

ТЕМА 7. Динамічне програмування

План

7.1. Постановка задачі динамічного програмування.....	1
7.2. Методи розв'язування задач динамічного програмування	2
7.3. Прикладні моделі динамічного програмування (модель оптимального розподілу фінансових ресурсів між інвестиційними проектами).....	4

7.1. Постановка задачі динамічного програмування

Динамічне програмування – це математичний апарат, який дозволяє швидко знаходити оптимальне рішення у випадку, коли ситуація, що вивчається, має велику кількість варіантів поведінки, які дають різні результати і серед них треба вибрати найкращий. Динамічне програмування використовують при розв'язуванні певного типу задач шляхом їх розкладу на менші та простіші підзадачі. Розв'язок такого виду задачі можна знайти шляхом перебору всіх можливих варіантів і вибору серед них найкращого, але в більшості випадків такий перебір є досить трудомістким. Тому процес оптимального рішення розбивається на етапи (кроки) і досліджується з допомогою методу динамічного програмування.

Динамічне програмування використовується для розв'язання таких задач: розподіл дефіцитних капітальних вкладень між новими напрямками їх використання; розробка сценаріїв управління попитом чи запасами; розробка принципів календарного планування виробництва і вирівнювання зайнятості в умовах нестабільного попиту на продукцію; складання календарних планів поточного та капітального ремонту устаткування та його зміни; формування послідовності розвитку комерційної операції і т.д.

Розглянемо деякий керований процес. Припустимо, що керування можна розбити на n кроків, тобто рішення приймається послідовно на кожному кроці, а процедура, яка переводить систему з початкового стану в кінцевий, є сукупністю n покрокових керувань. В результаті керування система переходить із стану S_0 в S_n .

Позначимо через $x_k \in U_k$ керування на k -му кроці ($k = \overline{1, n}$) де U_k – множина доступних керувань на k -му кроці.

Нехай $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – керування, яке переводить систему зі стану S_0 в стан S_n . Позначимо через S_k стан системи після k -го кроку керування. Отримуємо послідовність станів $S_0, S_1, \dots, S_{k-1}, S_k, S_{k+1}, \dots, S_n$ (рис. 7.1).



Рис. 7.1. Схематичне зображення процесу керування

Показник ефективності процесу керування залежить від початкового стану системи і керованої змінної:

$$Z = F(S_0, x) \quad (7.1)$$

Власне, задача динамічного програмування формулюється таким чином: знайти таке значення керованої змінної $\bar{x}^*$, яке переводить систему з початкового стану S_0 в кінцевий S_n , за якого цільова функція (7.1) набуває найбільшого (найменшого) значення.

Розглянемо характерні особливості математичної моделі динамічного програмування:

- 1) задача оптимізації формулюється як скінченний багатокроковий процес управління;
- 2) цільова функція (7.1) є адитивною від показника ефективності кожного кроку, тобто виграш від всієї операції складається з виграшів, отриманих на кожному кроці.

$$Z = F(S_0, x) = \sum_{k=1}^n F_k(S_{k-1}, x_k), \quad (7.2)$$

де $F_k(S_{k-1}, x_k) = Z_k$ – показник ефективності на k -му кроці;

- 3) вибір керування x_k на кожному кроці залежить тільки від стану системи до цього кроку і не впливає на попередні кроки (немає зворотного зв'язку);
- 4) стан системи S_k після кожного кроку керування залежить тільки від попереднього стану S_{k-1} і керуючої дії x_k на k -му кроці та не залежить від попередніх станів систем і керувань (відсутність післядії):

$$S_k = \varphi_k(S_{k-1}, x_k), \quad k = \overline{1, n}. \quad (7.3)$$

де φ_k – оператор переходу;

- 5) на кожному кроці керування x_k залежить від скінченного числа керованих змінних, а стан системи S_k залежить від скінченного числа параметрів;
- 6) оптимальним керуванням є вектор $\bar{x}^*$, який знаходиться шляхом послідовних оптимальних покрокових керувань: $\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*, \dots, x_n^*)$, кількість яких і визначає число кроків задачі.

