

## Лекція 2

### МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ. ТЕОРІЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ

Метод скінченних елементів (МСЕ) є одним із найбільш поширених чисельних методів розрахунку конструкцій. Популярність його пояснюється успішним поєднанням порівняно простого алгоритму з можливістю застосування його до розрахунку систем довільної складності.

Суттєвою перевагою методу є ефективність програмного забезпечення, створеного на алгоритмах МСЕ.

Ідеї, на яких базується МСЕ, виникли при розробці матричних методів розрахунку стержневих конструкцій, зокрема, методу сил і методу переміщень. Широкому застосуванню цих методів завадила відсутність ефективних машинних методів розв'язку великих систем алгебраїчних рівнянь.

Бурхливий розвиток обчислювальної техніки сприяв зростанню інтересу інженерів до матричних методів. На можливість розповсюдження цих методів на дво- і тривимірні конструкції вперше звернув увагу Аргіріс. Подальший розвиток МСЕ був пов'язаний з розрахунками конструкцій у таких галузях як суднобудування, літакобудування, цивільне будівництво, машинобудування.

Розвиток МСЕ зараз відбувається у двох паралельних напрямках, які доповнюють один одного. Один із них, і історично перший, пов'язаний з інженерними розрахунками і тлумаченням МСЕ як методу розрахунку конструкцій шляхом синтезу з окремих елементів (підконструкцій).

Другий напрямок, математичний, розглядає МСЕ як варіант чисельних методів, відносячи його до групи так званих варіаційно-різницевого методів. Аналізу МСЕ з цієї точки зору присвячені численні публікації. Виявлений зв'язок МСЕ з варіаційними методами привів до широкого його використання при розв'язку задач в інших областях техніки.

Ще більш широкою сфера застосування МСЕ стала після того, як було показано, що рівняння МСЕ можна одержати за допомогою методів зважених нев'язок, зокрема методу Бубнова-Гальоркіна.

Встановлення цього факту відіграло важливу роль у теоретичному обґрунтуванні МСЕ і дозволило застосувати його для розв'язку довільних диференціальних рівнянь. За останні 25 років інтенсивного розвитку МСЕ став основним методом розв'язку задач будівельної механіки, механіки деформівного твердого тіла, теплопровідності, гідромеханіки тощо.

Практичне застосування методу охоплює все нові та нові області інженерного аналізу.

На цей час МСЕ існує і розвивається у трьох варіантах:

- МСЕ як узагальнення методу переміщень, сил і змішаного методу будівельної механіки;
- МСЕ як варіант методу Рітца мінімізації деякого функціонала, що описує стан системи;
- МСЕ як варіант методу зважених нев'язок.

Основна ідея методу скінченних елементів полягає у тому, що довільну неперервну величину (температуру, переміщення, час тощо) можна апроксимувати дискретною моделлю, яка будується на множині кусково-неперервних функцій, визначених на скінченній кількості підобластей. При побудові дискретної моделі неперервної величини реалізується така послідовність дій:

1) У заданій області фіксують скінченну кількість точок, які називають вузлами. Значення неперервної величини у кожній вузловій точці вважаються розшукуваними невідомими;

2) Область визначення неперервної величини розбивається з урахуванням вузлових точок на скінченну кількість підобластей, які називають елементами;

3) Неперервна величина апроксимується на кожному елементі поліномом, який визначається за допомогою вузлових значень цієї величини. Поліноми підбираються таким чином, щоб зберегти неперервність величини на границях елемента. Елементи мають спільні вузлові точки і в сукупності апроксимують форму області.

Задача визначення вузлових значень неперервної величини виявляється більш простою і може бути зведена до розв'язку систем алгебраїчних рівнянь, на відміну від реальної задачі, яка описується диференціальними рівняннями.

Дуже важливим фактором є можливість виділення типових елементів-підобластей, що дозволяє записати функцію-поліном для кожного елемента незалежно від його майбутнього використання. Зазначимо, що для апроксимації розшукуваної функції можна використати декілька типів елементів із різними розмірами і властивостями.

Після розв'язання системи алгебраїчних рівнянь відносно вузлових значень розшукуваної величини значення цієї величини в інших точках може бути знайдене з урахуванням інтерполяційного полінома на даному елементі.

На цей час метод скінченних елементів є найбільш поширеним методом розрахунку конструкцій і, взагалі, найбільш універсальним методом числового розв'язку задач механіки. Існують численні обчислювальні комплекси, які реалізують алгоритми МСЕ, розроблене математичне і програмне забезпечення. Однак для інженера, якому необхідно в більшості випадків розв'язувати задачі середньої складності, використання таких комплексів неможливе з декількох причин.

По-перше, використання обчислювальних комплексів потребує значної підготовки і більш-менш глибокого знайомства з основами їх роботи, не кажучи вже про необхідність мати у власному користуванні програму і відповідну ЕОМ. По-друге, часто при спробі використати універсальну програму виявляється, що якраз для даної задачі вона і не підходить. Існує і суто психологічний ефект, який заважає використанню універсальних програм. Усі вони працюють за принципом “чорного ящика”, коли користувач вводить дані і одержує результат, не маючи уявлення про те, як ці дані оброблялись і, головне, не маючи змоги переглянути результати розрахунку на якомусь з етапів і, можливо, внести корективи.

# ТЕОРІЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ

## 1.1. Навантаження і напруження. Тензор напружень

Розглянемо довільне тіло з накладеними на нього в'язями, яке знаходиться під дією поверхневих і об'ємних навантажень (рис. 1.1).

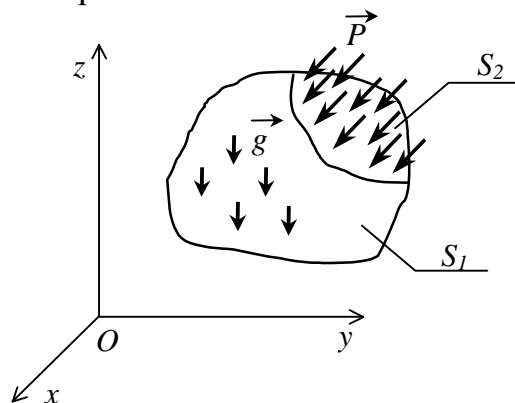


Рис. 1.1. Довільне тіло під дією навантажень

Поверхневі і масові сили визначаються інтенсивностями, які в загальному випадку залежать від координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , пов'язаних із тілом. Проекції поверхневих сил на осі координат позначимо  $p_x, p_y, p_z$ , а проекції масових сил –  $q_x, q_y, q_z$ .

Під дією масових навантажень у тілі з'являються внутрішні сили взаємодії – напруження. Напруження є умовними силами, які введені у механіці суцільного середовища як заміна атомних і молекулярних сил. Напруження діють у кожній площадці, виділеній в об'ємі, залежать від орієнтації площадки, проведеної через дану точку і визначаються у деякій точці  $K$  як границя відношення середньої сили, діючої у площадці, до величини цієї площадки, якщо остання стягується у точку  $K$

$$\vec{p} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A}$$

Означене таким чином напруження є вектором.

Множина напружень у площадках, проведених через дану точку, називається напруженим станом у точці.

