

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.08- 05.01/051.00.2/Б/ПП 2-2020
	Екземпляр № 1	Арк 20/ 1

ЗАТВЕРДЖЕНО

Науково-методичною радою
Державного університету
«Житомирська політехніка»

протокол від ____ 20__ р.
№ ____

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

до виконання

лабораторної роботи №7

за темою «Динамічне програмування»

«ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ ФІНАНСОВИХ РЕСУРСІВ МІЖ ІНВЕСТИЦІЙНИМИ ПРОЕКТАМИ»

з дисциплін

«ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ» та

«МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ ЕКОНОМІКИ»

для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «бакалавр»
спеціальностей 051 «Економіка», 071 «Облік і оподаткування»
та 292 «Міжнародні економічні відносини»
факультет бізнесу та сфери обслуговування
кафедра цифрової економіки та міжнародних економічних відносин

Рекомендовано на засіданні
кафедри цифрової економіки та
міжнародних економічних
відносин

____ 2021 р., протокол
№ ____

Розробник: к.е.н., доцент кафедри цифрової економіки та міжнародних
економічних відносин, ОВАНДЕР Наталія

Житомир
2021

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.08- 05.01/051.00.2/Б/ПП 2-2020
	Екземпляр № 1	Арк 20/ 2

1. ЗАВДАННЯ ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ №7

- 1) Опрацювати лекцію ТЕМА 7. Динамічне програмування
- 2) Обрати варіант згідно файлу «ПОРЯДОК ВИЗНАЧЕННЯ ВАРІАНТУ ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ №7».
- 3) Розв'язати завдання згідно умови та методичних рекомендацій наведених нижче. **Робота закінчується ВИСНОВКАМИ.**

УМОВА

Для збільшення випуску продукції підприємство може виділити інвестиції розміром $x=200$ млн. грн. своїм чотирьом проектам (філіям) на певний період. Приріст продукції, який може отримати підприємство за кожним з проектів, при виділенні йому відповідних інвестицій, представлений у таблицях за варіантами. Потрібно знайти оптимальний варіант вкладів інвестицій і дати економічний аналіз ефективності проведених заходів.

2. ПОРЯДОК ВИЗНАЧЕННЯ ВАРІАНТУ ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

Варіант 1

Розмір інвестицій млн. грн., x	Приріст випуску продукції, отриманий від вкладення у проекти, млн.грн.			
	Проект 1	Проект 2	Проект 3	Проект 4
0	0	0	0	0
50	50	60	65	70
100	105	90	85	110
150	160	155	170	145
200	210	205	235	240

Варіант 2

Розмір інвестицій млн. грн., x	Приріст випуску продукції, отриманий від вкладення у проекти, млн.грн.			
	Проект 1	Проект 2	Проект 3	Проект 4
0	0	0	0	0
50	50	55	60	65
100	100	100	90	109
150	165	170	175	162
200	220	225	230	240

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.08- 05.01/051.00.2/Б/ПП 2-2020
	Екземпляр № 1	Арк 20/3

Варіант 3

Розмір інвестицій млн. грн., х	Приріст випуску продукції, отриманий від вкладення у проекти, млн.грн.			
	Проект 1	Проект 2	Проект 3	Проект 4
0	0	0	0	0
50	40	65	55	75
100	110	90	80	110
150	170	160	165	150
200	215	220	225	235

Варіант 4

Розмір інвестицій млн. грн., х	Приріст випуску продукції, отриманий від вкладення у проекти, млн.грн.			
	Проект 1	Проект 2	Проект 3	Проект 4
0	0	0	0	0
50	45	70	60	65
100	115	115	85	105
150	165	175	170	155
200	225	230	235	245

Варіант 5

Розмір інвестицій млн. грн., х	Приріст випуску продукції, отриманий від вкладення у проекти, млн.грн.			
	Проект 1	Проект 2	Проект 3	Проект 4
0	0	0	0	0
50	55	60	55	70
100	120	90	85	105
150	170	165	175	155
200	210	215	225	230

Варіант 6

Розмір інвестицій млн. грн., х	Приріст випуску продукції, отриманий від вкладення у проекти, млн.грн.			
	Проект 1	Проект 2	Проект 3	Проект 4
0	0	0	0	0
50	35	60	55	70
100	112	90	85	105
150	158	165	175	155
200	215	235	240	250

