

ТЕМА 5. Цілочислові задачі лінійного програмування та методи їх розв'язання

План

- 5.1. Постановка задачі цілочислового лінійного програмування*
- 5.2. Геометрична інтерпретація розв'язків цілочислових задач лінійного програмування на площині*
- 5.3. Загальна характеристика методів розв'язування цілочислових задач лінійного програмування*
- 5.4. Приклади застосування цілочислових задач лінійного програмування у плануванні та управлінні виробництвом*

5.1. Постановка задачі цілочислового лінійного програмування

Велика частина галузей економіки випускає продукцію чи послуги, які вимірюються цілими числами, це, наприклад, приладо- і машинобудування, легка промисловість та ін. Разом з тим в інших галузях, в яких продукція за специфікою не є цілочисловою застосовуються новітні технології виробництва і пакування. У результаті продукція, що випускається, має цілочисловий вимір, а це означатиме, що загальна лінійна модель, яка застосовується для планування обсягів виробництва, повинна включати обмеження на цілочислові значення невід'ємних змінних. Наявність таких обмежень ускладнює методи розв'язку задач оптимізації на підприємствах.

Існує доволі широкий клас задач математичного програмування, в економіко-математичних моделях яких одна або кілька змінних мають набувати цілих значень. Наприклад, коли йдеться про кількість верстатів у цеху, корів у сільськогосподарських підприємствах, чисельність працівників тощо, тобто коли така вимога впливає з особливостей технології виробництва та економічної сутності задачі..

Зустрічаються також класи задач, які на перший погляд не мають нічого спільного з цілочисловими моделями, проте формулюються як задачі цілочислового програмування. Вимоги дискретності змінних у явній чи неявній формах притаманні таким практичним задачам, як складання послідовності виробничих процесів; календарне планування роботи підприємства; планування і забезпечення матеріально-технічного постачання, розміщення підприємств, розрахунок капіталовкладень, планування використання обладнання тощо.

Задача математичного програмування, змінні якої повинні набувати цілих значень, називається задачею цілочислового програмування. У випадках, коли цілочислових значень набувають не всі, а одна чи кілька змінних, задача називається частково цілочисловою.

До цілочислового програмування належать також задачі оптимізації, в яких змінні набувають лише двох значень – 0 або 1 (бульові, або бінарні, змінні).

рис. 5.1). Проте, точка D не може бути розв'язком задачі, оскільки вона навіть не належить множині допустимих розв'язків (чотирикутник OABC), тобто відповідні значення змінних не задовольнятимуть систему обмежень задачі.

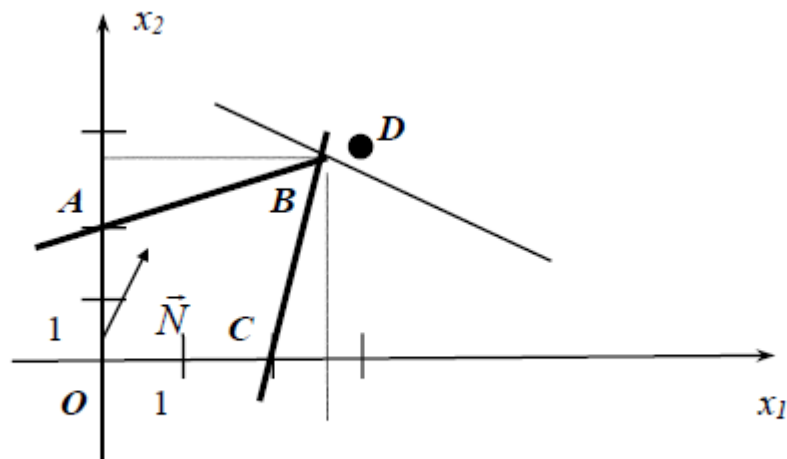


Рис. 5.1

Зауважимо, що геометрично множина допустимих планів будь-якої лінійної цілочислової задачі являє собою систему точок з цілочисловими координатами, що розташовані в середині опуклого багатокутника допустимих розв'язків відповідної нецілочислової задачі. Отже, для розглянутого на рис. 5.1 випадку множина допустимих планів складається з 9 точок (рис. 5.2), які утворені перетином сімейства прямих, що паралельні осям Ox і Oy і проходять через точки з цілими координатами 1, 2,

Для пошуку цілочислового оптимального розв'язку пряму, що відповідає цільовій функції, пересуваємо у напрямку вектору нормалі $\vec{N}$ до перетину з останнім вузлом утвореної цілочислової сітки. Цей вузол визначає точку, координати якої дають оптимальний цілочисловий розв'язок. В нашому прикладі оптимальний цілочисловий розв'язок відповідатиме точці M ($x_1=2$; $x_2=2$).

