

ТЕМА 6. Нелінійні оптимізаційні моделі та методи їх розв'язання

План

6.1. Область застосування нелінійних оптимізаційних задач в економіці.....	1
6.2. Геометрична інтерпретація задачі нелінійного програмування.....	2
6.3. Основні труднощі розв'язування задач нелінійного програмування	4
6.4. Методи розв'язання задач нелінійного програмування	7
6.5. Окремі приклади задач нелінійного програмування	9
6.6. Особливості практичного розв'язання задач нелінійного програмування за допомогою надбудови «Пошук рішення» Microsoft Excel та економічна інтерпретація отриманих результатів	10

6.1. Область застосування нелінійних оптимізаційних задач в економіці

У попередніх розділах було розглянуто методи розв'язування задачі лінійного програмування і деякі класи задач, що певними нескладними перетвореннями зводяться до лінійних. Ці методи найбільш розроблені, легко реалізуються на ПЕОМ, а тому набули широкого застосування в багатьох галузях науки, техніки та економіки. Проте лінійні моделі відображають лише певну і вельми обмежену сукупність властивостей навколишнього світу. Адже, скажімо, соціально-економічні процеси в більшості не є лінійними. Галузі, об'єднання та окремі підприємства народного господарства функціонують і розвиваються за умов невизначеності, а тому описуються нелінійними, стохастичними, динамічними процесами. Отже, для управління народним господарством в цілому, його галузями та окремими об'єктами господарювання потрібне застосування нелінійних економіко-математичних моделей і методів.

Зауважимо, що сучасний рівень розвитку комп'ютерної техніки і методів математичного моделювання створює передумови для використання нелінійних методів, а це може значною мірою підвищити якість розроблюваних планів, надійність та ефективність рішень, які приймаються.

Досить детально розглянута в розділах, присвячених лінійному програмуванню, задача пошуку оптимальних обсягів виробництва ґрунтується на припущеннях про лінійність зв'язку між витратами ресурсів та обсягами виготовленої продукції; між ціною, рекламою і попиту тощо. Якщо такі зв'язки насправді є нелінійними, адекватніші математичні моделі доцільно формулювати в термінах нелінійного програмування.

Нехай для деякої виробничої системи треба визначити план випуску продукції, за умови найкращого способу використання ресурсів системи. Відомі загальні запаси кожного ресурсу, нормативи витрат кожного ресурсу на одиницю продукції та ціна реалізації одиниці виготовленої продукції. Критерії оптимальності можуть бути різноманітними, наприклад, максимізація виручки від реалізації продукції. Така умова подається лінійною залежністю загальної виручки від обсягів проданого товару та ціни одиниці продукції.

Однак загальновідомим є той факт, що за умов ринкової конкуренції питання реалізації продукції є досить складне. Обсяг збуту кінцевої продукції визначається перш за все її ціною, отже, як цільову функцію доцільно

розглядати максимізацію не всієї виготовленої, а лише реалізованої продукції. Тоді необхідно визначити також і оптимальне значення ціни одиниці продукції, за якої обсяг збуту буде максимальним, для цього її потрібно ввести до задачі як невідому величину. При цьому обмеження задачі мають враховувати зв'язки між ціною, рекламою та обсягами збуту продукції. Цільова функція міститиме добуток двох невідомих величин (оптимальна ціна одиниці продукції та оптимальна кількість відповідного виду продукції), отже, є нелінійною. Таким чином, маємо задачу нелінійного програмування.

Також добре відома транспортна задача стає нелінійною, якщо вартість перевезення одиниці товару залежить від загальної кількості перевезеного по маршруту товару. Тобто коефіцієнти при невідомих у цільовій функції, що в лінійному випадку були сталими, залежатимуть від значень невідомих (отже, самі стають невідомими), що знову веде до нелінійності у функціоналі.

І нарешті, будь-яка задача стає нелінійною, якщо в математичній моделі треба враховувати умови невизначеності та ризик. За величину ризику беруть таку величину, як дисперсія, тому врахування обмеженості ризику вимагає введення нелінійної функції в систему обмежень, а мінімізація ризику певного процесу досягається за рахунок дослідження математичної моделі з нелінійною цільовою функцією.