7.2. Методи розв'язування задач динамічного програмування

Нехай процес оптимізації розбитий на n кроків. На кожному кроці потрібно визначити два типи змінних – змінну стану S та змінну керування x . Змінна стану S визначає, в яких станах може бути система на k -му кроці. Залежно від S на цьому кроці можна використати деякі керування, які характеризуються змінною x . Використання керування x на k -му кроці дає

деякий результат $f_k(S, x_k)$ і переводить систему в деякий новий стан $S'(S, x_k)$. Для кожного можливого стану на k -му кроці (з усіх можливих керувань) вибирається таке керування x_k^* , щоб результат, який отримаємо з k -го по n -ий крок був оптимальним. Числова характеристика цього результату називається *функцією Белмана* $F_k(S)$ та залежить від номера кроку k і стану системи S .

Отже, *сутність принципу оптимальності Белмана* полягає в тому, що яким би не був стан системи в результаті певної кількості кроків, на найближчому кроці керування потрібно вибрати так, щоб воно разом з оптимальним керуванням на всіх наступних кроках приводило до найкращого виграшу.

Весь розв'язок задачі розбивається на два етапи.

1) *На першому етапі* знаходять функцію Белмана й оптимальне керування для всіх можливих станів на кожному кроці, починаючи з першого. На останньому n -му кроці знайти оптимальне керування і значення функції Белмана $F_n(S)$ нескладно, оскільки $F_n(S) = \max\{f_k(S, x_n)\}$, де максимум знаходять за всіма можливими значеннями x_n .

Подальші розрахунки проводять згідно з рекурентним співвідношенням, яке пов'язує функцію Белмана на кожному кроці з тією ж функцією, обчисленою на попередньому кроці:

$$F_k(S) = \max_{x_k} \{f_k(S', x_k) + F_{k-1}(S, x_k)\}. \quad (7.4)$$

Цей максимум (чи мінімум) знаходиться за всіма можливими для k і S значеннями керованої змінної x_k . Після того як функція Белмана і відповідне оптимальне керування знайдені для всіх кроків з першого до n -го (на першому кроці $k=1$ стан системи рівний її початковому стану S_0), виконуємо другий етап розв'язання задачі.

2) *Другий етап* розв'язання задачі здійснюється згідно з алгоритмом зворотної прогонки. Знаючи оптимальне керування на n -му кроці x_n ми можемо шукати оптимальне керування на $(n-1)$ кроці доти, доки не дійдемо до першого.

Таким чином в процесі оптимізації керування методом динамічного програмування багатокроковий процес «проходиться» двічі: перший раз – з початку до кінця, в результаті чого знаходимо умовні оптимальні керування і умовні оптимальні виграші; другий раз – від кінця до початку, коли нам залишається тільки «прочитати» вже готове керування, що складається з оптимальних покрокових управлінь.

7.3 Прикладні моделі динамічного програмування

Прикладне застосування методу динамічного програмування розглянемо на прикладі оптимального розподілу фінансових ресурсів між інвестиційними проектами.

Модель оптимального розподілу фінансових ресурсів між інвестиційними проектами

Розглянемо виробничу ситуацію, пов'язану з аналізом пропозицій відносно збільшення виробничих потужностей підприємства за рахунок реалізації певних інвестиційних проектів. Для можливого розширення потужностей підприємство виділяє фінансові ресурси розміром x , які необхідно розділити між проектами в такий спосіб, щоб одержати максимально можливий сумарний приріст випуску продукції.

Позначимо через x_i – розмір інвестицій, виділених під i -ий проект $i = \overline{1, n}$, де i – індекс проекту. Отже має місце рівність:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = x \quad (7.5)$$

На основі попереднього аналізу встановлено, що приріст продукції внаслідок реалізації i -го проекту задається функцією $f_i(x_i)$. Тоді сумарний приріст продукції фірми становитиме:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i) \quad (7.6)$$

Отже, наша задача полягає у знаходженні таких значень $x_i \geq 0$ ($i = \overline{1, n}$), які задовольняють (7.5) і забезпечують максимум функції (7.6).

Позначимо максимальний сумарний приріст продукції, одержаний при розподілі інвестицій розміром x для перших k проектів, через $F_k(x)$, причому

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_k, \quad x_i \geq 0, i = \overline{1, k}.$$

Для визначення функцій $F_k(x)$ побудуємо рекурентне рівняння за допомогою кількох етапів.

