

**Складання ІМ елементарних фігур та їх комбінацій
з використанням теорії кватерніонів**

Мета заняття – засвоєння використання математичного апарату кватерніонів для складання ІМ (ММ) елементарних геометричних примітивів.

2.1. Короткі теоретичні відомості про теорію кватерніонів як математичну основу складання інформаційних моделей (ІМ) складових ГВК

Кватерніон – це впорядкована четвірка дійсних чисел s, a, b, c , які зв'язані з чотирма базисними елементами $1, i, j, k$ (рис 3.1), що мають такі властивості:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1; i \cdot j = k; j \cdot k = i; k \cdot i = j; j \cdot i = -k; k \cdot j = -i; i \cdot k = -j. \quad (2.1.1)$$

Операції додавання і віднімання кватерніонів визначені покомпонентно. Множення кватерніонів визначається законом множення їх уявних одиниць. Будь який кватерніон може бути записаний у вигляді:

$$q = s \cdot 1 + a \cdot i + b \cdot j + c \cdot k, \quad (2.1.2)$$

де i, j, k – уявні одиниці.

Кожен кватерніон q можна записати у вигляді суми двох кватерніонів: скаляра (s) і вектора ($a \cdot i + b \cdot j + c \cdot k$), тобто:

$$q = s(q) + v(q) = [scalar; (vector)], \quad (2.1.3)$$

де $s(q) = s$ – скалярна частина кватерніона q ; $v(q) = a \cdot i + b \cdot j + c \cdot k$ – векторна частина кватерніона q .

Наприклад, у кватерніоні $q = 3 - 5 \cdot i + 4 \cdot k$ скалярна частина дорівнює 3, а векторна частина дорівнює $-5 \cdot i + 4 \cdot k$.

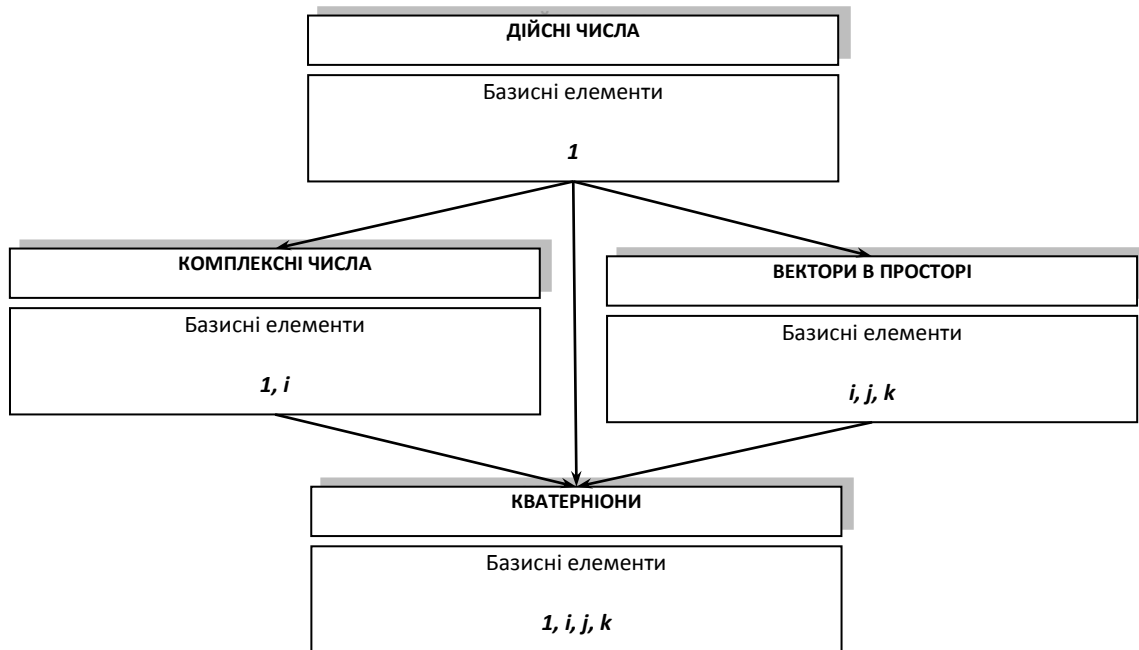


Рис. 2.1.1. Числові системи та базисні елементи

Іноді кватерніон зручно представляти набором чотирьох чисел: як число та 3D-вектор, тобто як гіперкомплексне число з трьома уявними одиницями i, j, k , що може бути записано у вигляді:

$$\begin{aligned}
 q &= [s, a, b, c] = [\text{scalar}, (\text{vector})] = [s, (a, b, c)] = \\
 &= s \cdot 1 + a \cdot i + b \cdot j + c \cdot k = s + v.
 \end{aligned}
 \tag{2.1.4}$$