Загальна задача математичного програмування формулюється у такий спосіб. Знайти такі значення змінних x_j , $j = \overline{1, n}$, щоб цільова функція набувала екстремального (максимального чи мінімального значення):

$$\max(\min) F = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (6.1)$$

за умов

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \{ \leq, =, \geq \} \overline{b_i} \quad (i = \overline{1, m}); \quad (6.2)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}). \quad (6.3)$$

Якщо всі функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ і $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $i = \overline{1, m}$ є лінійними, то доходимо задачі лінійного програмування, інакше (хоча б одна з функцій не є лінійною) маємо задачу нелінійного програмування.

6.2. Геометрична інтерпретація задачі нелінійного програмування

Геометрично цільова функція (6.1) визначає деяку поверхню, обмеження (6.2)-(6.3) визначають допустиму підмножину n -вимірного евклідового простору. Знаходження оптимального розв'язку задачі нелінійного програмування зводиться до відшукування точки з допустимої підмножини, в якій досягається поверхня найвищого (найнижчого) рівня.

Якщо цільова функція неперервна, а допустима множина розв'язків замкнена, не пуста та обмежена, то глобальний максимум (мінімум) задачі існує.

Найпростішими для розв'язування є задачі нелінійного програмування, що містять систему лінійних обмежень і нелінійну цільову функцію. У цьому випадку область допустимих розв'язків є опуклою, тобто замкненою, непустою та обмеженою.

Розглянемо приклад геометричного способу розв'язування задачі нелінійного програмування.

Приклад 6.1. Знайти мінімальне і максимальне значення функції

$$Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 1, \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 24, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язування. Область допустимих розв'язків утворює чотирикутник $ABCD$ (рис. 6.1). Геометрично цільова функція представляє коло з центром у точці $M(2; 2)$ і квадратом радіуса $R^2 = Z$, тобто значення цільової функції буде збільшуватися (зменшуватися) зі збільшенням (зменшенням) радіусу кола.

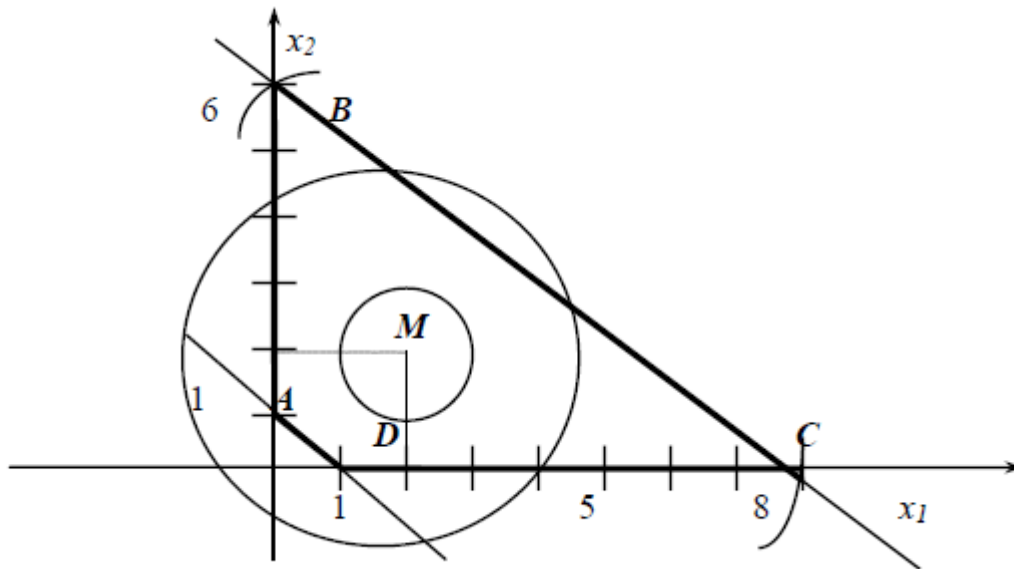


Рис. 6.1

Проведемо з точки M кола різних радіусів. Функція Z має два локальні максимуми: точка $B(0; 6)$ і $C(8; 0)$. Обчислимо значення функціоналу в цих точках:

$$Z(B) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = (0 - 2)^2 + (6 - 2)^2 = 4 + 16 = 20,$$

$$Z(C) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = (8 - 2)^2 + (0 - 2)^2 = 36 + 4 = 40.$$

Оскільки $Z(C) > Z(B)$, то точка $C(8; 0)$ — точка глобального максимуму. Очевидно, що найменший радіус $R=0$, тоді $R^2 = 0 = Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = 2$.

