

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.08- 05.01/051.00.2/Б/ПП 2- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 17/1

ЗАТВЕРДЖЕНО

Науково-методичною радою
Державного університету
«Житомирська політехніка»

протокол від ____ 20__ р.
№ ____

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

до виконання

лабораторних робіт №3.1 та 3.2

«Аналіз чутливості рішення ЗЛП за звітами надбудови «Розв'язувач (Solver, Поиск решения)» Microsoft Excel»

з дисциплін

«ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ» та

«МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ ЕКОНОМІКИ»

для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «бакалавр»
спеціальностей 051 «Економіка», 071 «Облік і оподаткування»
та 292 «Міжнародні економічні відносини»
факультет бізнесу та сфери обслуговування
кафедра цифрової економіки та міжнародних економічних відносин

Рекомендовано на засіданні
кафедри цифрової економіки та
міжнародних економічних
відносин

____ 2021 р.,
протокол № ____

Розробник: к.е.н., доцент кафедри цифрової економіки та міжнародних
економічних відносин, ОВАНДЕР Наталія

Житомир
2021

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.08- 05.01/051.00.2/Б/ПП 2- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 17/2

1. ТЕОРЕТИЧНИЙ МАТЕРІАЛ

Аналіз моделей на чутливість – процес, який реалізується після отримання оптимального розв’язку. У рамках такого аналізу виявляється чутливість оптимального розв’язку до деяких змін даної моделі. Наприклад, у задачі про асортимент продукції може представляти інтерес питання про те, як впливає на оптимальний розв’язок збільшення або зменшення попиту на продукцію або запасів даної сировини. Можливо також буде потрібно провести аналіз впливу ринкових цін на оптимальний розв’язок.

За такого аналізу завжди розглядається комплекс лінійних оптимізаційних моделей. Це додає моделі визначену динамічність, яка дозволяє досліднику проаналізувати вплив можливих вимірювань на отриманий раніше оптимальний розв’язок. Динамічні характеристики моделей фактично відображають аналогічні характеристики, які відповідають реальним процесам. Відсутність методів, які дозволяють виявляти можливі зміни параметрів моделі на оптимальний розв’язок, може привести до того, що отриманий (статичний) розв’язок застаріває ще до своєї реалізації.

Чутливість оптимального рішення – ступінь зміни екстремального (оптимального) значення цільової функції в результаті незначних змін числових характеристик оптимізаційної моделі. Тут необхідно зауважити, що чутливість оптимального рішення задачі доцільно оцінювати лише при незначних змінах числових характеристик оптимізаційної моделі, при суттєвій їх зміні потрібно шукати нове оптимальне рішення.

Теоретичною основою аналізу чутливості рішення задач лінійного програмування (ЗЛП) є теорія двоїстості (див. тему 3). Розглянемо теоретичні положення аналізу чутливості рішення ЗЛП, що впливають з теорії двоїстості.

Післяоптимізаційний аналіз задачі лінійного програмування, особливо для прикладних досліджень, є більш важливою частиною лінійного програмування, ніж пошук самого оптимального розв’язку задачі.

ЗЛП є найпростішим класом задач математичного програмування. Спрощення економіко-математичної моделі відбувається через відсутність урахування впливу випадкових факторів на економічні процеси (об’єкти), що моделюються; заміну динамічних процесів на їх можливі статичні аналоги; використання лінійних функцій замість реальних нелінійних залежностей між економічними показниками тощо.

Очевидно, що за таких допущень більшість параметрів задачі лінійного програмування є наближеними значеннями. Тому важливим вбачається питання встановлення діапазону стійкості оптимальних планів прямої та двоїстої задач.

Тому, для сучасного фахівця з економіки отримання оптимального плану задачі не може слугувати кінцевою метою. Більш важливим є аналіз отриманого розв’язку. Оскільки зовнішні (та внутрішні) умови для будь-якої економічної системи досить мінливі, то спеціаліста, який ставить задачу, як правило,

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.08- 05.01/051.00.2/Б/ПП 2- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 17/3

цікавлять також і ті зміни оптимального плану, що пов'язані зі змінами у відповідних лінійних моделях різноманітних коефіцієнтів.

На практиці багато економічних параметрів (ціни на продукцію і сировину, запаси сировини, попит на ринку, заробітна платня і т. д.) з часом змінюють свої значення. Все це може призвести до зміни числових характеристик оптимізаційної моделі (коефіцієнтів в цільовій функції, коефіцієнтів в обмеженнях). Тому оптимальне рішення ЗЛП, отримане для конкретної економічної ситуації, після її зміни може виявитися непридатним або неоптимальним.

Іншими словами, можливості розрахунку зміни обсягів ресурсів, цін одиниці продукції, коефіцієнтів технологічної матриці визначають, в яких рамках вплив зміни умов функціонування економічної системи призводитиме до несуттєвих змін оптимального плану, а коли такий план стає навіть недопустимим. У зв'язку з цим виникає необхідність аналізу його чутливості до зміни числових характеристик оптимізаційної моделі.

Алгоритм аналізу задачі лінійного програмування на чутливість.

1. Формалізують математичну модель задачі лінійного програмування та двоїсту до неї.
2. Записують оптимальні плани прямої та двоїстої задач і роблять їх економічний аналіз.
3. Визначають статус ресурсів прямої задачі та інтервали стійкості двоїстих оцінок відносно запасів дефіцитних ресурсів.
4. Визначають план виробництва продукції та зміну загального доходу підприємства, якщо збільшувати запас кожного ресурсу.
5. Визначають рентабельність кожного виду продукції, що виготовляється на підприємстві.
6. Розраховують інтервали можливої зміни ціни одиниці кожного виду продукції.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.08- 05.01/051.00.2/Б/ПП 2- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 17/4

2. ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗКУ ТИПОВОГО ЗАВДАННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ЕЛЕКТРОННИХ ТАБЛИЦЬ EXCEL

2.1. Формалізуємо задачу. Умову задачі візьмемо з попередньої лабораторної роботи №1.1.