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.08- 05.01/051.00.2/Б/ПП 2-2020
	Екземпляр № 1	Арк 20/4

Варіант 7

Розмір інвестицій млн. грн., х	Приріст випуску продукції, отриманий від вкладення у проекти, млн.грн.			
	Проект 1	Проект 2	Проект 3	Проект 4
0	0	0	0	0
50	55	60	65	70
100	120	105	90	105
150	170	155	175	155
200	200	215	225	255

Варіант 8

Розмір інвестицій млн. грн., х	Приріст випуску продукції, отриманий від вкладення у проекти, млн.грн.			
	Проект 1	Проект 2	Проект 3	Проект 4
0	0	0	0	0
50	55	60	55	70
100	120	90	85	105
150	170	165	175	155
200	210	215	225	240

Варіант 9

Розмір інвестицій млн. грн., х	Приріст випуску продукції, отриманий від вкладення у проекти, млн.грн.			
	Проект 1	Проект 2	Проект 3	Проект 4
0	0	0	0	0
50	55	60	55	70
100	120	90	85	105
150	170	165	175	155
200	210	215	225	250

Варіант 10

Розмір інвестицій млн. грн., х	Приріст випуску продукції, отриманий від вкладення у проекти, млн.грн.			
	Проект 1	Проект 2	Проект 3	Проект 4
0	0	0	0	0
50	55	60	65	70
100	125	105	95	115
150	160	170	175	160
200	205	210	220	255

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.08- 05.01/051.00.2/Б/ПП 2-2020
	Екземпляр № 1	Арк 20/5

3. ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗКУ ТИПОВОГО ЗАВДАННЯ

Модель оптимального розподілу фінансових ресурсів між інвестиційними проектами

Розглянемо виробничу ситуацію, пов'язану з аналізом пропозицій відносно збільшення виробничих потужностей підприємства за рахунок реалізації певних інвестиційних проектів. Для збільшення випуску продукції шляхом розширення виробничих потужностей підприємство виділяє додаткові фінансові ресурси розміром $x=200$ млн. грн. Додаткові вкладення в кожний з проектів можуть бути здійснені сумами по 50, 100, 150 і 200 млн. грн. Загальну суму вкладень розміром 200 млн. грн. необхідно розподілити між чотирма проектами в такий спосіб, щоб одержати максимально можливий сумарний приріст випуску продукції.

Приріст випуску продукції, який може отримати підприємство за кожним з проектів, при виділенні йому відповідних інвестицій, представлений у таблиці 6.1.

Таблиця 6.1

Розмір інвестицій, млн. грн.	Приріст випуску продукції, отриманий від вкладення у проекти, млн.грн.			
	Проект 1	Проект 2	Проект 3	Проект 4
0	0	0	0	0
50	45	60	55	70
100	110	90	85	105
150	160	165	170	155
200	210	215	225	230

Пояснення до змісту таблиці 6.1.

Якщо в будь який з проектів підприємство вкладе 0 грн., то зрозуміло, що і прирости випуску продукції дорівнюватимуть 0 грн. – це видно з першого рядку таблиці 6.1.

З другого рядку таблиці 6.1 видно, що якщо підприємство вкладе 50 млн.грн.: в «Проект 1», то приріст випуску продукції складе 45 млн.грн.; в «Проект 2», то приріст випуску продукції складе 60 млн.грн., в «Проект 3» – 55 млн.грн.; в «Проект 4» – 70 млн.грн.

Аналогічно наведені дані, щодо вкладення 100 млн.грн. – в третьому рядку, 150 млн.грн. – в четвертому рядку, 200 млн.грн. – в п'ятому рядку.

Тепер розглянемо дані таблиці 6.1. по стовпчиках. Щодо першого проекту (виокремлено зеленим). Якщо підприємство цей в 1-ий проект вкладе 50 млн.грн. (виокремлено жовтим), то приріст випуску продукції становитиме 45 млн.грн.; якщо вкладе 100 млн. грн. в цей же 1-ий проект – то приріст випуску продукції становитиме 110 млн.грн.; якщо вкладе 150 млн. грн. – то приріст випуску продукції становитиме 160 млн.грн.; якщо вкладе 200 млн. грн. – то приріст випуску продукції становитиме 210 млн.грн.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.08- 05.01/051.00.2/Б/ПП 2-2020
	Екземпляр № 1	Арк 20/6

Аналогічний зміст мають дані, наведені в таблиці 6.1 щодо проектів 2, 3 та 4.