Іноді достатньо обмежитись лише окремим видом кватерніонів – вектором. Кватерніон (2.1.2) приймає вид вектора у випадку рівності нулю його скалярної частини:

$$q(\text{vector}) = a \cdot i + b \cdot j + c \cdot k; \text{scalar} = 0.
 \tag{2.1.5}$$

Геометричний зміст операцій з кватерніонами виду (2.1.5) відповідає геометричному змісту операцій з векторами. Причому, довжина вектора $v = a \cdot i + b \cdot j + c \cdot k$ кватерніона q в тривимірному просторі визначається за виразом (2.1.6). Цей вектор направлений з початку координат O до точки M з координатами a, b, c (рис. 2.1.3). Тому:

$$|v| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2},
 \tag{2.1.6}$$

де v – векторна частина кватерніону (1.1.4); a, b, c – координати точки M , що задає напрямок вектору (рис. 2.1.2).

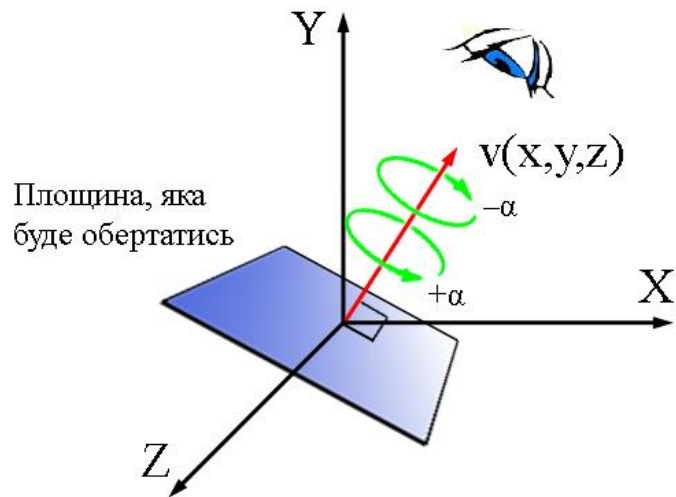


Рис. 2.1.2. Представлення кватерніону у вигляді вектора v і кута обертання α

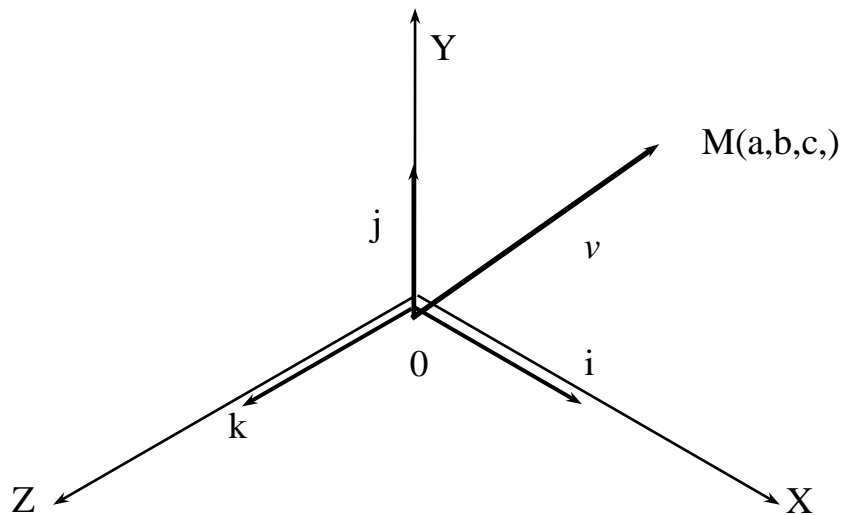


Рис. 2.1.3. Приклад розташування вектора v в тривимірному просторі

При описанні поворотів кватерніон представляють у вигляді:

$$q(v, \omega) = \cos \frac{\omega}{2} + v \cdot \sin \frac{\omega}{2}, \quad (2.1.7)$$

де v – одиничний вектор, однонаправлений із віссю повороту; ω – кут повороту.