Умова. Підприємство випускає продукцію чотирьох типів *Табурети, Стільці, Столи та Шафи*, для виготовлення яких використовуються ресурси трьох видів: трудові, сировина і обладнання. Норми витрат кожного виду ресурсу на виготовлення одиниці кожного типу продукції наведені у табл. 1.

Таблиця 1

Норми витрат ресурсів на одиницю продукції

Ресурс	Норми витрат ресурсів на од. продукції по видах продукції				Запас ресурсу
	<i>Табурет</i>	<i>Стілець</i>	<i>Стіл</i>	<i>Шафа</i>	
Трудовий, людино-год	1	1	1	1	16
Сировина (Дошки), м ³	6	5	4	3	110
Обладнання, машино-годин	4	6	10	13	100

Прибуток, отриманий від реалізації одиниці продукції, дорівнює: для продукції *Табурет* – 60 грн, для *Стілець* – 70 грн., для *Стіл* – 120 грн, для *Шафа* – 130 грн. Визначити оптимальний план виробництва кожного типу продукції, що максимізує прибуток підприємства.

Формалізація задачі – детально цей процес наведений в лабораторній роботі №1.1.

Введемо позначення для змінних: x_1 – кількість табуретів; x_2 – кількість стільців; x_3 – кількість столів; x_4 – кількість шаф.

Цільовою функцією в нашому випадку є прибуток, отриманий від продажу всіх видів продукції і складається з суми прибутків, отриманих від різних видів продукції.

Математична (формалізована) модель задачі має вигляд:

$$Z = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4, \rightarrow \max \quad (1)$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 16, \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 110, \\ 4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 \leq 100, \end{cases} \quad (2)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \quad (3)$$

2.2. Будуємо до неї двоїсту (більш детальний алгоритм наведений в конспекті лекції Тема 3. Теорія двоїстості та кількісний аналіз оптимізаційних розрахунків).

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.08- 05.01/051.00.2/Б/ПП 2- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 17/5

Правила побудови двоїстої задачі до ЗЛП (рис. 1)

1) кожному обмеженню прямої задачі відповідає змінна двоїстої задачі. Кількість невідомих двоїстої задачі дорівнює кількості обмежень прямої задачі – в нашому випадку обмежень в прямій задачі 3, відповідно в двоїстій задачі 3 змінних y_1, y_2, y_3 ;

2) кожній змінній прямої задачі відповідає обмеження двоїстої задачі, причому кількість обмежень дорівнює кількості невідомих прямої задачі;

3) якщо цільова функція прямої задачі задається на пошук найбільшого значення, то цільова функція двоїстої задачі – на визначення найменшого значення, і навпаки;

4) коефіцієнтами при змінних у цільовій функції двоїстої задачі є вільні члени системи обмежень прямої задачі;

5) правими частинами системи обмежень двоїстої задачі є коефіцієнти при змінних у цільовій функції прямої задачі;

6) матриця, що складається з коефіцієнтів при змінних у системі обмежень прямої задачі, і матриця коефіцієнтів у системі обмежень двоїстої задачі утворюються одна з одної транспонуванням, тобто заміною рядків стовпцями, а стовпців – рядками.

Схематично процедура побудови двоїстої задачі наведена на рис. 1.

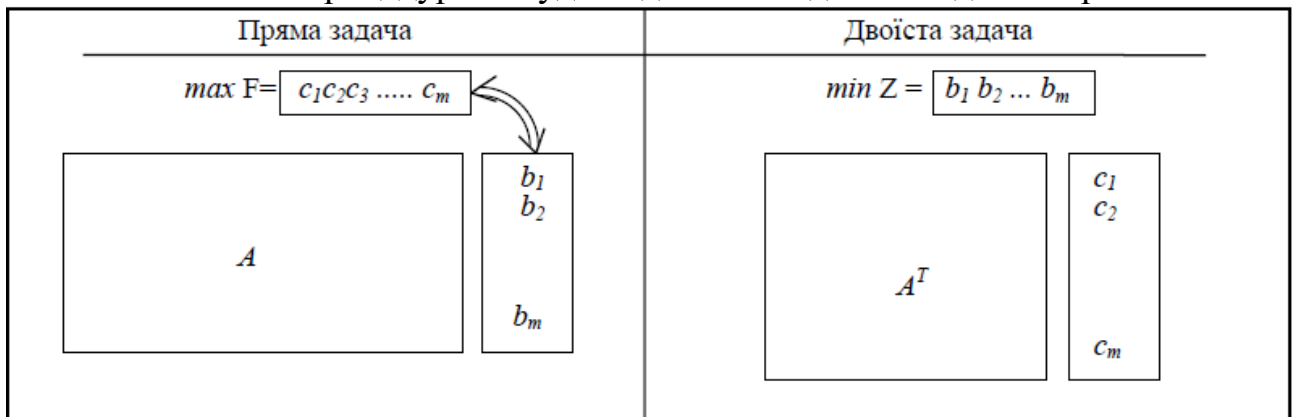


Рис. 1. Побудова двоїстої ЗЛП

В результаті отримаємо двоїсту задачу до нашої (1), (2) та (3) прямої задачі:
Цільова функція:

$$Z^* = 16y_1 + 110y_2 + 100y_3, \rightarrow \min, \quad (4)$$

за умов:

$$\begin{cases} 1y_1 + 6y_2 + 4y_3 \geq 60, \\ 1y_1 + 5y_2 + 6y_3 \geq 70, \\ 1y_1 + 4y_2 + 10y_3 \geq 120 \\ 1y_1 + 3y_2 + 13y_3 \geq 130, \\ y_i \geq 0, i = \overline{1, m}. \end{cases} \quad (5) \text{ та } (6)$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015				Ф-19.08- 05.01/051.00.2/Б/ПП 2- 2020			
	Екземпляр № 1				Арк 17/6			

2.3. Знайти оптимальні плани прямої та двоїстої задач та зробити їх економічний аналіз.