♦ Розв'язування.

Позначимо через x_i – розмір інвестицій, виділених під i -ий проект $i = (\overline{1,4})$, де i – індекс проекту. Тобто x_1 – це розмір інвестицій виділених Проекту 1, x_2 – це розмір інвестицій виділених Проекту 2 і т.д. Отже має місце рівність:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 200 \quad (6.5)$$

Через $f_i(x_i)$ позначимо приріст випуску продукції на підприємстві за рахунок вкладення x_i суми коштів в i -ий проект. Тоді умова задачі матиме вигляд (див. таблиця 6.2).

Таблиця 6.2

Розмір інвестицій, млн. грн., x	Приріст випуску продукції, отриманий від вкладення у проекти, млн.грн.			
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0
50	45	60	55	70
100	110	90	85	105
150	160	165	170	155
200	210	215	225	230

А сумарний приріст випуску продукції підприємства становитиме:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i) \quad (6.6)$$

Отже, наша задача полягає у знаходженні таких значень $x_i \geq 0$ ($i = \overline{1, n}$), які задовольняють (6.5) і забезпечують максимум функції (6.6).

Позначимо максимальний сумарний приріст продукції, одержаний при розподілі інвестицій розміром x для перших k проектів, через $F_k(x)$, причому

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_k, \quad x_i \geq 0, i = \overline{1, k}.$$

Для визначення функцій $F_k(x)$ будемо використовувати рекурентне рівняння (6.7):

$$F_k(x) = \max_{0 \leq x_k \leq x} [f_k(x_k) + F_{k-1}(x - x_k)] \quad (6.7),$$

де x_k сума коштів, виділених k -му проекту,

$f_k(x_k)$ - розмір приросту випуску продукції при виділенні k -му проекту x_k суми коштів,

$(x - x_k)$ - залишок інвестицій, який віддамо попереднім $(k-1)$ проектам,

$F_{k-1}(x - x_k)$ - оптимальний приріст випуску продукції, який отримаємо від вкладення $(x - x_k)$ суми коштів в попередні $(k-1)$ проекти.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.08- 05.01/051.00.2/Б/ПП 2-2020
	Екземпляр № 1	Арк 20/ 7

Для прискорення розрахунків всі значення $F_k(x_k)$ на наступних етапах будемо заносити в таблицю 6.3.

Відповідно до попередніх міркувань, рядочок з нульовим значенням інвестицій можемо вже заповнити.

Таблиця 6.3

Розмір інвестицій, млн. грн., x	Значення приросту випуску продукції за проектами, млн. грн.			
	$F_1(x)$	$F_2(x)$	$F_3(x)$	$F_4(x)$
0	0	0	0	0
50				
100				
150				
200				

У даному прикладі етапами задачі буде розподіл коштів по проектах, отже, оскільки у нас 4 проекти, маємо чотири-етапну задачу динамічного програмування.

I етап. На цьому етапі будемо вважати, що у нас є тільки один – перший проект і розглядаємо розподіл всієї суми 200 млн.грн. (з розподілом на суми 50, 100, 150 і 200 млн. грн.) тільки для нього. Тобто, найпростіший спосіб розподілу коштів, з якого починаємо розв’язування задачі, це вкладення коштів лише у перший проект.

Якщо маємо в розпорядженні суму коштів 50 млн.грн., тоді ефективність вкладення даної суми відповідає максимальному приросту випуску продукції, що його буде отримано від інвестування в перший проект, а саме – 45 млн.грн.

Знайдемо максимальне значення цього приросту за рекурентною формулою:

$$F_1(x) = \max_{\substack{x_1=0, \\ x_1=50}} [f_1(0), f_1(50)] = \max[0, 45] = f_1(x) = 45$$

Якщо маємо в розпорядженні суму у 100 млн.грн., тоді приріст дорівнюватиме 110 млн.грн. Аналогічно розглядаємо інші випадки з сумами 150 та 200 млн.грн.

Оскільки $F_1(x) = \max_{0 \leq x_1 \leq x} [f_1(x)] = f_1(x)$, то значення $F_1(x)$ в таблиці 6.3 дорівнюють значенням $f_1(x)$ з таблиці 6.2.