Напружений стан у точці можна описати, задаючи вектори напружень у трьох взаємно перпендикулярних площадках, проведених через дану

точку (рис. 1.2, а-в). Для зручності й наочності замість цих трьох площадок розглядають грані куба, виділеного в околі точки (рис. 1.2, г). Розкладаючи вектори напружень у кожній з граней на складові по координатних осях, одержимо дев'ять компонент напружень, які складають матрицю

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

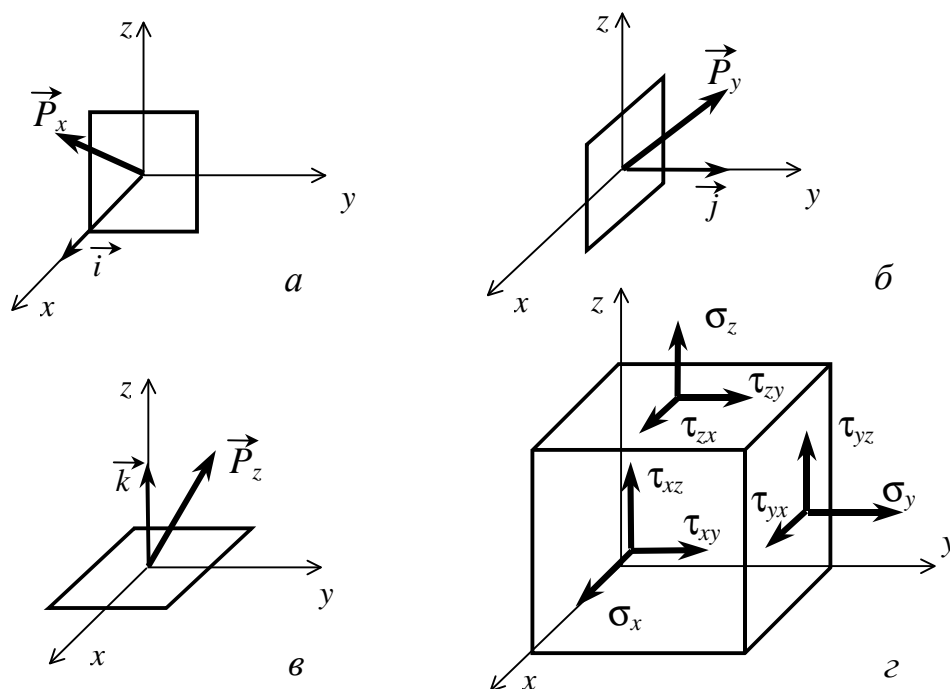


Рис. 1.2. Моделювання напруженого стану у точці

Додатні напрямки напружень збігаються з напрямками координатних осей.

Оскільки через точку можна провести нескінченну кількість площадок, то в одній і тій самій точці можна записати нескінченну кількість матриць типу (1.1). Кожну з цих матриць можна розглядати як проекції деякого математичного об'єкта – тензора. У тривимірній системі координат тензор має своїми компонентами вектори напружень, діючих у трьох взаємно перпендикулярних площадках (тобто на гранях умовного куба) (рис.1.2, г).

У векторній нотації

$$\vec{T}_\sigma = \vec{P}_x \vec{i} + \vec{P}_y \vec{j} + \vec{P}_z \vec{k}.$$

Таким чином, можна говорити, що напружений стан у точці визначається тензором  $\vec{T}_\sigma$ , а напружений стан у площадці, яка проведена через цю точку, – вектором  $\vec{P}_n$ , де  $\vec{n}$  – вектор нормалі до площадки.

Покажемо, як за однією проекцією тензора (тобто матрицею  $\mathbf{T}_\sigma$ ) можна знайти всі інші проекції. Розглянемо дві ортогональні декартові системи координат  $Oxyz, Ox'y'z'$  (рис. 1.3). Взаємне положення осей визначимо матрицею напрямних косинусів

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \cos(x', x), & \alpha_{12} &= \cos(x', y), & \alpha_{13} &= \cos(x', z), \\ \alpha_{21} &= \cos(y', x), & \alpha_{22} &= \cos(y', y), & \alpha_{23} &= \cos(y', z), \\ \alpha_{31} &= \cos(z', x), & \alpha_{32} &= \cos(z', y), & \alpha_{33} &= \cos(z', z). \end{aligned}$$

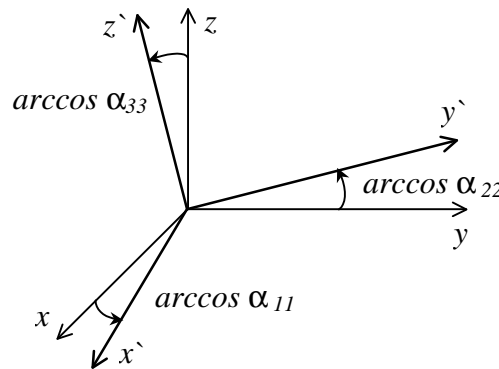


Рис. 1.3. Декартова система координат при повороті осей

Згідно з правилом перетворення декартових тензорів другого рангу [16], компоненти тензора напружень у двох системах координат пов'язані співвідношенням

$$\mathbf{T}'_\sigma = \Lambda \mathbf{T}_\sigma \Lambda^T. \quad (1.3)$$

Маючи одну з проекцій тензора напружень, можна також знайти вектор напружень у довільній площадці (рис. 1.4), для якої є відомим вектор напрямної нормалі  $\vec{n}$ . Розглянемо для цього елементарний тетраедр з вершиною в точці  $O$ . Очевидно, площі граней, що збігаються з координатними площинами, дорівнюють  $dSn_x, dSn_y, dSn_z$ , де  $n_x = \cos \alpha$ ,  $n_y = \cos \beta$ ,  $n_z = \cos \gamma$ .

Рівняння рівноваги сил, що діють на тетраедр (див. рис. 1.4),

$$\vec{P}dS = \vec{P}_x dSn_x + \vec{P}_y dSn_y + \vec{P}_z dSn_z, \quad (1.4)$$

у матричній формі

$$\mathbf{P} = \mathbf{T}_\sigma \mathbf{n}, \quad (1.5)$$

де  $\mathbf{P} = (X \ Y \ Z)^T$ ;  $X, Y, Z$  – проекції вектора  $\vec{P}$  на осі  $x, y, z$ ;

$$\mathbf{n} = (n_1 \ n_2 \ n_3)^T.$$

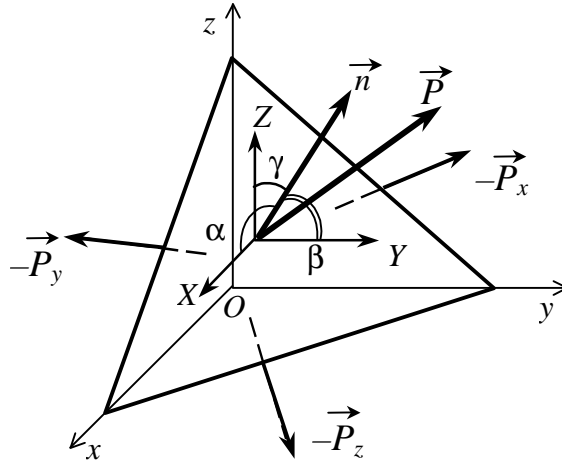


Рис. 1.4. Напруження у довільній площадці

Таким чином, щоб визначити компоненти вектора напружень у площадці  $dS$ , необхідно помножити матрицю тензора напружень на вектор напрямних косинусів нормалі до площадки. Компоненти вектора  $\mathbf{P}$ , паралельні осям  $x, y, z$ , не перпендикулярні й не дотичні до площадки  $dS$ , а отже не зовсім зручні для характеристики напружень у площадці. Тому знайдемо нормальну і дотичну складові вектора  $\mathbf{P}$ . Проекція вектора  $\mathbf{P}$  на нормаль визначається як скалярний добуток