Оптимальний план прямої задачі ми знайшли в лабораторній роботі №1.1. Тому, відкриваємо вже готовий файл Microsoft Excel, в якому виконували лабораторну роботу №1.1. Робимо копію аркушу, на якому виконували розв'язання та знаходимо на ньому розв'язок двоїстої задачі. Розв'язуємо двоїсту задачу аналогічно тому, як знаходили розв'язок прямої. Приклад наведено на рис. 2.

1	A	B	C	D	E	F	G	I	J	K	L	M	N	O
2	Пряма задача								Двоїста					
3	Задача оптимального використання ресурсів								Двоїста задача до Задачі оптимального використання ресурсів					
4	Змінні	X1	X2	X3	X4				Змінні	Y1	Y2	Y3		
5	Продукція	Табурет	Стілець	Стіл	Шафа				Ресурси	Трудовий	Сировина	Обладнання		
6	Розв'язання	10	0	6	0	Значення ЦФ			Розв'язання				Значення ЦФ	
7	Коеф. цільової функції	60	70	120	130	1320	СУММПРОИЗВ		Коеф. ЦФ	16	110	100	0	
8	Обмеження								Обмеження					
9	Ресурси					Ліва частина	Права частина		Продукція				Ліва частина	Права частина
10	Трудовий	1	1	1	1	16	16		Табурет	1	6	4	0	60
11	Сировина	6	5	4	3	84	110		Стілець	1	5	6	0	70
12	Обладнання	4	6	10	13	100	100		Стіл	1	4	10	0	120
13									Шафа	1	3	13	0	130
14									Цільова функція:					
15									$Z^* = 16y_1 + 110y_2 + 100y_3 \rightarrow \min$					
16									за умов:					
17									$1y_1 + 6y_2 + 4y_3 \geq 60$					
18									$1y_1 + 5y_2 + 6y_3 \geq 70$					
19									$1y_1 + 4y_2 + 10y_3 \geq 120$					
20									$1y_1 + 3y_2 + 13y_3 \geq 130$					
21									$y_i \geq 0, i = 1, m$					
22														
23														
24														

Рис. 2. Приклад розв'язання двоїстої задачі

Таким чином, на новому аркуші отримали розв'язок прямої та двоїстої задачі (рис. 3).

1	A	B	C	D	E	F	G	I	J	K	L	M	N	O
2	Пряма задача								Двоїста					
3	Задача оптимального використання ресурсів								Двоїста задача до Задачі оптимального використання ресурсів					
4	Змінні	X1	X2	X3	X4				Змінні	Y1	Y2	Y3		
5	Продукція	Табурет	Стілець	Стіл	Шафа				Ресурси	Трудовий	Сировина	Обладнання		
6	Розв'язання	10	0	6	0	Значення ЦФ			Розв'язання	20	0	10	Значення ЦФ	
7	Коеф. цільової функції	60	70	120	130	1320	СУММПРОИЗВ		Коеф. ЦФ	16	110	100	1320	
8	Обмеження								Обмеження					
9	Ресурси					Ліва частина	Права частина		Продукція				Ліва частина	Права частина
10	Трудовий	1	1	1	1	16	16		Табурет	1	6	4	60	60
11	Сировина	6	5	4	3	84	110		Стілець	1	5	6	80	70
12	Обладнання	4	6	10	13	100	100		Стіл	1	4	10	120	120
13									Шафа	1	3	13	150	130

Рис. 3. Розв'язок прямої та двоїстої задачі

Висновки 1:

1) Значення цільових функцій прямої та двоїстої задач дорівнюють:

$$Z_{\max} = Z_{\min} = 1320$$

2) Значення двоїстих змінних $y_1=20$, $y_2=0$, $y_3=10$ відображають оцінки ресурсів, які використовуються для виробництва продукції.

y_1 – це оцінка ресурсу «Трудовий». Отже значення $y_1=20$ показує, що збільшення трудового ресурсу на 1 людино-год призведе, до того, що з'явиться можливість скласти новий оптимальний план виробництва продукції, за якого прибуток від виробництва продукції зросте на 20 грн і буде дорівнювати 1320+1320 грн.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.08- 05.01/051.00.2/Б/ПП 2- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 17/ 7

Значення $u_3=10$ вказує, що збільшення ресурсу «Обладнання» дозволить знайти новий оптимальний план виробництва продукції, за якого загальний прибуток від виробництва зросте на 10 грн і складе $1320+10=1330$ грн.

Значення $u_2=0$ або нульова оцінка для ресурсу «Сировина», означає, що оскільки сировина не була використана повністю для оптимального виробництва продукції, то збільшення цього запасу не вплине на оптимальний план випуску продукції та прибуток.

3) Оцінки ресурсів «Трудовий» та «Обладнання» відмінні від 0, тому, відповідно другої теореми двоїстості відповідні ресурси використовуються повністю для виготовлення оптимального плану виробництва продукції, тобто є дефіцитними.

Двоїста оцінка ресурсу «Сировина» дорівнює 0. Отже, цей вид ресурсу використовується не повністю при оптимальному плані виробництва продукції.