Кватерніон несе в собі інформацію про оберт на заданий кут навколо вектора, початок якого збігається з початком поточної системи координат (рис. 2.1.2). Якщо значення кута позитивне ($+\alpha$), то оберт відбувається проти годинникової стрілки (якщо дивитись в напрямку, протилежному напрямку заданого вектора), в протилежному випадку ($-\alpha$) – за годинниковою стрілкою.

Важлива особливість кватерніонів полягає в тому, що підмножиною кватерніонів є дійсні числа $(s, 0, 0, 0)$; комплексні числа $(s, a, 0, 0)$; вектори в тривимірному просторі $(0, a, b, c)$ (рис. 2.1.3), а при виконанні дій множення кватерніонів не виконується закон комутативності, тобто $q_1 \cdot q_2 \neq q_2 \cdot q_1$.

Крім того три уявні базисні одиниці i, j, k кватерніона можуть бути інтерпретовані як базисні вектори декартової системи координат у тривимірному просторі.

Важливими для розглядуваної проблеми є такі властивості кватерніонів як комутативність та асоціативність за додаванням, комутативність за множенням, асоціативність за множенням та дистрибутивність:

1) кватерніони комутативні та асоціативні за додаванням:

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= q_2 + q_1; \\ (q_1 + q_2) + q_3 &= q_2 + (q_1 + q_3); \end{aligned}$$

2) кватерніони не комутативні за множенням:

$$q_1 \cdot q_2 \neq q_2 \cdot q_1;$$

3) кватерніони асоціативні за множенням:

$$(q_1 \cdot q_2) \cdot q_3 \neq q_1 \cdot (q_2 \cdot q_3);$$

4) кватерніони дистрибутивні:

$$q_1 \cdot (q_2 + q_3) = q_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot q_3.$$

Сферична лінійна інтерполяція здійснюється за виразом:

$$SLI(Q_1, Q_2, t) = (Q_1 \cdot \sin((1-t) \cdot \omega) + Q_2 \cdot \frac{\sin(t \cdot \omega)}{\sin(\omega)}), \quad (2.1.8)$$

де Q_1, Q_2 – вектори, що належать 4-D сфері, що перетинається площиною P , утвореною даними векторами та центром кола, $P \in (Q_1, Q_2, O)$ (рис. 2.1.4, а). Очевидно, що шукані при інтерполяції точки будуть належати даній площині; ω – кут між векторами Q_1 та Q_2 ; t – локальний час.

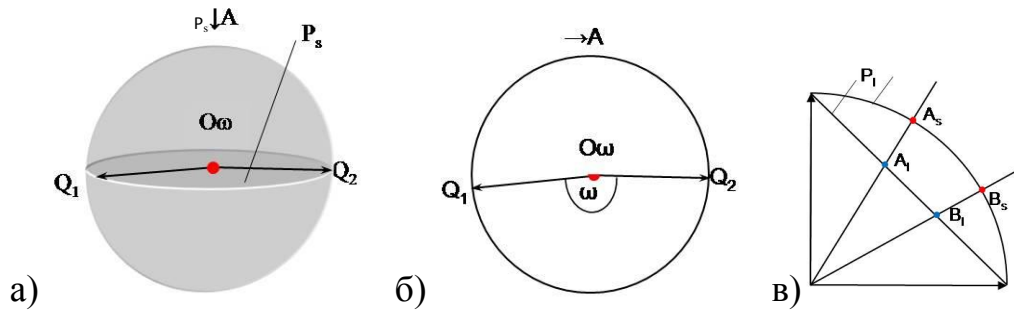


Рис. 2.1.4. Спрощена схема сферичної лінійної інтерполяції:

- а) неспівпадіння точок при лінійній (LI) та сферичній лінійній інтерполяції (SLI);
 б) 4-D сфера та площина, утворена векторами Q_1 та Q_2 і центром кола;
 в) вид A на рис. 2.1.4, б

2.2. Особливості складання інформаційних моделей елементів ГВК

Подання інформації про структурні складові ГВК у виді відповідних інформаційних моделей (ІМ) характеризується реалізацією методично обумовлених кроків в такій послідовності:

- аналіз конструкції складової;
- складання її так званої схеми заміщення (СЗ, тобто складання ниткової моделі складової);
- заміна рухомих та / або нерухомих елементів СЗ складової її 3D-еквівалентами з використанням геометричних примітивів (ГП);
- складання ІМ складової як такої з урахуванням її можливої рухомості або нерухомості.

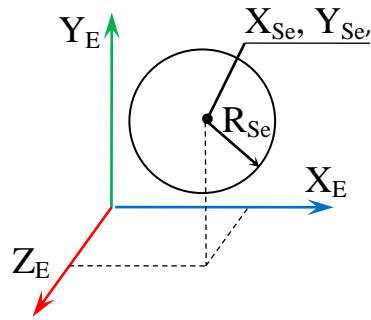
При складанні ІМ складових ГВК враховується той факт, що форма кожного із структурних елементів ГВК може бути описана з використанням кінцевої множини елементарних геометричних примітивів (ГП, Gp якими є;

- сфера Se ;
- циліндр Cr ;
- конус Ce ;
- паралелепіпед Pd ;
- трапеція Tz ;
- їх комбінацій.

Точка відліку при описі кожного з ГП формально описується так званою прив'язочною точкою з відповідними їй координатами при їх (ГП) подальшому (можливому) упорядкованому описі:

$$X_{Gp}, Y_{Gp}, Z_{Gp} | Gp \in (Pd, Cr, Se, Ce, Tz), \quad (2.2.1)$$

Нижче представлені приклади описів геометричних примітивів.



Опис ГП типу
“сфера”:

Se: $X_{Se}, Y_{Se}, Z_{Se}, R_{Se}$

Рис. 2.2.1. Базове розташування ГП типу “сфера” в СК елемента ГВК

Тут:

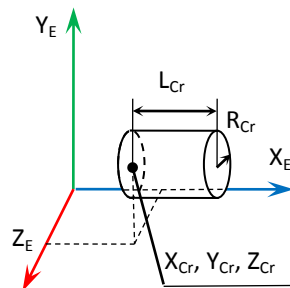
Se - ідентифікатор примітиву Se (sphere) – “сфера”;

X_{Se} – розташування сфери вздовж осі X в СК елемента E , мм;

Y_{Se} – розташування сфери вздовж осі Y в СК елемента E , мм;

Z_{Se} – розташування сфери вздовж осі Z в СК елемента E , мм;

R_{Se} – радіус сфери, мм.



Опис ГП типу “циліндр”:

r: $X_{Cr}, Y_{Cr}, Z_{Cr}, R_{Cr}, L_{Cr}$

Рис. 2.2.2. Базове розташування ГП типу “циліндр” в СК елемента ГВК

Тут:

Cr – ідентифікатор примітиву Cr (cylinder) – “циліндр”;

X_{Cr} – розташування циліндра вздовж осі X в СК елемента E , мм;

Y_{Cr} – розташування циліндра вздовж осі Y в СК елемента E , мм;

Z_{Cr} – розташування циліндра вздовж осі Z в СК елемента E , мм;

R_{Cr} – радіус циліндра, мм;

L_{Cr} – довжина циліндра, мм.

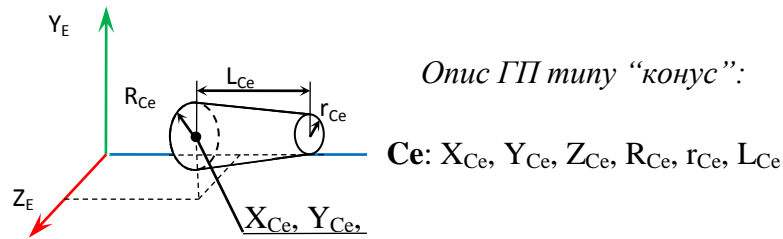


Рис. 2.2.3. Базове розташування ГП типу "конус" в СК елемента ГВК

Тут:

Ce – ідентифікатор примітиву Ce (cone) – "конус";

X_{Ce} – розташування конуса вздовж осі X в СК елемента E , мм;

Y_{Ce} – розташування конуса вздовж осі Y в СК елемента E , мм;

Z_{Ce} – розташування конуса вздовж осі Z в СК елемента E , мм;

R_{Ce} – лівий радіус конуса, мм;

r_{Ce} – правий радіус конуса, мм;

L_{Ce} – довжина конуса, мм.