Тоді наша таблиця 6.3 матиме наступний вигляд (таблиця 6.3.A)

Таблиця 6.3.А

Розмір інвестицій, млн. грн., x	Значення приросту випуску продукції за проектами, млн. грн.			
	$F_1(x)$	$F_2(x)$	$F_3(x)$	$F_4(x)$
0	0	0	0	0
50	45			
100	110			
150	160			
200	210			

II етап. На кожному етапі необхідно порівняти ефективність прийнятого рішення на попередньому та поточному етапах. Отже, тепер розглянемо розподіл коштів одночасно між двома проектами підприємства, порівнюючи отриманий випуск з ефективністю попереднього етапу. Скористаємося формулою (6.7) для загального випадку.

Нам необхідно знайти оптимальний варіант розподілу інвестицій розміром x за умови, що вони виділені першому та другому проекту. Тут слід враховувати отриману найкращу ефективність для першого проекту. Припустимо, що на другий проект виділені інвестиції розміром x_2 , які дають $f_2(x_2)$ приросту продукції, а залишок $(x - x_2)$ виділяється першому проекту, який дає $F_1(x - x_2)$ приросту. Тоді максимальний приріст продукції, отриманий від оптимального розподілу всіх інвестицій між першим і другим проектами буде:

$$F_2(x) = \max_{0 \leq x_2 \leq x} [f_2(x_2) + F_1(x - x_2)],$$

у якій надамо x_2 усіх можливих значень (0; 50; 100; 150; 200).

$$F_2(0) = 0$$

Розглянемо випадок розподілу інвестицій розміром 50 млн.грн. Тут можливі два наступні варіанти розміщення коштів.

1-ий варіант – надати 0 грн. другому проекту, а залишок $50-0=50$ млн.грн, - віддати другому проекту.

2-ий варіант – надати 50 млн.грн. другому проекту, а залишок $50-50=0$ грн. – віддати першому. Отримаємо:

$$F_2(50) = \max \left\{ \begin{array}{l} f_2(0) + F_1(50) = 0 + 45 = 45 \\ f_2(50) + F_1(0) = 60 + 0 = 60 \end{array} \right\} = 60$$

Максимальне значення приросту продукції від вкладання 50 млн.грн. в перших два проекти одержано за рахунок другого члена, тобто $f_2(50) + F_1(0)$. Це означає, що другому проекту слід виділити 50 млн.грн., а першому не надавати коштів.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.08- 05.01/051.00.2/Б/ПП 2-2020
	Екземпляр № 1	Арк 20/9

Аналогічно проводимо обчислення $F_2(x)$ для інших значень вкладень (100; 150; 200).

Так, при виділенні першим двом проектам 100 млн.грн. маємо наступні 3 варіанти розподілу коштів.

1-ий варіант – 0 млн. грн. другому, а залишок $100-0=100$ млн.грн. – першому.

2-ий варіант 50 млн. грн. другому, а залишок $100-50=50$ млн.грн. – першому.

3-ій варіант 100 млн. грн. другому, а залишок $100-100=0$ млн.грн. – першому.

Отримаємо наступне:

$$F_2(100) = \max \left\{ \begin{array}{l} f_2(0) + F_1(100) = 0 + 110 = 110 \\ f_2(50) + F_1(50) = 60 + 45 = 105 \\ f_2(100) + F_1(0) = 90 + 0 = 90 \end{array} \right\} = 110$$

Одержаний результат показує, що першому проекту інвестиції потрібно виділити розміром 100 млн.грн., а другому — коштів не давати. Приріст продукції при цьому буде 110 млн. грн.

Розподілимо аналогічним чином 150 млн. грн.:

$$F_2(150) = \max \left\{ \begin{array}{l} f_2(0) + F_1(150) = 0 + 160 = 160 \\ f_2(50) + F_1(100) = 60 + 110 = 170 \\ f_2(100) + F_1(50) = 90 + 45 = 135 \\ f_2(150) + F_1(0) = 165 + 0 = 165 \end{array} \right\} = 170.$$

При розподілі 150 млн. грн. доцільно 100 млн.грн. дати першому проекту, а 50 — другому.

Проведемо аналогічні міркування для розподілу 200 млн.грн.