Чим більшою є значення оцінки ресурсу, тим гострішою є дефіцитність цього ресурсу. Отже ресурс «Трудовий» є більш дефіцитним за «Обладнання»:

$$(u_1 = 20) > (u_3 = 10).$$

4) При підстановці двоїстих оцінок в систему обмежень двоїстої задачі отримаємо:

$$\begin{cases} 1y_1 + 6y_2 + 4y_3 \geq 60, & 20+0+40 = 60 \\ 1y_1 + 5y_2 + 6y_3 \geq 70, & 20+0+60 > 70 \\ 1y_1 + 4y_2 + 10y_3 \geq 120 & 20+0+100 = 120 \\ 1y_1 + 3y_2 + 13y_3 \geq 130, & 20+0+130 > 130 \\ y_i \geq 0, i = \overline{1, m}. \end{cases}$$

Перше та третє обмеження двоїстої задачі виконуються як рівності. Це означає, що оцінки ресурсів, використовуваних для виробництва одиниці відповідної продукції табурет та стіл в точності дорівнюють їх цінам. Тому випускати ці два види продукції є економічно доцільним, що і ми можемо побачити в розв'язку прямої задачі ($x_1=10$, $x_3=6$).

Друге та четверте обмеження виконуються як строга нерівність. Це означає, що оцінка ресурсів, використовуваних на виробництво другої та четвертої продукції (стілець та шафа) вищі за ціни цієї продукції, тому випускати стільці та шафи не вигідно.

2.4. Побудуємо звіти до прямої ЗЛП за допомогою інструмента Microsoft Excel Розв'язувач (Solver, Поиск решения)

2.4.1. Повернемося до аркушу на якому, виконували розв'язання прямої ЗЛП в лабораторній роботі №1.1. Внесемо зміни в файл як це наведено на рис. 2 – додали рядочок «Продукція» (виокремлено жовтим).

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.08- 05.01/051.00.2/Б/ПП 2- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 17/8

В комірках, де знаходиться розв'язок (оптимальний план) замість цифр ставимо «0». Тобто «обнуляємо» змінні.

На екрані отримаємо дані у вигляді рис. 4, або у формульному режимі – рис.5.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Задача оптимального використання ресурсів						
2							
3	Змінні	X1	X2	X3	X4		
4	Продукція	Табурет	Стілець	Стіл	Шафа		
5	Розв'язання	0	0	0	0	Значення ЦФ	
6	Коеф. цільової функції	60	70	120	130	0	
7	Обмеження						
8	Вид					Ліва частина	Права частина
9	Трудовий	1	1	1	1	0	16
10	Сировина	6	5	4	3	0	110
11	Обладнання	4	6	10	13	0	100
12							

Рис. 4

	A	B	C	D	E	F	G
1	Задача оптимального						
2							
3	Змінні	X1	X2	X3	X4		
4	Продукція	Табурет	Стілець	Стіл	Шафа		
5	Розв'язання	0	0	0	0	Значення ЦФ	
6	Коеф. цільової функції	60	70	120	130	=СУММПРОИЗВ(B5:E5;B6:E6)	
7	Обмеження						
8	Вид					Ліва частина	Права частина
9	Трудовий	1	1	1	1	=СУММПРОИЗВ(B5:E5;B9:E9)	16
10	Сировина	6	5	4	3	=СУММПРОИЗВ(B5:E5;B10:E1)	110
11	Обладнання	4	6	10	13	=СУММПРОИЗВ(B5:E5;B11:E1)	100
12							

Рис. 5

2.4.2. Розв'язуємо задачу за допомогою інструменту **Розв'язувач (Solver, Поиск решения)**.

Оскільки модель вже існує, на екрані з'явиться робоче вікно надбудови «Поиск решения», яке матиме такий вигляд, як на рис. 6. Далі натискаємо кнопку «Найти решение».

На екрані вікно «Поиск решения» зміниться вікном «Результаты поиска решения», так, як це показано на рис. 7. Надбудова «Поиск решения» знайшла оптимальний план, який є розв'язком задачі. Про те, що він є оптимальним допустимим розв'язком свідчить надпис у вікні «Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены».

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.08- 05.01/051.00.2/Б/ПП 2- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 17/9

Рис. 6. Робоче вікно надбудови «Поиск решения»

А тепер УВАГА!!! Для того, щоб отримати звіти, що генеруються *Microsoft Excel* клацніть на назви звітів «Результаты», «Устойчивость» и «Пределы» у вікні «Отчеты». Ваше вікно має виглядати як на рис. 5. І тільки після цього натискаємо кнопку ОК.

Тоді знизу таблиці автоматично будуть сформовані нові аркуші з назвами «Отчет о результатах 1», «Отчет об устойчивости 1», «Отчет о пределах 1», як це показано на рис. 8.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.08- 05.01/051.00.2/Б/ПП 2- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 17/ 10

