q}_i і діагонального елемента.

2.2.4. Розв'язок систем рівнянь МСЕ

Оскільки розв'язок системи рівнянь МСЕ займає основну частину часу розрахунку задачі, вибір методу розв'язання є дуже важливим кроком. Проблемі розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь присвячена величезна кількість робіт, існує багато готових програм. При виборі методу необхідно враховувати особливості МСЕ. Матриці жорсткості у МСЕ є рідко заповненими, що дозволяє при раціональній нумерації привести всі ненульові коефіцієнти ближче до головної діагоналі (стрічкова структура матриці). Існують програми, які враховують стрічкову структуру і суттєво зменшують час розв'язання системи рівнянь із такою матрицею [5].

Способи розв'язку систем лінійних рівнянь поділяються на прямі та ітераційні. Найбільш поширеними є прямі методи, серед яких найчастіше використовуються варіанти методу Гауса. Характерним представником ітераційних методів є метод Гауса-Зайделя (метод послідовної релаксації) [37, 38]. У системі Mathcad для розв'язання систем лінійних і нелінійних рівнянь використовується блок Given...Find.

Розв'язок задач динаміки залежить від виду правої частини диференціального рівняння коливань. При нульовій частині розв'язок зводиться до визначення власних частот і форм коливань і називається задачею на власні значення матриці динамічної жорсткості. При ненульовій правій частині приходимо до задач вимушених коливань. Докладно методи розв'язання задач динаміки розглядаються у [11, 35].

2.2.5. Обробка результатів

У МСЕ у варіанті методу переміщень безпосередньо одержують переміщення вузлів. Маючи переміщення, можна одержати всі інші параметри розв'язку, зокрема, сили у вузлах, напруження в точках об'єму.

Для визначення вузлових сил необхідно розв'язати рівняння рівноваги типу (2.15), записане для кожного скінченного елемента, відносно правої частини.

При визначенні напружень використовують формули зв'язку між напруженнями, деформаціями і переміщеннями.

Зазначимо, що оскільки деформації й напруження визначають за відомими переміщеннями з використанням операції диференціювання (згадайте формули Коші), точність їх визначення порівняно з переміщеннями погіршується. Рекомендується визначати напруження у вузлових точках як середнє від значень для кожного елемента.