Почнемо з розподілу наявних засобів для першого проекту. Знайдемо максимальне значення цього приросту за формулою:

$$F_1(x) = \max_{0 \leq x_1 \leq x} [f_1(x)] = f_1(x)$$

Переходимо до другого етапу розрахунків. Нам необхідно знайти оптимальний варіант розподілу інвестицій розміром x за умови, що вони виділені першому та другому проекту. Тут слід враховувати отриману найкращу ефективність для першого проекту. Припустимо, що на другий проект виділені інвестиції розміром x_2 , які дають $f_2(x_2)$ приросту продукції, а залишок $(x - x_2)$ виділяється першому проекту, який дає $F_1(x - x_2)$ приросту.

Тоді максимальний приріст продукції, отриманий від оптимального розподілу всіх інвестицій між першим і другим проектами буде:

$$F_2(x) = \max_{0 \leq x_2 \leq x} [f_2(x_2) + F_1(x - x_2)]$$

Переходимо до третього етапу, на якому необхідно знайти оптимальний варіант розподілу інвестицій за умови, що вони виділяються першим трьом проектам разом. Нехай на третій проект виділено x_3 одиниць коштів, які в свою чергу даватимуть для нього приріст продукції розміром $f_3(x_3)$. Наявний залишок $(x - x_3)$ надамо першому та другому проектам, які при оптимальному розподілі дають приріст $F_2(x - x_3)$ грошових одиниць. Отже, максимальний ефект, який отримаємо від розподілу інвестицій між першими трьома проектами буде:

$$F_3(x) = \max_{0 \leq x_3 \leq x} [f_3(x_3) + F_2(x - x_3)]$$

Розглянемо загальний випадок розподілу інвестицій для перших k проектів. Нехай k -му проекту виділено x_k одиниць інвестицій, які забезпечать йому приріст продукції розміром $f_k(x_k)$. Залишок інвестицій $(x - x_k)$ віддамо першим $(k-1)$ проектам і вони при оптимальному розподілі принесуть підприємству $F_{k-1}(x - x_k)$ приросту продукції. При цьому підприємство отримає сумарний приріст продукції рівний:

$$F_k(x) = \max_{0 \leq x_k \leq x} [f_k(x_k) + F_{k-1}(x - x_k)] \quad (7.7)$$

Отже, ми отримали рекурентне співвідношення (7.7), яке представляє собою рівняння Белмана для задачі (7.5) – (7.6).

Приклад 7.1. Для збільшення випуску продукції підприємство може виділити інвестиції розміром $x=200$ млн. грн. своїм чотирьом проектам на певний період. Приріст продукції, який може отримати підприємство за кожним з проектів, при виділенні йому відповідних інвестицій, представлений у таблиці 7.1. Потрібно знайти оптимальний варіант вкладів інвестицій і дати економічний аналіз ефективності проведених заходів.

Таблиця 7.1

Розмір інвестицій, млн. грн., x	Приріст продукції, млн.грн.			
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0
50	45	60	55	70
100	110	90	85	105
150	160	165	170	155
200	210	215	225	230

♦ Розв'язування.

Для знаходження оптимального варіанта розподілу наявних інвестицій використаємо функціональне рівняння (7.7). Розрахунки проведемо в чотири етапи. Для прискорення розрахунків всі значення $F_k(x_k)$ на наступних етапах будемо заносити в таблицю 7.2.

Таблиця 7.2

Розмір інвестицій, млн. грн., x	Значення приросту продукції, млн. грн.			
	$F_1(x)$	$F_2(x)$	$F_3(x)$	$F_4(x)$
0				
50				
100				
150				
200				

Насамперед знайдемо умовно оптимальне значення варіанта розподілу виділених інвестицій для першого проекту.

Оскільки $F_1(x) = \max_{0 \leq x_1 \leq x} [f_1(x)] = f_1(x)$, то значення $F_1(x)$ в таблиці 7.2 дорівнюють значенням $f_1(x)$ з таблиці 7.1.

Переходимо до визначення умовно оптимального значення розподілу інвестицій, виділених двом першим проектам разом. Для цього використаємо формулу:

$$F_2(x) = \max_{0 \leq x_2 \leq x} [f_2(x_2) + F_1(x - x_2)],$$

у якій надамо x_2 усіх можливих значень (0; 50; 100; 150; 200).

$$F_2(0) = 0$$

Розглянемо випадок розподілу інвестицій розміром 50 млн.грн. Отримаємо:

$$F_2(50) = \max \left\{ \begin{array}{l} f_2(0) + F_1(50) = 0 + 45 = 45 \\ f_2(50) + F_1(0) = 60 + 0 = 60 \end{array} \right\} = 60$$

Максимальне значення приросту продукції від вкладання 50 млн.грн. в перших два проекти одержано за рахунок другого члена, тобто $f_2(50) + F_1(0)$. Це означає, що другому проекту слід виділити 50 млн.грн., а першому не надавати коштів.