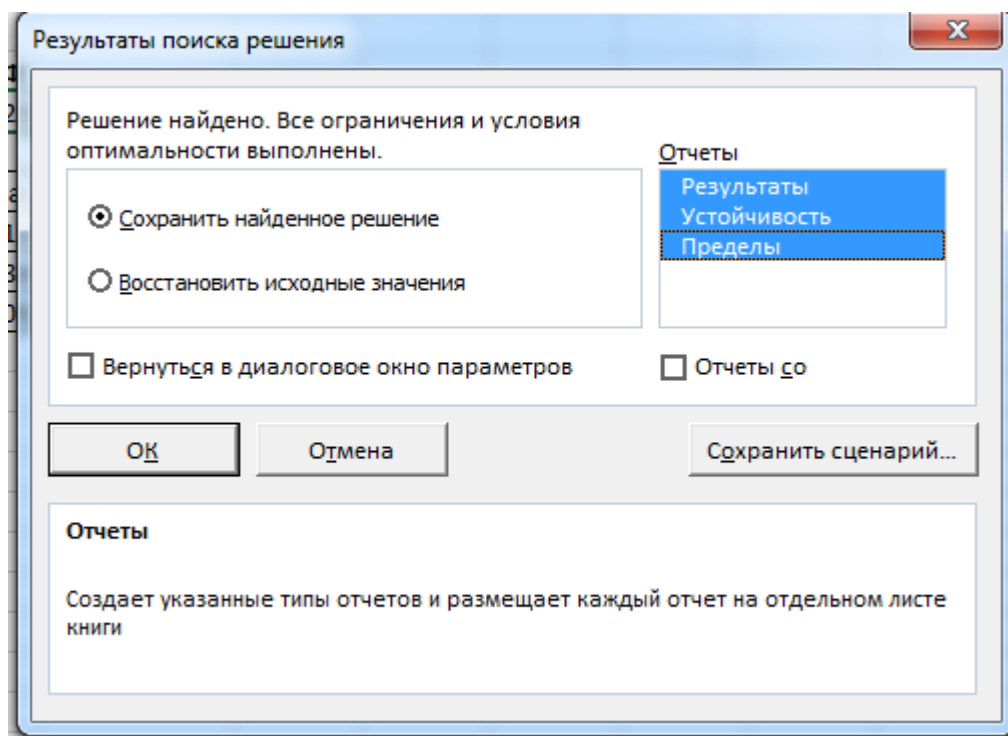


Рис. 7. Генерування звітів «Результаты», «Устойчивость» и «Пределы» у вікні «Отчеты»

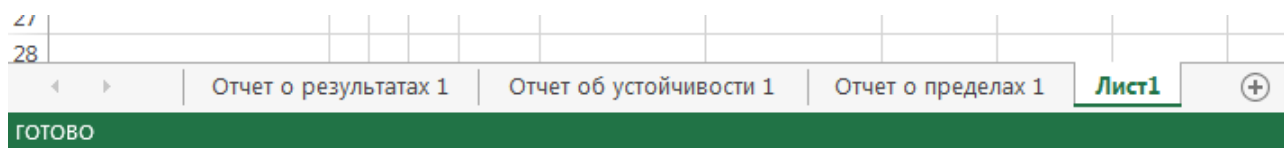


Рис. 8

2.4.3. Проаналізуємо дану задачу на чутливість за допомогою звітів, що генеруються Microsoft Excel.

2.4.3.1. Звіт про результати - аркуш «Отчет о результатах 1» (рис. 9).

Приклад звіту про результати наведений на рис. 9. Початок звіту містить його назву, дату та час створення, метод рішення, тривалість та кількість ітерацій, інші характеристики рішення задачі. Перша таблиця містить інформацію про вихідне та остаточне значення цільової функції. Наступна таблиця показує вихідні та остаточне значення змінних.

Звіт за результатами складається з трьох блоків, в яких відповідно розміщено інформацію про три компоненти задачі оптимізації: цільову функцію (Ячейка целевой функции), розв'язок або оптимальний план (Ячейки переменных), і обмеження (Ограничения).

Більш детальна характеристика Звіту про результати наведена в Додатку А.1.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.08- 05.01/051.00.2/Б/ПП 2- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 17/ 11

На рис. 9 цифрами підписано наступне:

1 – початкове значення цільової функції при початковому опорному плані (Исходное значение (3));

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Microsoft Excel 15.0 Отчет о результатах							
2	Лист: [ЛР 1 2020.xlsx]Лист1							
3	Отчет создан: 24.04.2020 17:55:21							
4	Результат: Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.							
5	Модуль поиска решения							
6	Модуль: Поиск решения лин. задач симплекс-методом							
7	Время решения: 0,015 секунд.							
8	Число итераций: 3 Число подзадач: 0							
9	Параметры поиска решения							
10	Максимальное время Без пределов, Число итераций Без пределов, Precision 0,000001							
11	Максимальное число подзадач Без пределов, Максимальное число целочисленных решений Без пределов, Целочисленное о							
12								
13								
14	Ячейка целевой функции (Максимум)							
15	Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение				
16	\$F\$6	Коеф. цільової функції	Значення ЦФ	0	1320			
17								
18								
19	Ячейки переменных							
20	Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Целочисленное			
21	\$B\$5	Розв'язання Табурет	0	10	Продолжить			
22	\$C\$5	Розв'язання Стілець	0	0	Продолжить			
23	\$D\$5	Розв'язання Стіл	0	6	Продолжить			
24	\$E\$5	Розв'язання Шафа	0	0	Продолжить			
25								
26								
27	Ограничения							
28	Ячейка	Имя	Значение ячейки	Формула	Состояние	Допуск		
29	\$F\$10	Сировина Ліва частина	84	\$F\$10<=\$G\$10	Без привязки	26		
30	\$F\$11	Обладнання Ліва частина	100	\$F\$11<=\$G\$11	Привязка	0		
31	\$F\$9	Трудовий Ліва частина	16	\$F\$9<=\$G\$9	Привязка	0		
32								

Рис. 9. Звіт про результати

2 – максимальне або мінімальне значення (залежно від завдання) цільової функції. У нашому випадку — 1320 грн.;

3 – початковий опорний план;

4 – оптимальний план (розв'язок) задачі. В нашому випадку, щоб одержати максимальний прибуток у розмірі 1320 грн., потрібно виготовляти 10 табуретів та 6 столів;

5 – показує кількість використаних ресурсів на виробництво при оптимальному плані, тобто пораховано ліву частину обмежень по ресурсах;