Іншими словами, точка M є точкою мінімуму, оскільки їй відповідає найменш можливе значення цільової функції.

Зазначимо, що в даному випадку точка, яка відповідає оптимальному плану задачі, розташована всередині багатокутника допустимих розв'язків, що для задач лінійного програмування неможливо.

Приклад 6.2. Знайти мінімальне значення функції

$$Z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 x_2 \leq 8, \\ x_1 + x_2 \geq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Розв'язування. У даному прикладі множина допустимих розв'язків складається з двох окремих частин (рис. 6.2). Цільова функція аналогічно попередньому випадку представляє коло з центром у точці $M(4; 4)$. Функція Z має два локальні мінімуми у точці $A(x_1 \approx 0,71; x_2 \approx 11,29)$ і в точці $B(x_1 \approx 11,29; x_2 \approx 0,71)$. Значення функціоналу в цих точках однакове і дорівнює

$$Z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 = 64$$

Отже, маємо два альтернативні оптимальні плани.

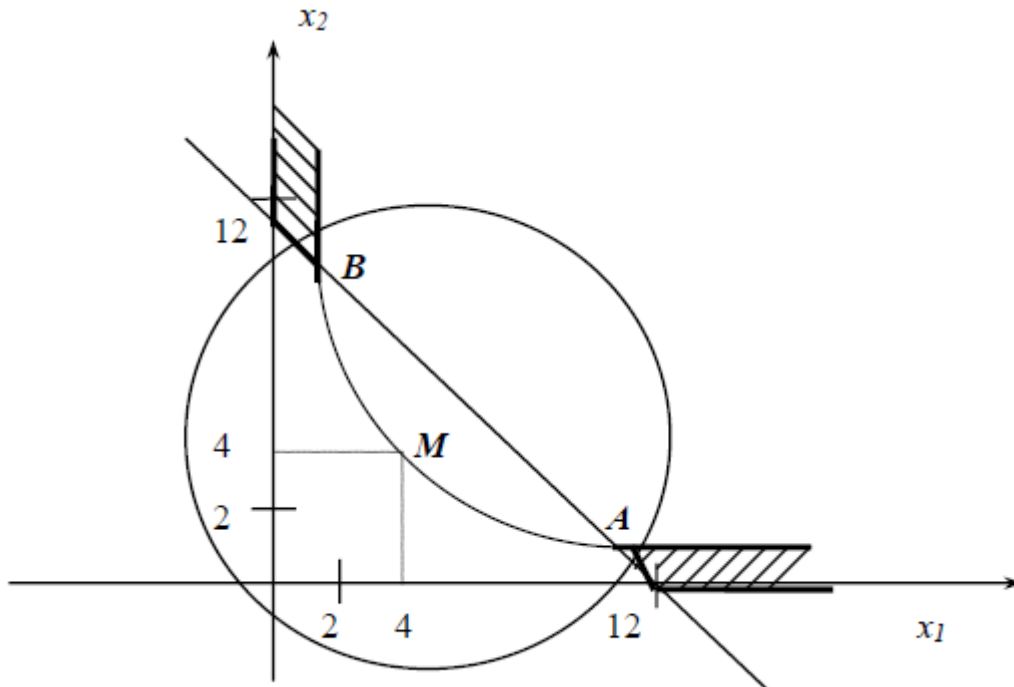


Рис. 6.2

Даний приклад ілюструє одну з особливостей задач нелінійного програмування. На відміну від задач лінійного програмування багатогранник допустимих розв'язків задачі нелінійного програмування не обов'язково буде опуклою множиною. Наведемо основні особливості задач нелінійного програмування, що впливають на методи їх розв'язування.

6.3. Основні труднощі розв'язування задач нелінійного програмування

Часто задачу нелінійного програмування намагаються звести до лінійного вигляду, що призводить до значних похибок. Наприклад, як правило, собівартість продукції z визначають як функцію, $z = a + b \frac{1}{x}$, де x – обсяги

виробництва. То заміною $y = \frac{1}{x}$ ми отримаємо лінійну функцію $z = a + by$. За такої заміни похибки немає, але заміна функції $z = -ax^2 + bx + c$ деякою лінійною $z = c + dy$ призводить до значних похибок, тобто є невиправданим, що зображено з рис. 6.3.