$$\sigma_n = \vec{P} \cdot \vec{n},$$

або у матричній формі

$$\sigma_n = \mathbf{n}^T \mathbf{T}_\sigma \mathbf{n}. \quad (1.6)$$

Дотичні напруження

$$\tau_n = \sqrt{\vec{P}^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{\mathbf{n}^T \mathbf{T}_\sigma \mathbf{T}_\sigma^T \mathbf{n} - (\mathbf{n}^T \mathbf{T}_\sigma \mathbf{n})^2}. \quad (1.7)$$

Для визначення напружень у площадці і компонент тензора напружень у нових координатних осях згідно з (1.5), (1.6), (1.7) можна скористатися безпосередньо операторами системи MathCAD.

## 1.2. Головні напруження і головні площадки

З нескінченної кількості похилих площадок можна знайти такі, на яких відсутні дотичні напруження, тобто діють лише нормальні напруження. Ці площадки, а також напруження, що діють у них, називають головними. Для кожної такої площадки можна записати

$$\vec{P} = \sigma \vec{n}, \quad (1.8)$$

де  $\sigma$  – модуль вектора напружень.

Враховуючи (1.5), з (1.8) дістанемо

$$(\mathbf{T}_\sigma - \sigma \mathbf{E}) \mathbf{n} = \mathbf{0}. \quad (1.9)$$

Матричне рівняння (1.9) містить три скалярні рівняння. Система однорідних рівнянь (1.9) має ненульові розв'язки лише тоді, коли  $\det(\mathbf{T}_\sigma - \sigma \mathbf{E}) = 0$ . Розкривши визначник, одержимо многочлен третього степеня відносно  $\sigma$  (характеристичне рівняння матриці  $\mathbf{T}_\sigma$ )

$$\sigma^3 - \Sigma_1 \sigma^2 + \Sigma_2 \sigma - \Sigma_3 = 0, \quad (1.10)$$

де  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$  – інваріанти напруженого стану:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \\ \Sigma_2 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix}; \\ \Sigma_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Корені рівняння (1.10) є власними значеннями матриці  $\mathbf{T}_\sigma$  і головними напруженнями, які відшукуються. Можна показати, що три головні напруження діють у взаємно перпендикулярних площадках, а матриця тензора напружень у головних осях має вигляд

$$\mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}. \quad (1.12)$$

У загальному випадку рівняння (1.10) має три дійсні корені  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . Оскільки, як буде показано далі, матриця  $\mathbf{T}_\sigma$  є симетричною відносно головної діагоналі, характеристичне рівняння (1.10) завжди має дійсні корені, хоча серед них можуть бути і нульові.

Якщо  $\Sigma_3 = 0$ , то рівняння (1.10) має один нульовий корінь, а два інші визначаються з рівняння

$$\sigma(\sigma^2 - \Sigma_1 \sigma + \Sigma_2) = 0, \quad (1.13)$$

звідки

$$\sigma = 0, \quad \sigma = \frac{\Sigma_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Sigma_1}{2}\right)^2 - \Sigma_2}. \quad (1.14)$$

Якщо  $\Sigma_3 = \Sigma_2 = 0$ , то рівняння (1.10) має лише один ненульовий корінь  $\sigma = \Sigma_1$ .

Напружений стан, при якому одне з трьох головних напружень дорівнює нулю, називають плоским, а якщо два напруження нульові – лінійним, або одновісним. У загальному випадку напружений стан називають об'ємним.

Для визначення головних напружень можна скористатися програмами розв'язування кубічного рівняння (1.10) або методами визначення власних

значень матриці  $\mathbf{T}_\sigma$ , не пов'язаними з утворенням характеристичного рівняння, так званими методами обертань [37], які приводять матрицю до діагонального вигляду. У системі MathCAD для визначення коренів многочленів використовують функції `polyroots()`, `eigenvals()`.

Кожному з головних напружень відповідає напрям, для якого напрямні косинуси подаються як розв'язки системи рівнянь

$$(\mathbf{T}_\sigma - \sigma_i \mathbf{E}) \mathbf{n}_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1.15)$$

де  $\mathbf{n}_i = (n_{1i} \ n_{2i} \ n_{3i})^T$  – вектори напрямних косинусів площадок із головними напруженнями  $\sigma_i$ ,  $\mathbf{E}$  – одинична матриця.

Наприклад, вектор напрямних косинусів до площадки, де діє головне напруження  $\sigma_1$ , є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_1)n_{11} + \tau_{xy}n_{21} + \tau_{xz}n_{31} &= 0; \\ \tau_{yx}n_{11} + (\sigma_y - \sigma_1)n_{21} + \tau_{yz}n_{31} &= 0; \\ \tau_{zx}n_{11} + \tau_{zy}n_{21} + (\sigma_z - \sigma_1)n_{31} &= 0, \end{aligned} \quad (1.16)$$

за умови

$$n_{11}^2 + n_{21}^2 + n_{31}^2 = 1.$$

У розрахунках на міцність широко використовуються дві характерні складові тензора напружень: шаровий тензор  $\bar{\mathbf{I}}\bar{\mathbf{I}}_\sigma$  і тензор-девіатор  $\bar{\mathbf{D}}_\sigma$ , матриці яких мають вигляд

$$\mathbf{I}\mathbf{I}_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_c & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_c & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_c & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_c & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_c \end{bmatrix}, \quad (1.17)$$

$$\sigma_c = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).$$

Скористаємося виразами для інваріантів тензора напружень і запишемо інваріанти цих двох тензорів

$$\Sigma_1^{III} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3\sigma_c, \quad \Sigma_2^{III} = 3\sigma_c^2, \quad \Sigma_3^{III} = \sigma_c^3,$$

$$\Sigma_1^D = 0,$$

$$\Sigma_2^D = \frac{1}{6}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)], \quad (1.18)$$

$$\Sigma_3^D = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_c & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_c & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_c \end{bmatrix}.$$

У теорії пластичності широко використовується поняття інтенсивності дотичних напружень  $\tau_i$ , яка визначається як



$$\begin{aligned} \tau_i &= \sqrt{\Sigma_2^D} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

### 1.3. Переміщення і деформації

При навантаженні в кожному тілі відбувається зміна відносного положення точок об'єму. Кожна точка переміщується на деяку величину, проекції якої на осі координат, пов'язані з тілом, позначимо  $u, v, w$ .

Матрицю  $(u \ v \ w)^T$  називають вектором переміщень у точці.