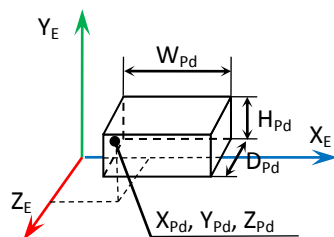


Рис. 2.2.4. Базове розташування ГП типу "паралелепіпед" в СК елемента ГВК

Тут:

Pd – ідентифікатор примітиву Pd (parallelepiped) – "паралелепіпед";

X_{Pd} – розташування паралелепіпеда вздовж осі X в СК елемента E , мм;

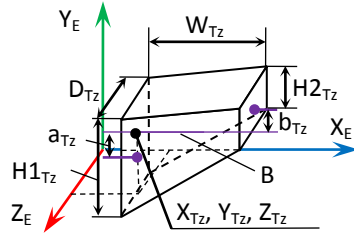
Y_{Pd} – розташування паралелепіпеда вздовж осі Y в СК елемента E , мм;

Z_{Pd} – розташування паралелепіпеда вздовж осі Z в СК елемента E , мм;

W_{Pd} – ширина паралелепіпеда, мм;

H_{Pd} – висота паралелепіпеда, мм;

D_{Pd} – глибина паралелепіпеда, мм.



Опис ГП типу “трапеція”:

TZ: $X_{Tz}, Y_{Tz}, Z_{Tz}, D_{Tz},$
 $W_{Tz}, H1_{Tz}, H2_{Tz}, a_{Tz}, b_{Tz}$

Рис. 2.2.5. Базове розташування ГП типу “трапеція” в СК елемента ГВК

Тут:

Tz – ідентифікатор примітиву Tz (Trapeze) – “трапеція”;

X_{Tz} – розташування трапеції вздовж осі X в СК елемента E , мм;

Y_{Tz} – розташування трапеції вздовж осі Y в СК елемента E , мм;

Z_{Tz} – розташування трапеції вздовж осі Z в СК елемента E , мм;

D_{Tz} – глибина трапеції, мм;

W_{Tz} – ширина трапеції, мм;

$H1_{Tz}$ – ліва висота трапеції, мм;

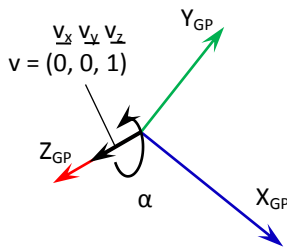
$H2_{Tz}$ – права висота трапеції, мм;

a_{Tz} – відстань між базовою віссю B та центром грані із висотою $H1$, мм;

b_{Tz} – відстань між базовою віссю B та центром грані із висотою $H2$, мм.

При потребі змінити орієнтацію ГП вказується кватерніон його орієнтації, що описується за рахунок 4-ох додаткових параметрів:

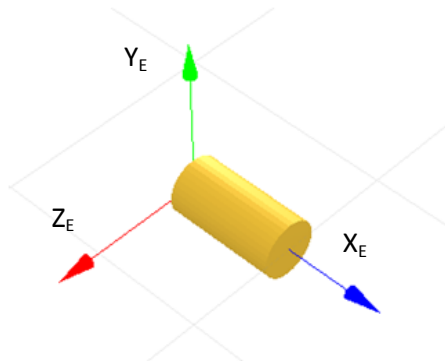
$$Q = [S_Q, X_Q, Y_Q, Z_Q]. \quad (2.2.2)$$