Записуємо:

$$F_2(200) = \max \left\{ \begin{array}{l} f_2(0) + F_1(200) = 0 + 210 = 210 \\ f_2(50) + F_1(150) = 60 + 160 = 220 \\ f_2(100) + F_1(100) = 90 + 110 = 200 \\ f_2(150) + F_1(50) = 165 + 45 = 210 \\ f_2(200) + F_1(0) = 215 + 0 = 215 \end{array} \right\} = 220.$$

Згідно з виразом $f_2(50) + F_1(150)$, який забезпечує максимальний приріст продукції обсягом 220 млн.грн., необхідно 150 млн.грн. віддати першому проекту, а 50 млн. грн. — другому.

Після закінчення II етапу наша таблиця 6.3 матиме наступний вигляд (таблиця 6.3.Б)

Таблиця 6.3.Б

Розмір інвестицій, млн. грн., x	Значення приросту випуску продукції за проектами, млн. грн.			
	$F_1(x)$	$F_2(x)$	$F_3(x)$	$F_4(x)$
0	0	0	0	0
50	45	60		
100	110	90		
150	160	170		
200	210	220		

III етап. Знову необхідно порівняти ефективності попереднього та поточного етапів. Перейдемо до третього етапу, в якому потрібно визначити оптимальний варіант розподілу інвестицій між першими трьома проектами разом. Для розрахунку значень $F_3(x)$ використаємо формулу:

$$F_3(x) = \max_{0 \leq x_3 \leq x} [f_3(x_3) + F_2(x - x_3)]$$

Отже, використовуємо дані, що описують випуск, який отриманий від вкладення одразу в перший і другий проекти одночасно (стовпчик $F_2(x)$) і випуск від вкладення в третій проект. Тобто $x_3 = (0; 50; 100; 150; 200)$ млн.грн.

Розглянемо випадок розподілу інвестицій розміром 50 млн.грн. Тут можливі два наступні варіанти розміщення коштів.

1-ий варіант – надати 0 грн третьому проекту, а залишок $50 - 0 = 50$ млн.грн, - віддати разом першому і другому проектам.

2-ий варіант – надати 50 млн.грн. третьому проекту, а залишок $50 - 50 = 0$ грн. – віддати разом першому і другому проектам.

Відповідно одержимо:

$$F_3(0) = 0.$$

$$F_3(50) = \max \left\{ \begin{array}{l} f_3(0) + F_2(50) = 0 + 60 = 60 \\ f_3(50) + F_2(0) = 55 + 0 = 55 \end{array} \right\} = 60.$$

Бачимо, що вигідно всі 50 млн.грн. віддати першим двом проектам, а третьому не давати коштів. Максимальний приріст продукції буде 60 млн. грн.

Виконаємо відповідні обчислення при $x_3 = 100$:

$$F_3(100) = \max \left\{ \begin{array}{l} f_3(0) + F_2(100) = 0 + 110 = 110 \\ f_3(50) + F_2(50) = 55 + 60 = 115 \\ f_3(100) + F_2(0) = 85 + 0 = 85 \end{array} \right\} = 115.$$

Максимальний ефект дає вираз $f_3(50) + F_2(50)$, а це означає, що 100 млн. грн. між першими трьома проектами потрібно розподілити таким чином: першим двом

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.08- 05.01/051.00.2/Б/ПП 2-2020
	Екземпляр № 1	Арк 20/ 11

проектам віддати 50 млн.грн. і третьому - 50 млн.грн. Приріст продукції становитиме 115 млн.грн.

Обчислимо $F_3(150)$:

$$F_3(150) = \max \left\{ \begin{array}{l} f_3(0) + F_2(150) = 0 + 170 = 170 \\ f_3(50) + F_2(100) = 55 + 110 = 165 \\ f_3(100) + F_2(50) = 85 + 60 = 145 \\ f_3(150) + F_2(0) = 170 + 0 = 170 \end{array} \right\} = 170.$$

При розподілі 150 млн. грн. ми отримали два оптимальних варіанти:

- 1) між першими двома проектами розподілити 150 млн.грн., а третьому не надавати коштів;
- 2) 150 млн. грн. віддати третьому проекту, а першим двом не надавати коштів.

В обох випадках максимальний приріст продукції становитиме 170 млн.грн.