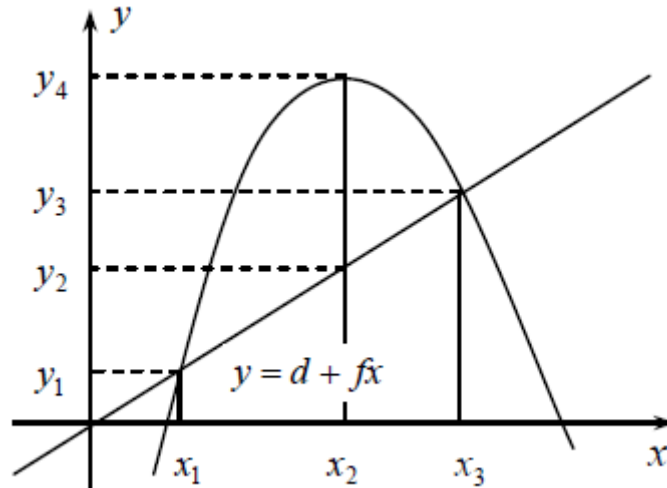


Рис. 6.3.

В точках x_1 та x_3 величина собівартості для двох цих функцій однакова. Однак у всіх інших точках ці значення відрізняються, причому у точці x_2 значною мірою, тобто на величину

$$y_4 - y_2 = -ax_2^2 + bx_2 + c - d - kx_2 = -ax_2^2 + (b - k)x_2 + (c - d).$$

Отже, лінеаризація нелінійних процесів є досить складною математичною задачею. Зведення нелінійної задачі до лінійної дає змогу отримати симплексним методом розв'язок, близький до розв'язку початкової нелінійної задачі. Однак з розглянутого прикладу бачимо, що у побудові наближених лінійних задач можна одержати надто грубий розв'язок, який непридатний для використання.

Навіть питання про існування розв'язку задачі нелінійного програмування потребує окремого дослідження.

Розглянемо основні труднощі розв'язування нелінійних задач.

1. Для лінійних задач можна завжди знайти оптимальний розв'язок універсальним методом — симплексним. При цьому не існує проблеми з доведенням існування такого розв'язку, тобто, в результаті розв'язування симплексним методом завжди приводить до одного з варіантів відповіді:

- 1) отримали оптимальний розв'язок;
- 2) умови задачі суперечливі, тобто розв'язку не існує;
- 3) цільова функція необмежена, тобто розв'язку також не існує.

Для задач нелінійного програмування не існує універсального методу розв'язування, що зумовило розробку значної кількості методів розв'язування окремих типів задач нелінійного програмування. Для кожного специфічного

методу треба доводити існування розв'язку задачі, а також його єдиність, що є досить складною математичною задачею.

Відомі точні методи розв'язування нелінійних задач, але при цьому існують труднощі обчислювального характеру, тобто навіть для сучасних ЕОМ такі алгоритми є досить трудомісткими, тому в більшості випадків для розв'язування нелінійних задач виправданим є використання наближених методів.

2. Для задач лінійного програмування доведено наявність єдиного екстремуму, що досягається в одній із вершин (або кількох одночасно) багатогранника допустимих розв'язків задачі. Під час знаходження розв'язку задачі нелінійного характеру виникають *кілька локальних оптимумів*, що значно ускладнює пошук серед них глобального.