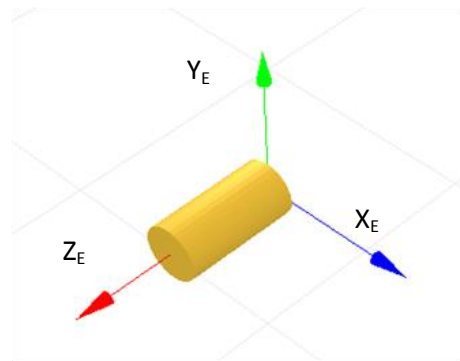
$$Q = (s, v) = (s, v_x, v_y, v_z) =$$

$$= \left(\cos \frac{\alpha}{2}, v_x \cdot \sin \frac{\alpha}{2}, v_y \cdot \sin \frac{\alpha}{2}, v_z \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \right)$$

Приклад ІМ (ММ) геометричного примітиву типу “циліндр” з осьовим розміром 200 мм до і після його орієнтації (обертання навколо осі Y на 90° за годинниковою стрілкою при погляді на вісь Y) представлено на рис. 2.2.6.



CR: 0, 0, 0, 50, 200



CR: 0, 0, 0, 50, 200, 0.7, 0, 0.7, 0

а)

б)

Рис. 2.2.6. Приклад опису та відповідної 3D-моделі ГП типу “циліндр”:

а) без кватерніона орієнтації;

б) із кватерніоном орієнтації

2.3. Варіанти індивідуальних завдань

для виконання практичного завдання № 2 студентами гр. АТ-26м

1. Скласти ІМ (ММ) геометричного примітиву типу “куля (сфера)” радіусом 25 мм з довільним положенням в системі координат (СК) цього примітиву (осі позначаються з нижнім правим індексом E), що повернута на 90 градусів за годинниковою стрілкою навколо осі X_E .
2. Скласти ІМ (ММ) геометричного примітиву типу “куля (сфера)” радіусом 40 мм з довільним положенням в системі координат (СК) цього примітиву (осі позначаються з нижнім правим індексом E), що повернута на 90 градусів за годинниковою стрілкою навколо осі Y_E .
3. Скласти ІМ (ММ) геометричного примітиву типу “куля (сфера)” радіусом 50 мм з довільним положенням в системі координат (СК) цього примітиву (осі позначаються з нижнім правим індексом E), що повернута на 90 за годинниковою стрілкою градусів навколо осі Z_E .
4. Скласти ІМ (ММ) геометричного примітиву типу “куля (сфера)” радіусом 60 мм з довільним положенням в системі координат (СК) цього примітиву (осі позначаються з нижнім правим індексом E), що повернута на 45 градусів проти годинникової стрілки навколо осі X_E .
5. Скласти ІМ (ММ) геометричного примітиву типу “куля (сфера)” радіусом 25 мм з довільним положенням в системі координат (СК) цього примітиву (осі позначаються з нижнім правим індексом E), що повернута на 90 градусів проти годинникової стрілки навколо осі Y_E .
6. Скласти ІМ (ММ) геометричного примітиву типу “куля (сфера)” радіусом 55 мм з довільним положенням в системі координат (СК) цього примітиву (осі позначаються з нижнім правим індексом E), що повернута на 90 градусів проти годинникової стрілки навколо осі Z_E .
7. Скласти ІМ (ММ) геометричного примітиву типу “куля (сфера)” радіусом 52 мм з довільним положенням в системі координат (СК) цього примітиву (осі позначаються з нижнім правим індексом E), що повернута на 90 градусів проти годинникової стрілки навколо осі X_E .

8. Скласти ІМ (ММ) геометричного примітиву типу “циліндр” довжиною 52 мм з довільними іншими його розмірами та довільним його положенням в системі координат (СК) цього примітиву (осі позначаються з нижнім правим індексом E), що повернута на 90 градусів проти годинникової стрілки навколо осі X_E .
9. Скласти ІМ (ММ) геометричного примітиву типу “циліндр” діаметром 25 мм з довільними іншими його розмірами та довільним його положенням в системі координат (СК) цього примітиву (осі