6 – формули обмежень, які введені в модель задачі;

7 – показує вплив обмежень на кінцевий результат. Якщо ресурс має статус «Привязка», тоді дане обмеження впливає на отриманий оптимальний план, якщо - «Без привязки» — не впливає. В нашому прикладі ресурс «Сировина» має статус «Без привязки» — це означає, що цей ресурс не обмежує можливості

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.08- 05.01/051.00.2/Б/ПП 2- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 17/ 12

виробництва, що не можна сказати про ресурси «Трудовий» та «Обладнання», які використані повністю на виготовлення оптимального плану випуску продукції (10 табуретів та 6 столів);

8 – різниця між наявною кількістю ресурсів і тією, що використана при отриманні оптимального плану, тобто фактично це ті ресурси, що залишились після виготовлення оптимального плану (10 табуретів та 6 стільців). Для нашого прикладу бачимо, що ресурс «Сировина» є ще в наявності на складі (26 м^3).

2.4.3.2. Звіт про стійкість - аркуш «Отчет об устойчивости 1» (рис. 10).

Більш детальна характеристика Звіту про стійкість наведена в Додатку А.2.

A	B	C	D	E	F	G	H
1	Microsoft Excel 15.0 Отчет об устойчивости						
2	Лист: [ЛР 1 2020.xlsx]Лист1						
3	Отчет создан: 24.04.2020 17:55:21						
4							
5							
6	Ячейки переменных		1	2	3	4	5
7			Окончательное	Приведенн.	Целевая функция	Допустимое	Допустимое
8	Ячейка	Имя	Значение	Стоимость	Коэффициент	Увеличение	Уменьшение
9	\$B\$5	Розв'язання Табурет	10	0	60	40	12
10	\$C\$5	Розв'язання Стілець	0	-10	70	10	1E+30
11	\$D\$5	Розв'язання Стіл	6	0	120	30	13,33333333
12	\$E\$5	Розв'язання Шафа	0	-20	130	20	1E+30
13							
14	Ограничения		6	7	8	9	10
15			Окончательное	Тень	Ограничение	Допустимое	Допустимое
16	Ячейка	Имя	Значение	Цена	Правая сторона	Увеличение	Уменьшение
17	\$F\$10	Сировина Ліва частина	84	0	110	1E+30	26
18	\$F\$11	Обладнання Ліва частина	100	10	100	60	36
19	\$F\$9	Трудовий Ліва частина	16	20	16	3,545454545	6
20							

Рис. 10. Звіт про стійкість

Звіт про стійкість (більше точним був би переклад з оригіналу sensitivity — чутливість) визначає чутливість структури отриманого плану до змін початкових даних і, відповідно, подальші дії менеджера з метою покращення результатів. Такий звіт не створюється для моделей, в яких значення змінних обмежено множиною цілих чисел (задачі цілочислового лінійного програмування).

На рис. 10 цифрами підписано наступне:

1 – оптимальний план (розв'язок) задачі. У даному випадку, щоб одержати максимальний прибуток у розмірі 1320 грн, необхідно виготовляти 10 табуретів та 6 столів;

2 – «Приведенн. Стоимость» або нормована вартість, яка стосується невідомих плану. Це невдалий переклад з оригіналу reduced cost, яку можна було

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.08- 05.01/051.00.2/Б/ПП 2- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 17/ 13

перевести, як «ціна, що зменшує (цільову функцію)». Цей показник вказує на те, як зміниться оптимальне значення цільової функції при випуску продукції, якої немає в оптимальному плані. В нашому прикладі *Приведенн. Стоимість* змінної X_2 (продукції *Стілець*) дорівнює «-10», то примусовий випуск 1 одиниці *Стільця* (якого немає в оптимальному плані) привів би до зменшення *Прибутку* на 10 грн. і становив би $1320-10=1310$ грн. Так само, нормована вартість змінної X_4 (продукції *Шафа*) дорівнює «-20», то якщо б ми примусово випустили 1 *Шафу*, то *Прибуток* зменшився б на 20 грн і становив би $1320-20=1300$ грн.

3 – коефіцієнти цільової функції;

4, 5 – границі змін значень коефіцієнтів цільової функції за умови, що оптимальна кількість продукції (план) не зміниться. Наприклад, якщо цільовий коефіцієнт (K_1) товару X_1 (*Табурет*) дорівнює 60 (ціна за 1 одиницю товару), то змінюючи його в рамках (*Допустимое Увеличение, Допустимое Уменьшение*)

$60-12 < K_1 < 60+40$, маємо $48 < K_1 < 100$,

то план не зміниться, але значення прибутку може зменшитись або збільшитись.

Аналогічно визначаються границі для решти видів продукції

Це можна перевірити, якщо запустити **Поиск решений**, після внесення у таблицю змін даного коефіцієнта.

6 – кількість використаних ресурсів на виготовлення оптимального плану (10 табуретів та 6 столів), тобто ліва частина обмежень;

7 – «Тень Цена» стосується обмежень, тобто, певне значення вказує на «цінність» обмеженого ресурсу в порівнянні з іншими ресурсами. Цей показник вказує на те, як зміниться оптимальне значення цільової функції (*Прибуток*) при зміні запасів ресурсів на 1 одиницю.

Наприклад, якщо збільшити запас ресурсу «Трудовий» на 1 одиницю (людино-годину), то прибуток збільшиться на 20 грн і буде становити $1320+20=1340$ грн.

8 – запаси ресурсів (права частина обмежень);

9, 10 – задають діапазон для 8, у якому діє тіньова ціна (7) (аналогічно (4) та (5) для цільової функції).