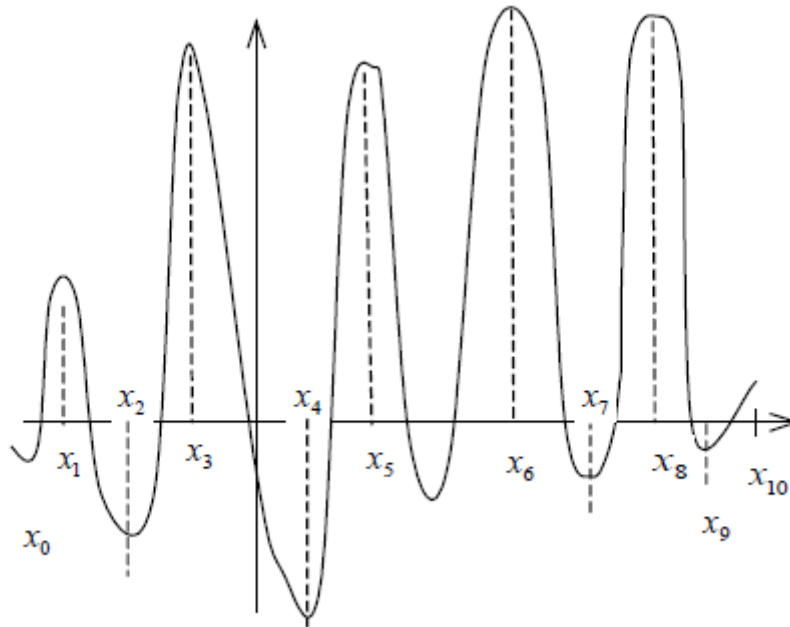


Рис. 6.4

На рис. 6.4 маємо на відрізку локальні оптимуми у точках $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$, глобальний — у точках x_4 і x_6 .

Більшість наближених методів дають можливість, як правило, знаходити локальний оптимум. Можна користуватись простим способом і визначити всі локальні оптимуми і методом порівняння знайти глобальний.

Однак для практичних розрахунків такий метод неефективний. Часто глобальний оптимум наближені методи не уловлюють, наприклад, у випадку, коли глобальний оптимум розташовано досить близько до локального. Якщо відрізок $[x_0, x_{10}]$ розподілити на 10 підвідрізків і глобальний оптимум попаде у відрізок $[x_i, x_{i+1}]$ (див. рис. 6.4), а зліва від x_i і справа x_{i+1} крива $y=f(x)$ буде підніматись, то глобальний оптимум буде пропущеним.

3. У задачах лінійного програмування точка оптимуму завжди була граничною точкою багатогранника допустимих планів. Для нелінійних задач точка, яка визначає *оптимальний план*, може бути як граничною, так і розташовуватись *всередині допустимої площини розв'язків* (планів), що було наочно проілюстровано в прикладі 6.1.

4. Доведено, що множина допустимих планів задачі лінійного програмування завжди є опуклою множиною. У випадку, коли система обмежень задачі є нелінійною, вона може визначати *множину допустимих розв'язків як неопуклу* або навіть складатись із довільних не пов'язаних між собою частин (приклад 6.2).

Одним із найпоширеніших прикладів зазначеної особливості є задачі цілочислового програмування (розглянута в Темі 5). Нагадаємо, вимога цілочисловості змінних задачі приводить до множини допустимих розв'язків утвореної окремими точками, що зумовлює розглянуті вище ускладнення пошуку розв'язків такого типу задач.

Кожна із вказаних особливостей задач вимагає застосування специфічних методів пошуку розв'язку, тому безперечно найскладнішими для розв'язування є задачі нелінійного програмування, в яких поєднується кілька або всі згадані особливості.

6.4. Методи розв'язання задач нелінійного програмування

Для розв'язування задач нелінійного програмування не існує універсального методу, тобто необхідно використовувати широку гаму методів та обчислювальних алгоритмів. Вони в основному базуються на застосуванні диференційного числення і залежать від конкретної постановки задачі та форми економіко-математичної моделі.

Методи нелінійного програмування бувають прямі і непрямі. За допомогою прямих методів пошуку оптимальних рішень здійснюють у напрямі найшвидшого збільшення (зменшення) цільової функції. Типовим представником цієї групи методів є градієнтні. Методика застосування непрямих методів передбачає зведення задачі до такої, оптимум якої слід знаходити простішими методами. Серед непрямих найрозробленіші методи розв'язування задач квадратичного та сепарабельного програмування.

Найпростішими для розв'язування є задачі нелінійного програмування, де система обмежень складається лише з рівнянь.

6.4.1. *Класичний метод визначення екстремуму засобами диференціального числення*, незважаючи на свою відносну простоту, придатний для рішення лише обмеженої кількості задач нелінійного програмування, в основному задач із однією змінною.

6.4.2. *Метод кусково-лінійних наближень* полягає у заміні нелінійної функції певною кількістю лінійних, із подальшим рішенням задачі методами лінійного програмування. Даний метод знижує точність рішення задачі, може бути застосований лише для обмеженої кількості задач нелінійного програмування, а з появою комп'ютерів взагалі практично втратив свою актуальність.