- позначаються з нижнім правим індексом E), що повернутий на 90 градусів за годинниковою стрілкою навколо осі Z_E .
10. Скласти ІМ (ММ) геометричного примітиву типу “циліндр” довжиною 130 мм з довільними іншими його розмірами та довільним його положенням в системі координат (СК) цього примітиву (осі позначаються з нижнім правим індексом E), що повернутий на 90 градусів проти годинникової стрілки навколо осі Y_E .
 11. Скласти ІМ (ММ) геометричного примітиву типу “циліндр” діаметром 50 мм з довільними іншими його розмірами та довільним його положенням в системі координат (СК) цього примітиву (осі позначаються з нижнім правим індексом E), що повернутий на 90 градусів проти годинникової стрілки навколо осі X_E .
 12. Скласти ІМ (ММ) геометричного примітиву типу “циліндр” довжиною 66 мм з довільними іншими його розмірами та довільним його положенням в системі координат (СК) цього примітиву (осі позначаються з нижнім правим індексом E), що повернутий на 90 градусів проти годинникової стрілки навколо осі X_E .
 13. Скласти ІМ (ММ) геометричного примітиву типу “циліндр” діаметром 77 мм з довільними іншими його розмірами та довільним його положенням в системі координат (СК) цього примітиву (осі позначаються з нижнім правим індексом E), що повернутий на 90 градусів проти годинникової стрілки навколо осі Y_E .
 14. Скласти ІМ (ММ) геометричного примітиву типу “циліндр” довжиною 91 мм з довільними іншими його розмірами та довільним його положенням в системі координат (СК) цього примітиву (осі позначаються з нижнім правим індексом E), що повернутий на 90 градусів проти годинникової стрілки навколо осі X_E .

 15. Скласти ІМ (ММ) геометричного примітиву типу “конус” довжиною 85 мм з довільними іншими його розмірами та довільним його положенням в системі координат (СК) цього примітиву (осі позначаються з нижнім правим індексом E), що повернутий на 90 градусів за годинниковою стрілкою навколо осі X_E .
 16. Скласти ІМ (ММ) геометричного примітиву типу “конус” з максимальним діаметром 85 мм з довільними іншими його розмірами та довільним його положенням в системі координат (СК) цього примітиву (осі позначаються з нижнім правим індексом E), що повернутий на 90 градусів проти годинникової стрілки навколо осі Y_E .
 17. Скласти ІМ (ММ) геометричного примітиву типу “конус” довжиною 35 мм з довільними іншими його розмірами та довільним його положенням в системі координат (СК) цього примітиву (осі позначаються з нижнім правим індексом E), що повернутий на 90 градусів за годинниковою стрілкою навколо осі Z_E .
 18. Скласти ІМ (ММ) геометричного примітиву типу “конус” максимальним діаметром 77 мм з довільними іншими його розмірами та довільним його положенням в системі координат (СК) цього

- примітиву (осі позначаються з нижнім правим індексом E), що повернутий на 90 градусів за годинниковою стрілкою навколо осі X_E .
- 19.Скласти ІМ (ММ) геометричного примітиву типу “конус” довжиною 62 мм з довільними іншими його розмірами та довільним його положенням в системі координат (СК) цього примітиву (осі позначаються з нижнім правим індексом E), що повернутий на 90 градусів проти годинникової стрілки навколо осі Y_E .
 - 20.Скласти ІМ (ММ) геометричного примітиву типу “конус” з мінімальним діаметром 55 мм з довільними іншими його розмірами та довільним його положенням в системі координат (СК) цього примітиву (осі позначаються з нижнім правим індексом E), що повернутий на 90 градусів проти годинникової стрілки навколо осі Z_E .
 - 21.Скласти ІМ (ММ) геометричного примітиву типу “конус” довжиною 44 мм з довільними іншими його розмірами та довільним його положенням в системі координат (СК) цього примітиву (осі позначаються з нижнім правим індексом E), що повернутий на 90 градусів проти годинникової стрілки навколо осі X_E .
 - 22.Скласти ІМ (ММ) геометричного примітиву типу “конус” з мінімальним діаметром 44 мм з довільними іншими його розмірами та довільним його положенням в системі координат (СК) цього примітиву (осі позначаються з нижнім правим індексом E), що повернутий на 90 градусів за годинниковою стрілкою навколо осі Y_E .