Наприклад, діапазон ресурсу «Трудовий» $16-6 < \text{Трудовий} < 16+3,55$, тобто $10 < \text{Трудовий} < 19,55$. Якщо ресурс «Трудовий» збільшити на 3 одиниці, то прибуток збільшиться на $3*20=60$ грн і буде становити $1320+60=1380$ грн. Якщо цей ресурс збільшити на 10 одиниць, то про прибуток нічого сказати не можна, оскільки ми вийшли за зазначені межі.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.08- 05.01/051.00.2/Б/ПП 2- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 17/ 14

2.4.3.3. Звіт по границях (межах) - аркуш «Отчет об пределах 1» (рис. 11).

Більш детальна характеристика Звіту по границях (межах) наведена в Додатку А.3.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Microsoft Excel 15.0	Отчет о пределах								
2	Лист: [ЛР 1 2020.xlsx]	Лист1								
3	Отчет создан: 24.04.2020 17:55:21									
4										
5										
6		Целевая функция								
7		Ячейка	Имя	Значение						
8		\$F\$6	Коеф. цільової функц	1320						
9										
10										
11		Переменная			Нижний	Целевая функция	Верхний	Целевая функция		
12		Ячейка	Имя	Значение	Предел	Результат	Предел	Результат		
13		\$B\$5	Розв'язання Табурет	10	0	720	10	1320		
14		\$C\$5	Розв'язання Стілець	0	0	1320	2,37E-15	1320		
15		\$D\$5	Розв'язання Стіл	6	0	600	6	1320		
16		\$E\$5	Розв'язання Шафа	0	0	1320	1,09E-15	1320		
17										

Рис.11. Звіт по границях

Звіт по границях складається із двох блоків, що стосуються значень цільової функції (Целевая функция) і плану (Переменная). На рис. 11 цифрами підписано наступне:

1 – значення цільової функції (Прибуток);

2 – оптимальний план задачі;

3 – найменше значення, що може прийняти невідоме (у даному випадку кількість всієї продукції *Нижний предел* = 0, оскільки в *Параметрах Поиск решений* зазначили невід'ємність значень);

4 – це значення, що буде знаходитись в цільовій клітинці (Прибуток), якщо невідоме дорівнюватиме *Нижний предел*, а решта значень змінних залишаться без змін. Наприклад для першої змінної *Табурет* в оптимальному плані $X_1=10$; замінюємо на значення в колонці *Нижний предел*, тобто 0, а решта значень беруть з оптимального плану, тобто $X_2=0$, $X_3=6$, $X_4=0$. За такого оптимального плану цільова функція дорівнюватиме: $60 \times 0 + 70 \times 0 + 120 \times 6 + 130 \times 0 = 720$. Це співпадає зі значенням в комірці G13.

5 – це найбільше значення, що можуть прийняти невідомі, щоб одержати максимальне значення цільової функції;

6 – це значення, що буде знаходитись в цільовій клітинці (Прибуток), якщо невідомі дорівнюватимуть *Верхний предел*, а решта значень змінних залишаться без змін (аналогічно 4).

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.08- 05.01/051.00.2/Б/ПП 2- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 17/ 15

Висновки 2:

А) Використовуючи надбудову «Поиск решения», ми отримали оптимальний план випуску продукції. Таким чином, оптимальним планом випуску продукції буде наступний: табуретів варто випускати в обсязі 10 шт., столів – 6 шт; а стільці та шафи не виготовляти взагалі. При цьому прибуток від реалізації випущеної продукції при такому плані буде становити 1320 грн.

Б) Таким чином виготовлення продукції табурет та стіл є рентабельними, а стільці і шафи – ні. При чому, примусовий випуск 1 одиниці продукції стілець приведе до зменшення прибутку на 10 грн і становив би $1320 - 10 = 1310$ грн. Примусовий випуск 1 одиниці товару шафа зменшить прибуток на 20 грн. і становив би $1320 - 20 = 1300$ грн.

В) За такого оптимального плану ресурси будуть використані в такій кількості: трудові 16 людино-год; сировина 84 м^3 ; обладнання 100 машино-год. В процесі виробництва продукції ресурси «Трудовий» та «Обладнання» були використані повністю, і тому вони є «дефіцитними». Ресурс «Сировина» використовується у процесі виробництва продукції не повністю, а тому, він є недефіцитним.

Г) Границі змін значень коефіцієнтів цільової функції за умови, що оптимальна кількість продукції (план) не зміниться покажуть межі зміни цін на продукцію.

$$60 - 12 < K_{\text{табурет}} < 60 + 40, \quad \text{або} \quad 48 < K_{\text{табурет}} < 100,$$

Тобто, ціна на продукцію табурет може коливатися в межах від 48 до 100 грн за шт., при цьому оптимальний план не зміниться. Аналогічні висновки по інших видах продукції:

$$70 - \infty < K_{\text{стілець}} < 70 + 10, \quad \text{або} \quad -\infty < K_{\text{стілець}} < 80,$$

$$120 - 13,33 < K_{\text{стіл}} < 120 + 30, \quad \text{або} \quad 106,67 < K_{\text{стіл}} < 150,$$

$$130 - \infty < K_{\text{шафа}} < 130 + 20, \quad \text{або} \quad -\infty < K_{\text{шафа}} < 150,$$

при цьому план не зміниться, але значення прибутку може зменшитись або збільшитись.

Д) Діапазон ресурсу «Трудовий» $10 < \text{Трудовий} < 19,55$. Якщо ресурс «Трудовий» збільшити на 3 одиниці, то прибуток збільшиться на $3 \cdot 20 = 60$ грн і буде становити $1320 + 60 = 1380$ грн.