Відносні деформації у кожній точці об'єму можна описати за допомогою тензора деформацій, який будується за аналогією з тензором напружень. Матриця тензора деформацій має вигляд

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \quad (1.20)$$

де  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  – лінійні відносні деформації у напрямках  $x, y, z$ ,

$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  – кутові деформації у площадках  $Oxy, Oyz, Oxz$ .

За аналогією з теорією напруженого стану можна показати, що в кожній точці мають місце три взаємно перпендикулярних напрямки, в яких об'єм тільки розтягується або стискається, а деформації зсуву відсутні. Ці деформації називають головними. Вони визначаються як корені кубічного рівняння

$$\varepsilon^3 - I_1\varepsilon^2 + I_2\varepsilon - I_3 = 0, \quad (1.21)$$

де  $I_1, I_2, I_3$  – інваріанти тензора деформацій

$$I_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z,$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \varepsilon_z \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix}. \quad (1.22)$$

Матриця шарового тензора деформації –

$$\mathbf{Ш}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_c & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_c & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_c \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_c = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z). \quad (1.23)$$

Матриця девіатора –

$$\mathbf{D}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_c & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_c & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_c \end{bmatrix}. \quad (1.24)$$

Шаровий тензор деформацій характеризує об'ємну деформацію у точці тіла, а девіатор – деформацію зміни форми. Зокрема, перший інваріант шарового тензора

$$I_1^{III} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (1.25)$$

характеризує відносну зміну об'єму. Його можна зв'язати з осьовою деформацією в напрямку, перпендикулярному октаедричній<sup>\*)</sup> площадці

$$\varepsilon_{окт} = \varepsilon_c = I_1/3. \quad (1.26)$$

Другий інваріант девіатора деформацій

$$I_2^D = \frac{1}{6}[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)] \quad (1.27)$$

можна зв'язати з кутом зсуву на цій же площадці

$$\gamma_{окт} = \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}. \quad (1.28)$$

У теорії пластичності використовується поняття інтенсивності деформацій зсуву  $\gamma_i$ , яке визначається як

$$\gamma_i = 2\sqrt{I_2^D} = \sqrt{\frac{2}{3}[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)]}, \quad (1.29)$$

а також інтенсивності поздовжніх деформацій

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{3}}\gamma_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}. \quad (1.30)$$

<sup>\*)</sup> Площадка, рівнонахилена до головних осей

## 1.4. Основні рівняння теорії пружності

У теорії пружності об'єктом дослідження є тіла із суцільного, однорідного і пружного матеріалу. Вважається, що для матеріалу справедливий закон Гука, а деформації достатньо малі, щоб нехтувати їх квадратами.

Основні рівняння теорії пружності складаються зі статичних, геометричних і фізичних рівнянь.

### 1.4.1. Статичні рівняння

Щоб одержати залежності між напруженнями в довільній точці об'єму, розглянемо елементарний паралелепіпед, виділений в околі точки (рис. 1.6). Внаслідок змінності напружень вздовж осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  вектори напружень у площадках, віддалених від координатних на відстані  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , відрізнятимуться від тих, що діють у координатних площадках, на величину приросту, пов'язаного з приростом відповідних координат. Крім напружень, у площадках на елемент можуть діяти й масові сили, вектор яких  $\vec{p}dxdydz$ . Оскільки елемент в об'ємі перебуває в рівновазі, його можна виділити окремо і виконати відповідну заміну в'язей (у даному разі напруженнями на площадках і об'ємними силами). Ця операція ґрунтується на аксіомі звільнення від в'язей, яка розглядається в курсі теоретичної механіки.

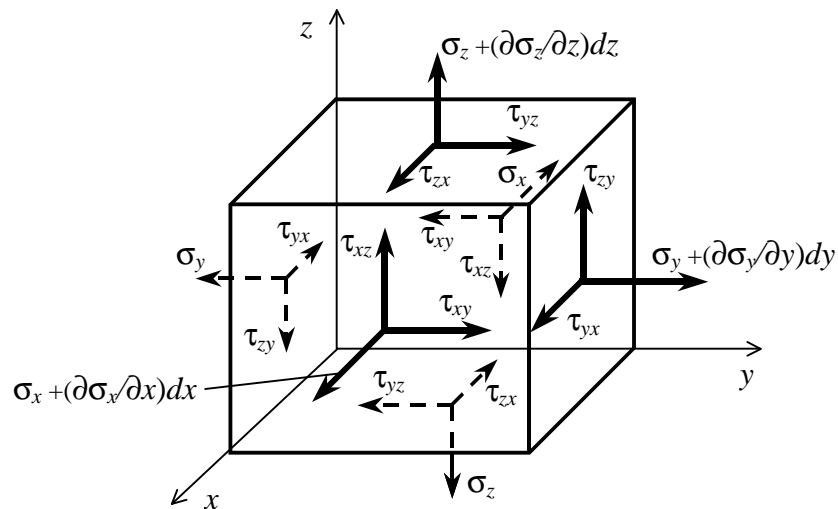


Рис. 1.6. Елементарний паралелепіпед в околі точки

Умови рівноваги елемента (рівність нулю головного вектора і головного момента сил, які діють на нього) приводять до таких рівнянь:

$$\frac{\partial}{\partial x} \vec{p}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{p}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{p}_z + \vec{p} = 0, \quad (1.31)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

Перше і називають, власне, рівнянням рівноваги. У матричній формі його можна записати так:

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \tau_{yx} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \tau_{xy} \\ \sigma_y \\ \tau_{zy} \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_V \\ Y_V \\ Z_V \end{pmatrix} = (0). \quad (1.32)$$

$$\begin{pmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{yx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix}.$$

Останні рівності називаються законом парності дотичних напружень. З нього випливає, що з дев'яти компонент матриці тензора напружень лише шість є незалежними (матриця  $\mathbf{T}_\sigma$  є симетричною відносно головної діагоналі). Це дає змогу записати незалежні компоненти тензора напружень у формі вектора-стовпця

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx})^T. \quad (1.33)$$

З урахуванням цього позначення рівняння рівноваги можна подати у вигляді

$$\mathbf{A}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{p}_V = \mathbf{0}, \quad (1.34)$$

де  $\mathbf{p}_V = \{X_V \quad Y_V \quad Z_V\}^T$ ,

$\mathbf{A}$  – матриця диференціальних операторів

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (1.35)$$

## 1.4.2. Геометричні рівняння

Проекції переміщень точок об'єму, що деформується, на координатні осі  $x$ ,  $y$ ,  $z$  позначимо відповідно  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Переміщення  $u$ ,  $v$ ,  $w$  є функціями координат, тобто в різних точках неоднакові. Неоднаковість переміщень у сусідніх точках у загальному випадку призводить до появи деформації.

Розглянемо переміщення елементарного квадрата у площині  $XOY$  (рис. 1.7). Якщо переміщення точки  $A$  у напрямках осей  $X$ ,  $Y$  позначити відповідно  $u$  і  $v$ , то переміщення точок  $B$  і  $C$  на сторонах квадрата відрізнятимуться від  $u$  і  $v$  на величини, зумовлені приростом координат  $x$  і  $y$  на  $dx$  і  $dy$  при переході від  $A$  до  $B$  і  $C$ .