 - 23.Скласти ІМ (ММ) геометричного примітиву типу “паралелепіпед” з найменшим розміром однієї із сторін 44 мм з довільними іншими його розмірами та довільним його положенням в системі координат (СК) цього примітиву (осі позначаються з нижнім правим індексом E), що повернутий на 90 градусів за годинниковою стрілкою навколо осі Y_E .
 - 24.Скласти ІМ (ММ) геометричного примітиву типу “паралелепіпед” з найбільшим розміром однієї із сторін 99 мм з довільними іншими його розмірами та довільним його положенням в системі координат (СК) цього примітиву (осі позначаються з нижнім правим індексом E), що повернутий на 90 градусів проти годинникової стрілки навколо осі Z_E .
 - 25.Скласти ІМ (ММ) геометричного примітиву типу “паралелепіпед” з вертикальним розміром однієї із сторін 88 мм з довільними іншими його розмірами та довільним його положенням в системі координат (СК) цього примітиву (осі позначаються з нижнім правим індексом E), що повернутий на 90 градусів за годинниковою стрілкою навколо осі X_E .
 - 26.Скласти ІМ (ММ) геометричного примітиву типу “паралелепіпед” з найменшим горизонтальним розміром однієї із сторін 44 мм з довільними іншими його розмірами та довільним його положенням в системі координат (СК) цього примітиву (осі позначаються з нижнім правим індексом E), що повернутий на 90 градусів проти годинникової стрілки навколо осі Y_E .

- 27.Скласти ІМ (ММ) геометричного примітиву типу “паралелепіпед” з найменшим розміром однієї із сторін 44 мм з довільними іншими його розмірами та довільним його положенням в системі координат (СК) цього примітиву (осі позначаються з нижнім правим індексом E), що повернутий на 90 градусів за годинниковою стрілкою навколо осі X_E .
- 28.Скласти ІМ (ММ) геометричного примітиву типу “паралелепіпед” з найменшим розміром однієї із сторін 44 мм з довільними іншими його розмірами та довільним його положенням в системі координат (СК) цього примітиву (осі позначаються з нижнім правим індексом E), що повернутий на 90 градусів проти годинникової стрілки навколо осі Z_E .

- УВАГА!** 1. Номер варіанта індивідуального завдання відповідає номеру, що випадковим чином отримано за генератором випадкових чисел в день проведення заняття.
2. Термін виконання роботи - максимум до наступного практичного заняття.
3. Номер варіанта практичного завдання 2 є номером варіанта для виконання всіх наступних практичних занять.
4. Звіти щодо виконаної цієї та інших робіт, включаючи презентативний матеріал, з навчальної дисципліни ПТ в АВ висилати на мою електронну адресу kiril_va@yahoo.com

Список студентів гр. АТ-26м та варіанти інд. завдання для виконання практичної роботи №2

1	Безпалюк	Дмитро	14
2	Вербило	Владислав	4
3	Гераймович	В'ячеслав	1
4	Демещук	Олексій	3
5	Іскоростенський	Вадим	17
6	Кирилюк	Владислав	10
7	Краснодубець	Альона	13
8	Логвінчук	Іван	27

9	Несік	Богдан	11
10	Порайко	Іван	28
11	Рішан	Ілля	2
12	Сейко	Антон	15
13	Семенишин	Сергій	24
14	Сікан	Андрій	12
15	Скубенко	Ярослав	9
16	Соломко	Олексій	16
17	Ставінський	Олександр	5
18	Ткачук	Даниїла	6
19	Труфаненко	Андрій	21
20	Ударов	Євгеній	18
21	Федюнін	Сергій	7
22	Ходаківський	Максим	8

2.4. Зміст звіту виконання практичної роботи №2

1. Назва практичної роботи.

1. Мета роботи.

2. Короткі теоретичні відомості щодо теорії кватерніонів.

3. Зміст індивідуального завдання.

4. Отриманий результат виконання роботи.

5. Висновки.

2.5. Інформаційні джерела

Передові технології в автоматизованому виробництві. Практикум: навч.-метод. посібник // В.А. Кирилович, Р.С. Моргунов, Л.В. Дімітров, П.П. Мельничук; за заг. ред. В.А. Кириловича. – Житомир: Видавець О.О. Євенок, 2016. –144 с.