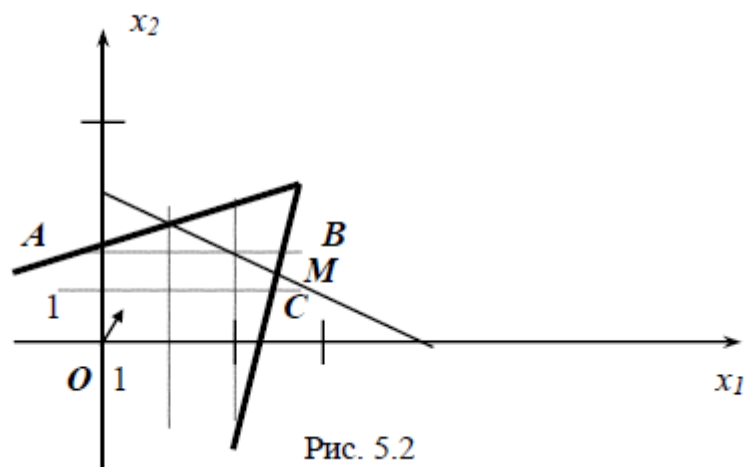


Рис. 5.2

Очевидно, особливість геометричної інтерпретації цілочислової задачі порівняно зі звичайною задачею лінійного програмування полягає лише у визначенні множини допустимих розв'язків.

Площина допустимих розв'язків загальної задачі лінійного програмування є опуклим багатогранником, вимога цілочисловості розв'язку веде до множини допустимих розв'язків, що складається з окремих точок. Тоді як для випадку двох змінних розв'язок можна відшукати графічним методом і використання цілочислової сітки дає можливість досить просто знайти оптимальний розв'язок, для загального випадку треба скористатись спеціальними методами.

5.3. Загальна характеристика методів розв'язування цілочислових задач лінійного програмування

Для пошуку оптимальних планів задач цілочислового програмування застосовують такі групи методів: 1) *відтинання*; 2) *комбінаторні*; 3) *наближені*.

Основою *методів відтинання* є ідея поступового звуження площини допустимих розв'язків розглядуваної задачі. Пошук цілочислового оптимуму починається з розв'язування задачі з так званими послабленими обмеженнями, тобто без урахування вимог цілочисловості змінних. Далі введенням у модель спеціальних додаткових обмежень, що враховують цілочисловість змінних, багатокутник допустимих розв'язків послабленої задачі поступово зменшуємо доти, доки змінні оптимального розв'язку не набудуть цілочислових значень.

До групи *методів відтинання* належать методи:

а) *розв'язування повністю цілочислових задач (дробовий алгоритм Гоморі);*

б) *розв'язування частково цілочислових задач (другий алгоритм Гоморі, або змішаний алгоритм цілочислового програмування).*

Комбінаторні методи цілочислової оптимізації базуються на ідеї перебору всіх допустимих цілочислових розв'язків, однак вони реалізують процедуру цілеспрямованого перебору, під час якої розглядається лише частина розв'язків (досить невелика), а решта враховується одним зі спеціальних методів.

Найпоширенішим у цій групі методів є метод *гілок і меж*. Починаючи з розв'язування послабленої задачі, цей метод передбачає розбиття початкової задачі на дві підзадачі виключенням областей, що не мають цілочислових розв'язків, і дослідженням кожної окремої частини многокутника допустимих розв'язків.

Для розв'язування задач із бульовими змінними застосовують комбіновані методи, причому оскільки змінні є бульовими, то методи пошуку оптимуму значно спрощуються.

Досить поширеними є також **наближені методи** розв'язування цілочислових задач лінійного програмування. Оскільки для практичних задач

великої розмірності за допомогою точних методів не завжди можна знайти строго оптимального розв'язку або для розв'язування задачі використовуються наближено визначені, неточні початкові дані, часто в реальних задачах достатньо обмежитись наближеним розв'язком, пошук якого є спрощеним.

Значна частина наближених алгоритмів базується на використанні обчислювальних схем відомих точних методів, таких, наприклад, як метод гілок і меж.

До наближених методів відносяться: метод локальної оптимізації (метод вектору спаду); модифікації точних методів; методи випадкового пошуку та ін.