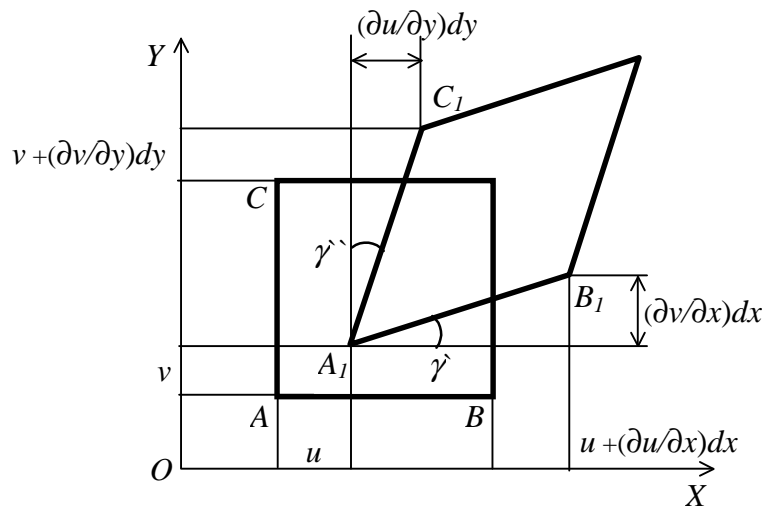


Рис. 1.7. Переміщення елементарного квадрата

Абсолютні деформації вздовж осей  $X$  і  $Y$

$$\epsilon_{AB} = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u = \frac{\partial u}{\partial x} dx,$$

$$\epsilon_{AC} = v + \frac{\partial v}{\partial y} dy - v = \frac{\partial v}{\partial y} dy.$$

Відносні деформації в тих самих напрямках

$$\epsilon_x = \frac{\epsilon_{AB}}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\epsilon_{AC}}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (1.36)$$

Крім лінійних деформацій, як видно з рис. 1.7, змінюються кути у виділеному квадраті. Позначивши  $\gamma_{xy}$  зміну кута у вершині  $A$ , знайдемо

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma'_{xy} + \gamma''_{xy}. \quad (1.37)$$

Розглянувши так само переміщення й деформації квадратів, виділених паралельно площинам  $XOZ$  і  $YOZ$ , запишемо

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (1.38)$$

Таким чином, маємо шість залежностей, які пов'язують деформації та переміщення у точках об'єму тіла, що деформується. Ці залежності називають формулами Коші. Шість деформацій можна розглядати як компоненти тензора деформацій з матрицею (1.20)

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}.$$

Матриця  $\mathbf{T}_\varepsilon$  є симетричною відносно головної діагоналі. Оскільки тензор  $\vec{T}_\varepsilon$ , так само як і тензор напружень  $\vec{T}_\sigma$ , є тензорами другого рангу, і структура їх однакова, усі формули й висновки, одержані раніше для  $\vec{T}_\sigma$ , можна записати і для  $\vec{T}_\varepsilon$ . Зокрема, деформацію у точці можна записати у вигляді вектора

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}\}^T. \quad (1.39)$$

Останнє твердження дає змогу записати залежності між деформаціями й переміщеннями у матричній формі

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A} \mathbf{u}. \quad (1.40)$$

### 1.4.3. Умови сумісності деформацій

Якщо потрібно знайти переміщення за відомими деформаціями, формули Коші необхідно розв'язати відносно переміщень. Але в цьому разі три невідомі виражаються через шість деформацій, і для однозначності розв'язку необхідно накласти на деформації такі умови [16]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}, & \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}, \end{aligned} \quad (1.41)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}.$$

Ці залежності називають рівняннями Сен-Венана. Якщо вони задовольняються, то в кожній точці об'єму переміщення є однозначними функціями, тобто при деформуванні об'єму не виникає розривів і пустот. У матричній формі рівняння мають такий вигляд

$$\mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}, \quad (1.42)$$

де  $\mathbf{B}$  – матриця диференціальних операторів

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \partial_{yy} & \partial_{xx} & 0 & -\partial_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & \partial_{zz} & \partial_{yy} & 0 & -\partial_{yz} & 0 \\ \partial_{zz} & 0 & \partial_{xx} & 0 & 0 & -\partial_{xz} \\ 2\partial_{yz} & 0 & 0 & -\partial_{xz} & \partial_{xx} & -\partial_{xy} \\ 0 & 2\partial_{zx} & 0 & -\partial_{yz} & -\partial_{yx} & \partial_{yy} \\ 0 & 0 & 2\partial_{xy} & \partial_{zz} & -\partial_{zx} & -\partial_{zy} \end{bmatrix}, \quad (1.43)$$

$$\partial_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \partial_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \partial_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \text{ і т. д.}$$

#### 1.4.4. Фізичні залежності

Зв'язок між напруженнями і деформаціями описується так званими фізичними залежностями. Їх вигляд визначається властивостями матеріалу, а також умовами навантаження. Найпростішою формою зв'язку є лінійна залежність між деформаціями й напруженнями. Для одновісного напруженого стану ізотропного матеріалу

$$\sigma_x = E \varepsilon_x, \quad (1.44)$$

( $E$  – модуль пружності, Па).

У загальному випадку об'ємного напруженого стану для ізотропного матеріалу ці залежності зручно записати у матричній формі, маючи на увазі векторні позначення для напружень і деформацій:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1.45)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma}. \quad (1.46)$$

Матрицю  $\mathbf{C}$  називають матрицею пружних модулів і подають у вигляді

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2G + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2G + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2G + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}. \quad (1.47)$$

Обернена до неї матриця має вигляд

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix}, \quad (1.48)$$

де  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона,  $G = E/2(1 + \nu)$  – модуль зсуву,  
 $\lambda = 2\nu G/(1 - 2\nu)$  – параметр Ляме.

Обидві матриці є симетричними відносно головної діагоналі, їх компоненти залежать від двох констант: модуля пружності  $E$  і коефіцієнта Пуассона  $\nu$ , або величин, похідних від цих двох. Зауважимо, що для анізотропних матеріалів кількість констант збільшується і в загальному випадку може дорівнювати 21 [16].

## 1.5. Потенціальна енергія деформації

При спробах змінити об'єм чи форму тіла, виготовленого з пружного матеріалу, виникають напруження, які протидіють цим змінам. Таким чином, у деформованому пружному тілі завжди є внутрішні сили – напруження, які за відповідних умов виконують роботу. Можна сказати, що в деформованому тілі за рахунок пружних деформацій накопичується потенціальна енергія. Якщо вона зосереджується в одиничному кубі, на гранях якого діють головні напруження, цю енергію можна знайти як суму робіт усіх сил, що діють на його гранях:

$$a = \frac{1}{2} \sigma_1 \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \sigma_2 \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \sigma_3 \varepsilon_3,$$

або

$$a = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}, \quad (1.49)$$



де  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3)^T$ ,  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3)^T$ .