6.4.3. *Ідея методу множників Лагранжа* полягає в заміні початкової задачі простішою, для чого цільову функцію замінюють на іншу, з більшою кількістю змінних, яка включає умови, що подані обмеженнями. Після такого перетворення подальше розв'язування задачі полягає в пошуку екстремуму нової функції, на змінні якої не накладається жодних обмежень. Іншими

словами, від початкової задачі пошуку умовного екстремуму переходимо до задачі пошуку безумовного екстремального значення іншої функції. Отже, можливе застосування методів класичного аналізу пошуку екстремуму функції кількох змінних.

Таким чином, для розв'язування задачі необхідно обчислити частинні похідні нової цільової функції по кожній змінній і прирівняти їх до нуля, у результаті чого матимемо систему рівнянь. Розв'язок такої системи визначає так звані *стаціонарні точки*, серед яких є шукані екстремальні значення функції.

Метод множників Лагранжа полягає в переході від задачі умовної оптимізації до задачі безумовної оптимізації шляхом зведення ЦФ та обмежень до однієї функції, що отримала назву функції Лагранжа:

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot g_j(x_1, \dots, x_n);$$

де $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ – певні константи, що отримали назву множників Лагранжа.

В багатьох оптимізаційних задачах економічного характеру множники Лагранжа мають чітку економічну інтерпретацію, яка буде розглянута нижче.

6.4.4. Градієнтні методи – методи засновані на пошуку екстремуму функції шляхом покрокового переходу до нього за допомогою її градієнту.

Градієнтні методи належать до наближених методів розв'язування задач нелінійного програмування і дають лише певне наближення до екстремуму, якого за збільшення обсягу обчислень можна досягти з наперед заданою точністю, але при цьому є можливість знаходити лише локальні екстремуми цільової функції. Зауважимо, що такі методи можуть бути застосовані лише до тих типів задач нелінійного програмування, в яких цільова функція та обмеження є диференційовані хоча б один раз. Зрозуміло, градієнтні методи дають змогу знаходити точки глобального екстремуму для задач опуклого програмування, в яких локальний і глобальний екстремуми збігаються.

В основі градієнтних методів лежить основна властивість градієнта диференційованої функції – визначати напрям найшвидшого зростання цієї функції. Ідея методу — перехід від однієї точки до іншої в напрямі градієнта з деяким наперед заданим кроком.

Градієнтні методи рішення задач нелінійного програмування включають в себе багато різновидів та є найбільш розповсюдженими. До них відносяться метод найшвидшого спуску, метод покоординатного спуску, метод сполучених градієнтів, метод узагальненого приведенного градієнта та ін. Вони засновані на ідеї покрокового наближення до екстремуму цільової функції шляхом послідовного обчислення градієнта цієї функції, починаючи з деякої початкової точки. Точка, перехід від якої до точки з більшим (меншим) значенням неможливий, алгоритмом градієнтних методів вважається результатом рішення задачі нелінійного програмування.

Градієнтом функції

$$f(x_1, \dots, x_n)$$

є вектор із компонентами

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

спрямований у бік найбільшого зростання функції f :

$$\text{grad}(f) = \nabla(f) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \vec{e}_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \vec{e}_n.$$

де $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ частні похідні по змінним $x_1, \dots, x_n$. $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ одиничні вектори вісей координат (орти).

Сьогодні алгоритми градієнтних методів реалізовані багатьма програмами, наприклад Microsoft Excel та Mathcad, які автоматизують працездатні ітераційні розрахунки. Таким чином, основною задачею дослідника економіста стає коректна формалізація оптимізаційної задачі та введення її в комп'ютерну програму для подальшого рішення. Тому не будемо глибоко розглядати алгоритми методів рішення задач нелінійного програмування.

6.5. Окремі приклади задач нелінійного програмування

6.5.1. Квадратичне програмування

Окремим випадком задач опуклого програмування є задачі квадратичного програмування, до яких відносять задачі, що мають лінійні обмеження, а функціонал являє собою суму лінійної і квадратичної функцій:

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n + c_{11} x_1^2 + c_{22} x_2^2 + \dots + c_{nn} x_n^2 + 2c_{12} x_1 x_2 + 2c_{13} x_1 x_3 + \dots + 2c_{n-1,n} x_{n-1} x_n,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1, m}),$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}).$$

6.5.2. Дробово-лінійне програмування

Необхідність математичної постановки і розв'язку таких задач пов'язана, перш за все, з економічною доцільністю.