5.4. Приклади застосування цілочислових задач лінійного програмування у плануванні та управлінні виробництвом

Задача про рюкзак. Найпростішою задачею цілочислового програмування, а саме — задачу лише з одним обмеженням, задача про рюкзак (або ранець). Така задача має численні приклади практичного застосування. Назва «задача про рюкзак» пов'язана з інтерпретацією задачі вибору найкращого складу предметів, що задовольняють певні умови як гіпотетичної проблеми туриста обрати для походу оптимальну кількість речей.

Турист може обирати потрібні речі зі списку в n -кількість предметів. Відома для кожного j -го предмета його маса $m_j (j = \overline{1, n})$. Для кожного з предметів визначено його цінність w_j . Максимальна вага всього вантажу в рюкзаку не може перевищувати вказаної норми M .

Необхідно визначити, скільки предметів кожного виду турист має покласти в рюкзак, щоб сумарна цінність спорядження була максимальна за умови виконання обмеження на масу рюкзака.

Позначимо через x_j — кількість предметів j -го виду в рюкзаку. Тоді математична модель задачі матиме вигляд

$$\begin{aligned} \max F &= \sum_{j=1}^n w_j x_j, \\ \sum_{j=1}^n m_j x_j &\leq M, \\ x_j &\geq 0, \quad x_j \text{ — цілі, } (j = \overline{1, n}). \end{aligned}$$

Приклад 5.4. Фермеру для обробки земельної ділянки необхідно придбати 107 кг добрив. Він може купити добрива в упаковках по 35 кг вартістю 14 ум. од. чи по 24 кг вартістю 12 ум. од. Метою фермера є закупка не менше ніж 107 кг добрив, витрачаючи на це найменшу суму коштів. Причому потрібно або купувати цілу упаковку, або не купувати її зовсім, частину упаковки придбати неможливо.

Розв'язування. Позначимо кількість упаковок вагою 35 і 24 кг відповідно змінними x_1 і x_2 . Маємо модель:

$$\begin{aligned} \min F &= 14x_1 + 12x_2, \\ 35x_1 + 24x_2 &\geq 107, \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0, \quad x_1, x_2 \text{ — цілі.} \end{aligned}$$

У результаті розв'язування задачі одним із наведених методів матимемо оптимальний план $X^*(x_1 = 1, x_2 = 3)$, $F_{\min} = 50$. Отже, за оптимальним планом найменшу вартість 50 ум. од. дістанемо у разі закупівлі 1 упаковки вагою 35 кг і 3 — вагою 24 кг.

Задача оптимального розкрою матеріалів. На підприємстві проводиться розкрій m різних партій матеріалів у кількості $b_i (i = \overline{1, m})$ одиниць однакового розміру в кожній партії. З матеріалів усіх партій потрібно виготовити максимальну кількість комплектів Z , у кожен з яких входить p різних видів окремих частин у кількості $k_r (r = \overline{1, p})$ одиниць, якщо відомо, що кожен одиницю матеріалу можна розкроїти на окремі частини n різними способами, причому після розкрою одиниці i -ї партії j -м способом матимемо a_{ijr} деталей r -го виду.

Математична модель задачі. Позначимо x_{ij} — кількість одиниць матеріалу i -ї партії, що будуть розкроєні j -м способом. Тоді з i -ї партії при j -му способі розкрою маємо $a_{ijr} x_{ij}$ деталей r -го виду. З усієї ж i -ї партії у разі застосування до неї всіх n способів розкрою одержимо деталей r -го виду $\sum_{j=1}^n a_{ijr} x_{ij}$, а з усіх m партій їх буде — $Z_r = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ijr} x_{ij}$. До кожного комплекту має входити k_r ($r = \overline{1, p}$)

деталей, тому Z_r/k_r ($r = \overline{1, p}$) визначає кількість комплектів, які можна скласти з деталей r -го виду. Кількість повних комплектів по всіх видах деталей визначається найменшим з цих відношень.