Вираз (1.49) можна використати і в загальному випадку, коли розглядається довільна система координат. При цьому  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  будуть шестивимірними векторами. Потенціальну енергію для тіла в цілому, можна обчислити об'ємним інтегралом

$$U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV. \quad (1.50)$$

## 1.6. Загальна постановка задачі механіки деформівного твердого тіла

Задача механіки деформівного твердого тіла (МДТТ) полягає у визначенні напружень, деформацій і переміщень тіла, на яке діють зовнішні навантаження. Таким чином, у цій задачі 15 невідомих: по шість компонент векторів напружень і деформацій і три компоненти вектора переміщень. Для визначення цих невідомих маємо 15 рівнянь:

– рівноваги (рівняння Нав'є) (1.34)

$$\mathbf{A}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{p}_V = 0;$$

– кінематичні (рівняння Коші) (1.40)

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon};$$

– фізичні (рівняння Гука) (1.45)

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Знайдені з цих рівнянь 15 невідомих мають задовольняти граничні умови. Якщо на контурі діють поверхневі сили, граничні умови можна дістати з рівнянь (1.5), сумістивши з поверхнею похилу площадку. В цьому випадку вектор  $\mathbf{p}$  буде зовнішнім навантаженням  $\mathbf{p}_S$ . У матричній формі ці умови матимуть вигляд

$$\mathbf{A}_S^T \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{p}_S, \quad (1.51)$$

де

$$\mathbf{A}_S = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & 0 & \cos \beta & 0 & \cos \gamma \\ 0 & \cos \beta & 0 & \cos \alpha & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \cos \gamma & 0 & \cos \beta & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad (1.52)$$

де  $\alpha, \beta, \gamma$  – кути нормалі до поверхні у даній точці у системі координат, пов'язаних із тілом.

Крім силових граничних умов на частині поверхні можуть бути задані переміщення (кінематичні граничні умови  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_S$ ).

Систему рівнянь (1.34), (1.40), (1.45), (1.51) можна записати в переміщеннях, напруженнях або у змішаному вигляді. У першому випадку

матимемо три диференціальні рівняння другого порядку в частинних похідних

$$\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{u} + \mathbf{p}_V = \mathbf{0}. \quad (1.53)$$

Граничні умови записуємо також у переміщеннях

$$\mathbf{A}_S^T \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{p}_S, \mathbf{u} = \mathbf{u}_S. \quad (1.54)$$

Рівняння в напруженнях складніші й тут не розглядаються. Зауважимо лише, що для їх одержання необхідно врахувати умови сумісності деформацій (1.41).

## 1.7. Варіаційна постановка задачі механіки деформівного твердого тіла

Як видно з попередніх підрозділів, загальна задача визначення напружень, деформацій і переміщень ґрунтується на диференціальних рівняннях рівноваги. Можлива й альтернативна постановка задачі, яка базується на енергетичних уявленнях. Класичним прикладом є використання принципу можливих переміщень (принципу Лагранжа), який належить до так званих варіаційних принципів. Ці принципи дозволяють замінити проблему розв'язання диференціальних рівнянь рівноваги механічної системи проблемою визначення функцій, які забезпечують мінімум деякої функції від функції, так званого функціоналу. Задача зводиться до пошуку серед множини допустимих функцій такої, яка забезпечує заданому функціоналу стаціонарне значення [21, 24].

Сформулюємо принцип Лагранжа для деформівного тіла в загальному випадку напруженого стану. Для цього розглянемо об'єм  $V$ , обмежений поверхнею  $S$  (рис. 1.8), на який діють об'ємні сили  $\mathbf{p}_V = (X_V \ Y_V \ Z_V)^T$  з компонентами  $X_V, Y_V, Z_V$  – проекціями вектора на координатні осі  $x, y, z$ . Поверхню  $S$ , яка обмежує об'єм  $V$ , розіб'ємо на дві частини  $S_1$  і  $S_2$ .

На  $S_1$  діють поверхневі навантаження  $\mathbf{p}_S$ , а на  $S_2$  – задані переміщення  $\mathbf{u}_S$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_S &= (X_S \ Y_S \ Z_S)^T, \\ \mathbf{u}_S &= (u_S \ v_S \ w_S)^T. \end{aligned} \quad (1.55)$$

У кожній точці об'єму напружений стан визначається векторами напружень  $\boldsymbol{\sigma}$  і деформацій  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Припустимо, що переміщення тіла набули малих приростів, сумісних із геометричними і кінематичними в'язями, накладеними на тіло. Тоді, згідно з принципом Лагранжа, для тіла, яке перебуває в рівновазі, сума робіт усіх зовнішніх і внутрішніх зусиль, що діють на нього, на довільній системі можливих переміщень дорівнює нулю

$$-\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV + \int_{S_1} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{P}_S dS + \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{P}_V dV = 0. \quad (1.56)$$

Перший інтеграл – це варіація роботи внутрішніх зусиль, другий і третій – варіації роботи поверхневих і об'ємних сил на відповідних переміщеннях.

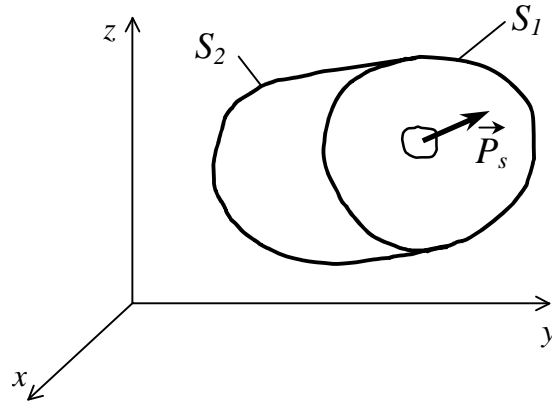


Рис. 1.8. Об'єм V

Можна показати, що рівняння (1.56) еквівалентне рівнянням рівноваги та граничним умовам на частині поверхні  $S_1$ . Якщо за допомогою рівнянь Коші і фізичних залежностей записати (1.56) через переміщення, то одержимо

$$-\int_V (\mathbf{A} \delta \mathbf{u})^T \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{u} dV + \int_{S_1} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p}_S dS + \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p}_V dV = 0. \quad (1.57)$$

Рівняння (1.57) можна записати у дещо іншому вигляді, проінтегрувавши перший доданок

$$\int_V (\mathbf{A} \delta \mathbf{u})^T \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{u} dV = \int_{S_1} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{A}_S \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{u} dS - \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{u} dV. \quad (1.58)$$

Підставляючи (1.58) у (1.57), одержимо

$$\int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{u} dV - \int_{S_1} \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{A}_S \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{u} dS - \mathbf{p}_S) dS - \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p}_V dV = 0. \quad (1.59)$$

З урахуванням незалежності варіацій  $\delta \mathbf{u}$  звідси можна одержати рівняння теорії пружності в переміщеннях і граничні умови на площі  $S_1$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{u} + \mathbf{p}_V = \mathbf{0}, \quad (1.60)$$

$$\mathbf{A}_S^T \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{u} - \mathbf{p}_S = \mathbf{0}. \quad (1.61)$$

Таким чином, можна стверджувати, що варіаційна і статична постановки задачі МДТТ еквівалентні. Разом із тим, у більшості випадків варіаційна постановка виявляється більш корисною, оскільки дає можливість наближеного розв'язку задач теорії пружності, зокрема, і механіки деформівного твердого тіла, взагалі. Суттєвою перевагою варіаційних рівнянь і, зокрема, рівняння Лагранжа (1.59) є більш низький

порядок похідних, які входять у рівняння, що дає можливість розшукувати розв'язок у класі функцій з меншими вимогами до їх гладкості, тобто диференційованості.