Частина економічних показників вимірюється на основі певних співвідношень, що математично формалізуються як дробові числа (продуктивність праці, фондоддача, ефективність інвестицій). Вони можуть використовуватись у задачах оптимізації як цільова функція. У таких випадках задача оптимізації стає нелінійною і вимагає використання певних процедур для зведення дробово-лінійної задачі до лінійної.

В економічних обґрунтуваннях дуже важливо використовувати не тільки абсолютні фінансові показники (дохід, прибуток, витрати), а й відносні (загальна рентабельність, рентабельність оборотних активів, собівартість реалізованої продукції). Відносні показники завжди адекватніше

характеризують фінансові результати господарської діяльності, оскільки у дробово-лінійних задачах оптимізації вони не задаються як наперед заданими, а розраховуються залежно від оптимальних обсягів виробництва.

З викладеного можна зробити висновок, що дробово-лінійні задачі можуть дуже широко використовуватись в економічних розрахунках, їх застосування дасть можливість отримати оптимальний план з урахуванням особливостей економічної постановки задач на практиці.

Зауважимо також, що вивчення методів математичної постановки та алгоритмізації розв'язку оптимізаційних задач здійснюється за комп'ютерної підтримки, а це означає, що майбутні фахівці з економіки можуть на практиці використовувати свої знання з оптимізації планів.

Під час розв'язування економічних задач часто як критерій оптимальності використовують показники рентабельності, продуктивності праці тощо, які математично виражаються дробово-лінійними функціями. Отже, загальну економіко-математичну модель у цьому випадку записують таким чином (розглянемо задачу визначення оптимальних обсягів виробництва продукції): позначимо c_j — прибуток від реалізації одиниці j -го виду продукції, тоді

загальний прибуток становитиме $\sum_{j=1}^n c_j x_j$; d_j — витрати на виробництво одиниці j -го виду продукції; $\sum_{j=1}^n d_j x_j$ — загальні витрати на виробництво. У випадку максимізації рентабельності виробництва цільова функція матиме вигляд

$$\max Z = \frac{\sum_{j=1}^n c_j x_j}{\sum_{j=1}^n d_j x_j} \quad (6.4)$$

за умов виконання обмежень по ресурсах

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1, m}), \quad (6.5)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}). \quad (6.6)$$

Передбачається, що знаменник цільової функції в площині допустимих розв'язків системи обмежень не дорівнює нулю.

Очевидно, що задача (6.4)-(6.6) відрізняється від звичайної задачі лінійного програмування лише цільовою функцією, що дозволяє застосовувати у певній модифікації відомі методи розв'язування задач лінійного програмування.

6.6. Особливості практичного розв'язання задач нелінійного програмування за допомогою надбудови «Пошук рішення» Microsoft Excel та економічна інтерпретація отриманих результатів

Оскільки задачі нелінійного програмування є узагальненням ЗЛП на випадок нелінійної цільової функції і (або) обмежень, структура підготовки вихідних даних для рішення задач нелінійного програмування за допомогою

надбудови «Пошук рішення» Microsoft Excel значною мірою подібна ЗЛП. Тут необхідно лише звернути увагу на коректне введення нелінійних залежностей, якими зв'язані змінні в цільовій функції і (або) обмеженнях. Більш цікавим є економічна інтерпретація отриманих результатів.

Графа **Приведенн. Градиент** розраховується для змінних, що не увійшли в оптимальне рішення. **Приведенн. Градиент** показує наскільки зміниться значення цільової функції при примусовому включенні в оптимальне рішення одиниці змінної, що до нього не увійшла. Таким чином, **Приведенн. Градиент** є аналогом **Приведенн.Стоимость** в ЗЛП.

В звіті про стійкість для кожного обмеження обчислений **Лагранжа Множитель**. Він, по-перше, вказує нам, чи є обмеження зв'язуючим. Для незв'язуючих обмежень він дорівнює нулю. По-друге, його значення показує наскільки зміниться значення цільової функції при зміні правої частини відповідного обмеження на одиницю. Таким чином, множник Лагранжа є аналогом **Тень Цена** в ЗЛП.

Дана тема є спробою висвітлити базові теоретичні положення та практичні аспекти розв'язання задач нелінійного програмування. Однак нелінійне програмування є дуже великим розділом, що охоплює значне коло практичних задач оптимізації, які відрізняються за своїм економічним змістом, структурою оптимізаційної моделі та методами рішення. Тому в нелінійному програмуванні потрібно індивідуально підходити до рішення кожної конкретної задачі.