На завершення цього етапу проведемо аналіз розподілу 200 млн. грн. між першими трьома проектами:

$$F_3(200) = \max \left\{ \begin{array}{l} f_3(0) + F_2(200) = 0 + 220 = 220 \\ f_3(50) + F_2(150) = 55 + 170 = 225 \\ f_3(100) + F_2(100) = 85 + 110 = 195 \\ f_3(150) + F_2(50) = 170 + 60 = 230 \\ f_3(200) + F_2(0) = 225 + 0 = 225 \end{array} \right\} = 230.$$

Ми бачимо, що найбільший приріст продукції 230 млн. грн. отримаємо, якщо 50 млн. грн. розподілимо між першими двома проектами, а в третє інвестуємо 150 млн. грн.

Після закінчення III етапу наша таблиця 6.3 матиме наступний вигляд (таблиця 6.3.В)

Таблиця 6.3.В

Розмір інвестицій, млн. грн., x	Значення приросту випуску продукції за проектами, млн. грн.			
	$F_1(x)$	$F_2(x)$	$F_3(x)$	$F_4(x)$
0	0	0	0	0
50	45	60	60	
100	110	90	115	
150	160	170	170	
200	210	220	230	

III етап. Переходимо до четвертого етапу, в якому необхідно проаналізувати ефективність розподілу наявних інвестицій уже між чотирма проектами підприємства. Поклавши у (6.7) $k=4$, маємо рекурентне рівняння:

$$F_4(x) = \max_{0 < x_4 < x} [f_4(x_4) + F_3(x - x_4)]$$

Оскільки описуваний етап є завершальним і розраховувати значення $F_4(0)$, $F_4(50)$, $F_4(100)$, та $F_4(150)$ не має змісту, тому доцільно перейти одразу до визначення $F_4(200)$.

Отже, маємо:

$$F_4(200) = \max \left\{ \begin{array}{l} f_4(0) + F_3(200) = 0 + 230 = 230 \\ f_4(50) + F_3(150) = 70 + 170 = 240 \\ f_4(100) + F_3(100) = 105 + 115 = 220 \\ f_4(150) + F_3(50) = 155 + 60 = 215 \\ f_4(200) + F_3(0) = 230 + 0 = 230 \end{array} \right\} = 240.$$

В результаті розрахунків ми заповнили таблицю 6.3 і отримали таблицю 6.4

Таблиця 6.4

Розмір інвестицій, млн. грн., x	Значення приросту продукції, млн. грн.			
	$F_1(x)$	$F_2(x)$	$F_3(x)$	$F_4(x)$
0	0	0	0	-
50	45	60	60	-
100	110	90	115	-
150	160	170	170	-
200	210	220	230	240

Максимальний ефект розміром 240 млн. грн. забезпечує другий член $f_4(50) + F_3(150)$. Аналіз одержаних розрахунків показує, що оптимальним варіантом буде виділення четвертому проекту інвестицій розміром 50 млн.грн., а першим трьом разом — 150 млн.грн. Щоб дізнатись, який оптимальний варіант розподілу 150 млн.грн. між першими трьома проектами, повернемося до $F_3(150)$. Бачимо, що 150 млн. грн. оптимально можна розділити за двома варіантами:

- $f_3(0) + F_2(150)$, тобто третьому проекту кошти не виділяти, а віддати першим двом 150 млн. грн. Щоб визначити оптимальний варіант розподілу 150 млн. грн. між першими двома проектами, повернемося до $F_2(150)$. Бачимо, що цей варіант розподілу отримаємо з виразу $f_2(50) + F_1(100)$, тобто другому проекту даємо 50 млн. грн., а першому — 100 млн. грн.
- $f_3(150) + F_2(0)$, який означає, що в третій проект вигідно інвестувати 150 млн. грн., а першим двом кошти не виділяти.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.08- 05.01/051.00.2/Б/ПП 2-2020
	Екземпляр № 1	Арк 20/ 13

Отже, ми отримали два оптимальні плани розподілу 200 млн. грн. між чотирма проектами підприємства:

І варіант розподілу		ІІ варіант розподілу	
<i>Проект</i>	<i>Розмір інвестицій</i>	<i>Проект</i>	<i>Розмір інвестицій</i>
Перший	100 млн.грн.	Перший	0 млн.грн.
Другий	50 млн.грн.	Другий	0 млн.грн.
Третій	0 млн.грн.	Третій	150 млн.грн.
Четвертий	50 млн.грн.	Четвертий	50 млн.грн.

При розподілі коштів за кожним з двох варіантів отримаємо максимальний приріст продукції розміром 240 млн. грн.