За допомогою рівнянь (1.57), (1.59) можна одержати наближені розв'язки без звернення до диференціальних рівнянь рівноваги (1.60). Методи, що ґрунтуються на прямому використанні рівняння (1.56), називають варіаційними.

Розглянуте вище формулювання принципу Лагранжа є справедливим для довільного закону зв'язку між компонентами напружень і деформацій при довільних залежностях між деформаціями і переміщеннями. Принцип Лагранжа в такій формі може використовуватись і у випадку дії неконсервативних зовнішніх сил, тобто сил, робота яких залежить від історії навантаження тіла. У цьому випадку рівняння (1.56) не відповідає класичній постановці задач варіаційного обчислення, для яких характерними є наявність функціоналу і питання про його екстремальність.

Такий функціонал можна побудувати на основі принципу можливих переміщень, якщо ввести припущення про консервативність зовнішніх сил, або про наявність потенціалу зовнішніх сил

$$\Pi = -\int_S \mathbf{P}_S^T \mathbf{u} dS - \int_V \mathbf{P}_V^T \mathbf{u} dV. \quad (1.62)$$

Тоді повна енергія деформованого тіла і діючого навантаження складається з потенціальної енергії деформації тіла (потенціал внутрішніх сил)  $U$  і енергії зовнішніх сил (потенціал зовнішніх сил)  $\Pi$ .

$$E = U + \Pi. \quad (1.63)$$

Очевидно, величина  $E$  є функціоналом, величина якого визначається функціями переміщень – компонентами вектора  $\mathbf{u}$ . Умова стаціонарності функціоналу  $E$  –

$$\delta E = 0, \text{ тобто } \delta(U + \Pi) = 0. \quad (1.64)$$

Рівність (1.64) показує, що для консервативних систем з усіх можливих переміщень дійсними будуть ті з них, при яких функціонал повної енергії  $E$  набуває стаціонарного значення. При цьому можливі такі положення рівноваги:

$$\delta E = 0, \quad \delta^2 E > 0 \quad \rightarrow \quad E = E_{\min} \text{ (стійке положення рівноваги);}$$

$$\delta E = 0, \quad \delta^2 E < 0 \quad \rightarrow \quad E = E_{\max} \text{ (нестійке положення рівноваги);}$$

$$\delta E = 0, \quad \delta^2 E = 0 \quad \rightarrow \quad E = \text{const} \text{ (байдуже положення).}$$

## 1.8. Метод Рітца

Розглянемо тіло, завантажене об'ємними  $\mathbf{p}_V$  і поверхневими  $\mathbf{p}_S$  силами на частині поверхні тіла  $S_1$ . На поверхні  $S_2 = S - S_1$  прикладено геометричні в'язі

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_S. \quad (1.65)$$

Згідно з методом Рітца, розв'язок рівняння (1.59) розшукується у вигляді

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{q}, \quad (1.66)$$

де  $\mathbf{u} = (u \ v \ w)^T$  – вектор переміщень у рівнянні (1.59);

$\mathbf{q}$  – вектор невідомих констант (узагальнених координат);

$\mathbf{N}$  – матриця інтерполяційних функцій.

Кожна з функцій повинна задовольняти кінематичні умови (1.65). Усі функції  $\mathbf{N}$  повинні задовольняти умови лінійної незалежності і повноти. Лінійна незалежність передбачає, що сума

$$\alpha_1 \mathbf{N}_1 + \alpha_2 \mathbf{N}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{N}_n \quad (1.67)$$

дорівнює нулю, тільки якщо всі коефіцієнти  $\alpha_i$  дорівнюють нулю. Умова повноти вимагає, щоб ряд  $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \dots$  був повний, що забезпечувало б виконання умови збіжності розв'язку (1.66) до точного при збільшенні членів ряду, тобто

$$\tilde{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i q_i \rightarrow \mathbf{u}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.68)$$

Крім того, функції  $\mathbf{N}_i$  повинні бути диференційованими до порядку  $p-1$ , якщо найбільший порядок похідної у рівнянні Лагранжа дорівнює  $p$ , і неперервними по об'єму тіла.

Після підстановки (1.66) у вираз для функціоналу (1.63) і інтегрування, одержимо функцію невідомих коефіцієнтів.

$$E = E(\mathbf{q}).$$

Умова мінімуму реалізується прирівнюванням до нуля похідних

$$\frac{\partial E}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial q_2} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial E}{\partial q_n} = 0, \quad (1.69)$$

Рівняння (1.69) складають систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів  $q_i$ .

У більш загальному випадку, коли функціонал (1.63) не існує (зокрема, при наявності неконсервативних сил), необхідно використати варіаційне рівняння (1.59). Підставляючи (1.66) у рівняння (1.59), одержимо

$$\delta \mathbf{q}^T (\mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{F}_S - \mathbf{F}_V) = 0, \quad (1.70)$$

де

$$\mathbf{K} = \int_V (\mathbf{A}\mathbf{N})^T \mathbf{C} \mathbf{A}\mathbf{N} dV, \quad \mathbf{F}_S = \int_{S_1} \mathbf{N}^T \mathbf{p}_S dS, \quad \mathbf{F}_V = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{p}_V dV. \quad (1.71)$$

Матриця  $\mathbf{K}$  називається матрицею жорсткості системи, матриці  $\mathbf{p}_S$  і  $\mathbf{p}_V$  – векторами, відповідно, поверхневих і об'ємних сил.

Враховуючи довільність варіацій  $\delta\mathbf{q}$ , з (1.70) одержимо систему рівнянь відносно узагальнених переміщень

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F}_S + \mathbf{F}_V. \quad (1.72)$$

Розв'язок цієї системи алгебраїчних рівнянь відшукується за допомогою методів лінійної алгебри, зокрема методу Гауса [37].

Таким чином, алгоритм методу Рітца виявляється достатньо простим і складається з таких кроків:

- 1) вибір координатних функцій  $\mathbf{N}$  у розв'язку (1.66) для переміщень  $\mathbf{u}$ ;
- 2) підстановка вибраних функцій у вирази для матриць жорсткості і зовнішніх сил з урахуванням геометричних і фізичних залежностей для даної конструкції і обчислення компонент матриць;
- 3) розв'язання системи алгебраїчних рівнянь (1.72) відносно узагальнених координат  $\mathbf{q}$ ;
- 4) визначення переміщень за формулою (1.66);
- 5) визначення необхідних компонент напружень і деформацій за відомими компонентами переміщень з використанням відповідних формул теорії пружності.

**ПРИКЛАД 1.1.** Визначити лінію прогину шарнірно закріпленої на кінцях балки, завантаженої рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивністю  $p(x) = const$ .