Аналогічно проводимо обчислення $F_2(x)$ для інших значень вкладень (100; 150; 200).

Так, при виділенні першим двом проектам 100 млн.грн. маємо:

$$F_2(100) = \max \left\{ \begin{array}{l} f_2(0) + F_1(100) = 0 + 110 = 110 \\ f_2(50) + F_1(50) = 60 + 45 = 105 \\ f_2(100) + F_1(0) = 90 + 0 = 90 \end{array} \right\} = 110$$

Одержаний результат показує, що першому проекту інвестиції потрібно виділити розміром 100 млн.грн., а другому — коштів не давати. Приріст продукції при цьому буде 110 млн. грн.

Розподілимо аналогічним чином 150 млн. грн.:

$$F_2(150) = \max \left\{ \begin{array}{l} f_2(0) + F_1(150) = 0 + 160 = 160 \\ f_2(50) + F_1(100) = 60 + 110 = 170 \\ f_2(100) + F_1(50) = 90 + 45 = 135 \\ f_2(150) + F_1(0) = 165 + 0 = 165 \end{array} \right\} = 170.$$

При розподілі 150 млн. грн. доцільно 100 млн.грн. дати першому проекту, а 50 — другому.

Проведемо аналогічні міркування для розподілу 200 млн.грн.

Записуємо:

$$F_2(200) = \max \left\{ \begin{array}{l} f_2(0) + F_1(200) = 0 + 210 = 210 \\ f_2(50) + F_1(150) = 60 + 160 = 220 \\ f_2(100) + F_1(100) = 90 + 110 = 200 \\ f_2(150) + F_1(50) = 165 + 45 = 210 \\ f_2(200) + F_1(0) = 215 + 0 = 215 \end{array} \right\} = 220.$$

Згідно з виразом $f_2(50) + F_1(150)$, який забезпечує максимальний приріст продукції обсягом 220 млн.грн., необхідно 150 млн.грн. віддати першому проекту, а 50 млн. грн. — другому.

Перейдемо до третього етапу, в якому потрібно визначити оптимальний варіант розподілу інвестицій між першими трьома проектами разом. Для розрахунку значень $F_3(x)$ використаємо формулу:

$$F_3(x) = \max_{0 \leq x_3 \leq x} [f_3(x_3) + F_2(x - x_3)]$$

Надаючи $x_3 = (0; 50; 100; 150; 200)$, відповідно одержимо:

$$F_3(0) = 0.$$

$$F_3(50) = \max \left\{ \begin{array}{l} f_3(0) + F_2(50) = 0 + 60 = 60 \\ f_3(50) + F_2(0) = 55 + 0 = 55 \end{array} \right\} = 60.$$

Бачимо, що вигідно всі 50 млн.грн. віддати першим двом проектам, а третьому не давати коштів. Максимальний приріст продукції буде 60 млн. грн.

Виконаємо відповідні обчислення при $x_3 = 100$:

$$F_3(100) = \max \left\{ \begin{array}{l} f_3(0) + F_2(100) = 0 + 110 = 110 \\ f_3(50) + F_2(50) = 55 + 60 = 115 \\ f_3(100) + F_2(0) = 85 + 0 = 85 \end{array} \right\} = 115.$$

Максимальний ефект дає вираз $f_3(50) + F_2(50)$, а це означає, що 100 млн. грн. між першими трьома проектами потрібно розподілити таким чином: першим двом проектам віддати 50 млн.грн. і третьому - 50 млн.грн. Приріст продукції становитиме 115 млн.грн.

Обчислимо $F_3(150)$:

$$F_3(150) = \max \left\{ \begin{array}{l} f_3(0) + F_2(150) = 0 + 170 = 170 \\ f_3(50) + F_2(100) = 55 + 110 = 165 \\ f_3(100) + F_2(50) = 85 + 60 = 145 \\ f_3(150) + F_2(0) = 170 + 0 = 170 \end{array} \right\} = 170.$$

При розподілі 150 млн. грн. ми отримали два оптимальних варіанти:

- 1) між першими двома проектами розподілити 150 млн.грн., а третьому не надавати коштів;
- 2) 150 млн. грн. віддати третьому проекту, а першим двом не надавати коштів.