До повного комплекту має виконуватися рівність відношень:

$$Z_1/k_1 = Z_2/k_2 = \dots = Z_r/k_r = \dots = Z_p/k_p,$$

звідки $p - 1$ відношень можливо виразити через будь-яке з них, наприклад, через перше:

$$Z_r/k_r = Z_1/k_1 \quad (r = \overline{2, p}) \quad \text{або} \quad Z_r = k_r Z_1/k_1 \quad (r = \overline{2, p}).$$

Замінімо Z_r і Z_1 їх значеннями і матимемо $p - 1$ обмежень щодо комплектів:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ijr} x_{ij} &= \frac{k_r}{k_1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij1} x_{ij}, \\ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(a_{ijr} - \frac{k_r}{k_1} a_{ij1} \right) x_{ij} &= 0 \quad (r = \overline{2, p}). \end{aligned}$$

Ураховуючи наявну кількість одиниць матеріалу в партіях, запишемо m обмежень по ресурсах

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = b_i \quad (i = \overline{1, m}).$$

(Обмеження на використання ресурсів може бути рівнянням чи нерівністю залежно від того, чи повністю, чи не повністю вимагається використати наявний обсяг ресурсів.)

Усі x_{ij} повинні задовольняти умову невід'ємності: $x_{ij} \geq 0$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$) та цілочисловості.

Таким чином, необхідно знайти найбільше значення функції

$$\max Z = \min_{1 \leq r \leq p} \frac{1}{k_r} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ijr} x_{ij}$$

за обмежень

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(a_{ijr} - \frac{k_r}{k_1} a_{ij1} \right) x_{ij} = 0 \quad (r = \overline{2, p}), \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = b_i \quad (i = \overline{1, m}), \\ x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}), \\ x_{ij} - \text{цілі} \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}). \end{cases}$$

Розглянемо приклад задачі оптимального розкрою матеріалів.

Приклад 5.5. У цеху розрізують пруті завдовжки 6 м на заготовки 1,4; 2 і 2,5 м. Цех обслуговує двох замовників, для кожного з яких окремо треба знайти:

1) яким чином розрізати 200 прутів, щоб мати не менше як 40, 60 і 50 заготовок завдовжки 1,4; 2 і 2,5 м відповідно. Критерій оптимізації — мінімум відходів;

2) яким чином розрізати 200 прутів для формування з отриманих заготовок комплектів, що складаються з двох прутів довжиною 1,4 м, і по одному двох інших типів. Критерій оптимізації — максимальна кількість комплектів.

Розв'язування.

1. Розв'яжемо задачу за умовами першого замовника. Маємо партію матеріалів у кількості $b = 200$ шт. Відома нижня межа кількості заготовок кожного виду. Введемо такі позначення:

$r(r = \overline{1,2,3})$ — вид заготовки;

$j(j = \overline{1,n})$ — спосіб розрізання прута;

a_{jr} — вихід у разі розрізування прута j -м способом заготовок r -го виду;

c_j — відходи у разі розрізування прута j -м способом;

b — кількість наявних прутів;

D_r — верхня межа потреби в r -ій заготовці;

x_j — кількість прутів, які розрізані за j -м варіантом.

Запишемо математичну модель для розв'язування першого пункту задачі оптимального розкрою.

Критерієм оптимальності — мінімальна кількість відходів $\min Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$.

Кількість отриманих заготовок кожного виду повинна бути не меншою від указаних потреб $\sum_{j=1}^n a_{jr} x_j \geq D_r (r = \overline{1,p})$.

Сумарна довжина заготовок не може перевищувати довжини початкового матеріалу $\sum_{j=1}^n x_j \leq b$.

Змінні задачі x_j — невід'ємні і цілі числа. Отже, маємо математичну модель:

$$\begin{aligned} \min Z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j, \\ \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{jr} x_j \geq D_r (r = \overline{1,p}) \\ \sum_{j=1}^n x_j \leq b \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,n}), \\ x_j \text{ — цілі } (j = \overline{1,n}). \end{cases} \end{aligned}$$

Побудуємо числову економіко-математичну модель розрізування прутів, розглянувши можливі варіанти такого розрізування.

Таблиця 5.1

Довжина заготовки, м	Варіанти розрізування прутів						
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1,4	4	—	—	1	1	2	2
2	—	3	—	1	2	1	—
2,5	—	—	2	1	—	—	1
Довжина відходів, м	0,4	0	1	0,1	0,6	1,2	0,7

Бажано, щоб до множини ввійшли всі можливі варіанти, навіть такі, які на перший погляд здаються неефективними, наприклад, X_6 .