Розшукуємо пружну лінію балки  $w(x)$  у вигляді ряду

$$w(x) = \mathbf{N}(x)\mathbf{q}.$$

Як вказувалося вище, функції  $\mathbf{N}(x)$  повинні задовольняти умови повноти, бути лінійно незалежними, задовольняти кінематичні граничні умови і не накладати додаткових в'язей на балку. Крім того, необхідно, щоб вони мали похідні  $p-1$  порядку, де  $p$  – порядок найвищої похідної у варіаційному рівнянні Лагранжа. Зазначимо, що вибір координатних функцій є дуже відповідальним етапом у методі Рітца. Правильно підбрана система координатних функцій дозволяє обмежитися у розв'язку малим числом членів ряду і суттєво скоротити об'єм обчислень.

У даному випадку граничним умовам при  $x=0$ ,  $x=l$ ,  $w=0$  відповідають гармонічні функції  $\mathbf{N}_i(x) = \sin \frac{i\pi x}{l}$ , ( $i=1, 2, \dots$ ).

Прогин  $w(x)$  матиме вигляд

$$w(x) = \left[ \sin \frac{\pi x}{l} \quad \sin \frac{2\pi x}{l} \quad \dots \quad \sin \frac{n\pi x}{l} \right] \cdot \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix}.$$

Матрицю жорсткості для стержня одержимо, підставляючи у (1.70) значення функції  $\mathbf{N}(x)$

$$\mathbf{N}(x) = \left[ \sin \frac{\pi x}{l} \quad \sin \frac{2\pi x}{l} \quad \dots \quad \sin \frac{n\pi x}{l} \right],$$

а також матриці диференціальних операторів  $\mathbf{A}$  і модулів пружності  $\mathbf{C}$ . Для плоского згину стержня

$$\varepsilon = -z \frac{d^2 w}{dx^2}, \text{ тобто } \mathbf{A} = -z \frac{d^2}{dx^2},$$

$$\sigma = E\varepsilon, \text{ тобто } \mathbf{C} = E.$$

У результаті підстановки одержимо

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix}, \quad K_{ii} = \frac{i^4 \pi^4}{l^4} \cdot \frac{l}{2Ei},$$

$$K_{ij} = 0, \quad i \neq j,$$

$$\mathbf{p}_S = \frac{2ql}{\pi} \left[ 1 \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad \frac{1}{5} \quad 0 \quad \dots \right].$$

Для коефіцієнтів  $q_i$  маємо

$$q_k = \begin{cases} \frac{4ql^4}{EI k^5 \pi^5}, & \text{при } k = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & \text{при } k = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

Вираз для пружної лінії балки остаточно

$$w(x) = \frac{4ql^4}{\pi^2 EI} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^5} \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Якщо в сумі залишити один член ряду, прогин балки посередині буде таким:

$$w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{4}{\pi^5} \frac{ql^4}{EI} \approx 0.013071 \frac{ql^4}{EI}.$$

Точний розв'язок

$$w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} \approx 0.0130298 \frac{ql^4}{EI}.$$

Похибка складає усього 0.4%.

## 1.9. Варіаційний принцип Гамільтона-Остроградського [10]

Розглянемо загальне рівняння динаміки

$$\sum_{i=1}^N \left( \vec{F}_i - m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0, \quad (1.72)$$

де  $\vec{F}_i$  – узагальнені сили;  $\vec{r}_i$  – вектори узагальнених переміщень;  $\vec{v}_i$  – узагальнені швидкості мас  $m_i$ ; точка означає скалярний добуток.

Позначимо перший доданок у (1.72)

$$\delta A = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i \quad (1.73)$$

і запишемо другий доданок у формі

$$\sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \delta \vec{r}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot \delta \vec{r}_i - \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \delta \vec{r}_i. \quad (1.74)$$

Використовуючи далі умову комутативності операцій варіювання і диференціювання, одержимо

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \delta \vec{r} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot \delta \vec{v}_i = \delta T, \quad (1.75)$$

де  $T$  – кінетична енергія.

З урахуванням (1.73)-(1.75) загальне рівняння динаміки набуває вигляду

$$\delta A + \delta T - \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (1.76)$$

Помножимо цю рівність на диференціал часу  $dt$  і проінтегруємо від  $t_1$  до  $t_2$

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta A + \delta T) dt - \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot \delta \vec{r}_i \Big|_{t_1}^{t_2} = 0, \quad (1.77)$$

або

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta A + \delta T) dt - \sum_{j=1}^N \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} \cdot \delta \mathbf{q}_j \Big|_{t_1}^{t_2} = 0. \quad (1.78)$$

Якщо границі інтегрування не варіюються, і  $\delta \mathbf{q}_j$  на кінцях інтервалу  $[t_1, t_2]$  нульові, – із залежності (1.78), яку називають принципом змінної дії [10] або інтегральним принципом Гамільтона-Остроградського, одержимо варіаційний принцип Гамільтона-Остроградського

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \quad (1.79)$$

де  $L = A + T$ .

Варіаційне рівняння Гамільтона-Остроградського широко використовується для розв'язку задач динаміки деформівного твердого тіла. При цьому варіація  $\delta A$  складається з варіації робіт внутрішніх і зовнішніх сил  $\delta A = \delta U + \delta W$ , тоді інтегральний принцип набуває вигляду



$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta U + \delta T + \delta W) dt = \sum_{j=1}^N \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \cdot \delta q_j \Big|_{t_1}^{t_2}. \quad (1.80)$$

### 1.10. Методи зважених нев'язок

Нехай диференціальне рівняння задачі має вигляд

$$L\mathbf{U} = \mathbf{P}, \quad (1.81)$$

де  $L$  – диференціальний оператор,

$\mathbf{U}$  – вектор розшукуваних функцій.

Розшукуємо розв'язок у вигляді, аналогічному розв'язку в методі Рітца,

$$\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{N}\mathbf{q}. \quad (1.82)$$

Розв'язок (1.82) є наближенням, і після підстановки в рівняння (1.81) одержимо систему функцій, яку називають нев'язкою

$$\Delta = L\bar{\mathbf{U}} - \mathbf{P} \neq \mathbf{0}. \quad (1.83)$$

Щоб зменшити нев'язку в цілому по об'єму, де розшукується розв'язок, поставимо умову, щоб вона була мінімальною “у середньому”, тобто щоб інтеграл від добутку нев'язки на варіацію деякої вагової функції  $\delta\mathbf{W}$  дорівнювали нулю

$$\int_V \delta\mathbf{W}^T (L\bar{\mathbf{U}} - \mathbf{P}) dV = \mathbf{0}. \quad (1.84)$$

Існує декілька варіантів методу зважених нев'язок, які відрізняються ваговими функціями. Якщо  $\mathbf{W} = \bar{\mathbf{U}}$ , приходимо до найбільш популярного варіанту методу зважених нев'язок, який називають методом Бубнова-Гальоркіна [36, 41]

$$\int_V \delta\bar{\mathbf{U}}^T (L\bar{\mathbf{U}} - \mathbf{P}) dV = \mathbf{0}. \quad (1.85)$$

Метод зважених нев'язок можна застосовувати до довільних операторів і граничних умов [8]. Як видно з перетворень (1.57)-(1.59), варіаційне рівняння Лагранжа можна також розглядати як варіант методу зважених нев'язок, причому з меншими порівняно з методом Бубнова-Гальоркіна вимогами щодо диференційованості пробних функцій.