В обох випадках максимальний приріст продукції становитиме 170 млн.грн.

На завершення цього етапу проведемо аналіз розподілу 200 млн. грн. між першими трьома проектами:

$$F_3(200) = \max \left\{ \begin{array}{l} f_3(0) + F_2(200) = 0 + 220 = 220 \\ f_3(50) + F_2(150) = 55 + 170 = 225 \\ f_3(100) + F_2(100) = 85 + 110 = 195 \\ f_3(150) + F_2(50) = 170 + 60 = 230 \\ f_3(200) + F_2(0) = 225 + 0 = 225 \end{array} \right\} = 230.$$

Ми бачимо, що найбільший приріст продукції 230 млн. грн. отримаємо, якщо 50 млн. грн. розподілимо між першими двома проектами, а в третє інвестуємо 150 млн. грн.

Переходимо до четвертого етапу, в якому необхідно проаналізувати ефективність розподілу наявних інвестицій уже між чотирма проектами підприємства. Поклавши у (7.7) $k=4$, маємо рекурентне рівняння:

$$F_4(x) = \max_{0 < x_4 < x} [f_4(x_4) + F_3(x - x_4)]$$

Оскільки описуваний етап є завершальним і розраховувати значення $F_4(0)$, $F_4(50)$, $F_4(100)$, та $F_4(150)$ не має змісту, тому доцільно перейти одразу до визначення $F_4(200)$.

Отже, маємо:

$$F_4(200) = \max \left\{ \begin{array}{l} f_4(0) + F_3(200) = 0 + 230 = 230 \\ f_4(50) + F_3(150) = 70 + 170 = 240 \\ f_4(100) + F_3(100) = 105 + 115 = 220 \\ f_4(150) + F_3(50) = 155 + 60 = 215 \\ f_4(200) + F_3(0) = 230 + 0 = 230 \end{array} \right\} = 240.$$

В результаті розрахунків ми заповнили таблицю 7.2 і отримали таблицю 7.3.

Таблиця 7.3

Розмір інвестицій, млн. грн., x	Значення приросту продукції, млн. грн.			
	$F_1(x)$	$F_2(x)$	$F_3(x)$	$F_4(x)$
0	0	0	0	-
50	45	60	60	-
100	110	90	115	-
150	160	170	170	-
200	210	220	230	240

Максимальний ефект розміром 240 млн. грн. забезпечує другий член $f_4(50) + F_3(150)$. Аналіз одержаних розрахунків показує, що оптимальним варіантом буде виділення четвертому проекту інвестицій розміром 50 млн.грн., а першим трьом разом — 150 млн.грн. Щоб дізнатись, який оптимальний варіант розподілу 150 млн.грн. між першими трьома проектами, повернемося до $F_3(150)$. Бачимо, що 150 млн. грн. оптимально можна розділити за двома варіантами:

- $f_3(0) + F_2(150)$, тобто третьому проекту кошти не виділяти, а віддати першим двом 150 млн. грн. Щоб визначити оптимальний варіант розподілу 150 млн. грн. між першими двома проектами, повернемося до $F_2(150)$. Бачимо, що цей варіант розподілу отримаємо з виразу $f_2(50) + F_1(100)$, тобто другому проекту даємо 50 млн. грн., а першому — 100 млн. грн.
- $f_3(150) + F_2(0)$, який означає, що в третій проект вигідно інвестувати 150 млн. грн., а першим двом кошти не виділяти.

Отже, ми отримали два оптимальні плани розподілу 200 млн. грн. між чотирма проектами підприємства:

I варіант розподілу		II варіант розподілу	
<i>Проект</i>	<i>Розмір інвестицій</i>	<i>Проект</i>	<i>Розмір інвестицій</i>
Перший	100 млн.грн.	Перший	0 млн.грн.
Другий	50 млн.грн.	Другий	0 млн.грн.
Третій	0 млн.грн.	Третій	150 млн.грн.
Четвертий	50 млн.грн.	Четвертий	50 млн.грн.

При розподілі коштів за кожним з двох варіантів отримаємо максимальний приріст продукції розміром 240 млн. грн.