Запишемо числову економіко-математичну модель розрізування прутів:

$$\min Z = 0,4x_1 + 0x_2 + x_3 + 0,1x_4 + 0,6x_5 + 1,2x_6 + 0,7x_7$$

за умов:

а) кількість заготовок завдовжки 1,4 м:

$$4x_1 + x_4 + x_5 + 2x_6 + 2x_7 \geq 40;$$

б) кількість заготовок завдовжки 2 м:

$$3x_2 + x_4 + 2x_5 + x_6 \geq 60;$$

в) кількість заготовок завдовжки 2,5 м:

$$2x_2 + x_4 + x_7 \geq 50;$$

г) кількість наявних прутів:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \leq 200;$$

д) невід'ємність змінних:

$$x_j \geq 0 (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7);$$

е) цілочисловість змінних:

$$x_j \text{ — цілі числа } (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7).$$

Отже, матимемо математичну модель вигляду:

$$\begin{aligned} \min Z &= 0,4x_1 + 0x_2 + x_3 + 0,1x_4 + 0,6x_5 + 1,2x_6 + 0,7x_7, \\ &\begin{cases} 4x_1 + x_4 + x_5 + 2x_6 + 2x_7 \geq 40, \\ 3x_2 + x_4 + 2x_5 + x_6 \geq 60, \\ 2x_2 + x_4 + x_7 \geq 50, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 40, \\ x_j \geq 0 (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), \\ x_j \text{ — цілі числа } (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7). \end{cases} \end{aligned}$$

Розв'язуючи задачу одним із методів цілочислового програмування, дістанемо набір альтернативних оптимальних планів (загальною кількістю 146). Наприклад, наступний план забезпечує виготовлення всіх видів заготовок у мінімально можливій кількості за найменшої сумарної величини відходів, причому наявний матеріал використовується лише у кількості 54 прутів: $X_1^* = (x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 0, x_4 = 50, x_5 = x_6 = x_7 = 0)$, $Z_{\min} = 5$. Тобто 4 пруту треба розрізати 2-м способом способом (по три заготовки довжиною 2 м) і 50 прутів 4-м способом (по одній заготовці кожного виду). Сумарна довжин залишків дорівнює 5 м.

Аналогічне значення цільової функції ($Z_{\min} = 5$) дає оптимальний план, за яким виготовляється більша кількість кінцевої продукції та витрачається увесь наявний матеріал:

$$X_2^* = (x_1 = 0, x_2 = 150, x_3 = 0, x_4 = 50, x_5 = x_6 = x_7 = 0).$$

Одержані оптимальні плани дають набір альтернативних варіантів для прийняття управлінських рішень у конкретних виробничих умовах.

Задача про призначення. Дана задача була розглянута в розділі 5 як задача, що зводиться до транспортної і може бути розв'язана одним з відомих методів пошуку оптимального плану транспортної задачі. Проте такий вид задач належить до задач цілочислового програмування, оскільки змінні задачі є бульовими і оптимальний план може бути знайденим також методами цілочислового програмування. Не повертаючись до загальної постановки задачі та побудови її математичної моделі (див. 5.10), наведемо ще один приклад задачі про призначення.

Приклад 5.9. Необхідно розподілити чотирьох робітників за чотирма видами устаткування так, щоб їх загальна продуктивність праці була максимальною. Дані стосовно продуктивності праці кожного робітника на устаткуванні кожному виду наведено в табл. 5.3.

Таблиця 5.3

Робітник	Продуктивність праці, грн/год, на устаткуванні			
	1	2	3	4
1	12	9	8	7
2	10	7	6	5
3	9	6	4	4
4	8	5	3	2

Розв'язування. Відмітимо, що дану задачу можна розглядати як транспортну, в якій робітники ототожнюються з постачальниками вантажів, а види устаткування — зі споживачами цих вантажів. Обсяги пропозиції та попиту в кожному випадку дорівнюють 1. Отже, змінні будуть бульовими:

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i\text{-й робітник виконує роботу на } j\text{-му устаткуванні;} \\ 0, & \text{у протилежному разі.} \end{cases}$$

Якщо відома продуктивність праці i -го робітника на j -му устаткуванні, то числова модель про призначення набирає вигляду

$$\begin{aligned} \max Z = & 12x_{11} + 9x_{12} + 8x_{13} + 7x_{14} + 10x_{21} + 7x_{22} + 6x_{23} + 5x_{24} + \\ & + 9x_{31} + 6x_{32} + 4x_{33} + 4x_{34} + 8x_{41} + 5x_{42} + 3x_{43} + 2x_{44} \end{aligned}$$

за умов

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 1, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 1, \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} &= 1, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 1, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 1, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 1, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 1, \\ x_{ij} &\geq 0 \quad (i, j = \overline{1, n}), \\ x_{ij} &\text{ — цілі числа } (i, j = \overline{1, n}). \end{aligned}$$