Діапазон ресурсу «Сировина» $110 - 26 < \text{Сировина} < 110 + \infty$, або $84 < \text{Сировина} < \infty$. Збільшення одиниць ресурсу «Сировина» не змінить прибуток.

Діапазон ресурсу «Обладнання»: $100 - 36 < \text{Обладнання} < 100 + 60$, або $64 < \text{Обладнання} < 160$. Якщо ресурс «Обладнання» збільшити на 5 одиниць, то прибуток збільшиться на $5 \cdot 10 = 50$ грн і буде становити $1320 + 50 = 1370$ грн.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.08- 05.01/051.00.2/Б/ПП 2- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 17/ 16

ЗАВДАННЯ

1) Опрацювати лекцію ТЕМА 3. Теорія двоїстості та кількісний аналіз оптимізаційних розрахунків.

2) Побудувати двоїсту задачу до задачі, формалізованої та розв'язаної в Лабораторній роботі №2.1. Алгоритм побудови двоїстої наведено в конспекті лекцій та Лабораторні роботи №3.1 та 3.2. Методичні вказівки до виконання. Розв'язати двоїсту задачу за допомогою надбудови *MS Excel Розв'язувач (Solver, Поиск решения)*. Перевірити виконання теорем двоїстості для розв'язаного прокладу.

Додатково рекомендовано використати відео Двоїстість у лінійному програмуванні та Побудова двоїстої задачі до задачі планування виробництва.

3) Провести аналіз прямої задачі на чутливість. До розв'язаної в Лабораторній роботі №2.1 прямої задачі за допомогою надбудови *MS Excel Розв'язувач (Solver, Поиск решения)* отримати три звіти використовуючи Лабораторні роботи №3.1 та 3.2. Методичні вказівки до виконання.

Файлу надати ім'я: Лаб_роб_3.1_група_Прізвище_Ініціали. Наприклад: *Лаб_роб_3.1_ЕК-5_Прохорчук_ІВ.xlsx*. Завантажити Excel-файл з виконаними завданнями.

4) В Word файлі записати пряму задачу та двоїсту до неї, побудовану в п 2). Написати Висновки 1 та Висновки 2 за зразком, наведеним в Лабораторні роботи №3.1 та 3.2. Методичні вказівки до виконання. Файлу надати ім'я: Двоїста_група_Прізвище_Ініціали. Наприклад: *Двоїста_ЕК-5_Прохорчук_ІВ.docx*. 4).

А) визначити оптимальний план випуску продукції;

Б) визначити рентабельну та збиткову продукцію;

В) визначити обсяги та дефіцитність ресурсів;

Г) знайдіть межі зміни цін на рентабельну і нерентабельну продукцію, в котрих структура оптимального плану початкової задачі не змінюється;

Д) знайдіть межі зміни обсягів дефіцитних ресурсів, в котрих оцінка ресурсу залишається сталою (аналіз двоїстих оцінок на стійкість) та межі зміни обсягів недефіцитних ресурсів.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.08- 05.01/051.00.2/Б/ПП 2- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 17/ 17

Додаток А.1

Звіт про результати наведений на рис. 8 і складається з трьох блоків:

- *Перший блок «Ячейка целевой функции (Максимум)»* містить відомості про цільову функцію і характеризує вихідне (перед початком обчислень) та оптимальне значення цільової функції. Він містить наступні поля:
 - *Ячейка* – адреса цільової клітинки;
 - *Имя* – назва цільової клітинки (якщо вона їй присвоєна на етапі підготовки табличної моделі);
 - *Исходное значение* – вихідне (перед запуском команди «Поиск решения») значення цільової комірки (як правило, але не завжди, воно дорівнює 0);
 - *Окончательное значение* – оптимальне значення цільової комірки (оптимальне значення цільової функції).
- *Другий блок «Ячейки переменных»* має таку ж саму структуру, як і блок «Ячейка целевой функции (Минимум)» та характеризує вихідні (перед початком обчислень) значення невідомих задачі та їхні значення в оптимальному плані після пошуку розв'язку відповідної задачі. В стовпчику «Исходное значение» містяться значення невідомих до обчислення; у стовпчику «Окончательное значение» - після обчислення.
- *Третій блок «Ограничения»* надає інформацію щодо обмежень задачі, які накладаються на шукані змінні задачі. Блок містить наступні поля:
 - *Ячейка* – адреса клітинки, у якій обчислюється ліва частина деякого обмеження задачі, або адреса клітинки, виділеної в табличній формі для деякої шуканої невідомої задачі;
 - *Имя* – ім'я шуканої змінної задачі або назва лівої частини кожного обмеження, яка переноситься у звіт з табличної моделі;
 - *Значение ячейки* – фактичне значення лівої частини деякого обмеження або значення деякої шуканої змінної задачі після знаходження оптимального розв'язку задачі;
 - *Формула* – математичний запис обмеження;
 - *Состояние* – інформація стосовно того, чи відповідне обмеження після знаходження оптимального розв'язку виконується як чиста рівність (состояние привязка), або як чиста нерівність (состояние без привязки), у випадку, якщо деяке обмеження є обмеженням типу $\leq$ або $\geq$;
 - *Допуск* – різниця між правою та лівою частиною відповідного обмеження після знаходження оптимального розв'язку задачі.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.08- 05.01/051.00.2/Б/ПП 2- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 17/ 18

Додаток А.2

Звіт про стійкість представлений на рис. 9. Цей звіт містить інформацію стосовно чутливості оптимального розв'язку до зміни значення цільових коефіцієнтів і правих частин обмежень. Звіт складається з двох блоків: «*Ячейки переменных*» і «*Ограничения*».

➤ Перший блок «*Ячейки переменных*» містить інформацію стосовно чутливості оптимального розв'язку задачі до зміни значень коефіцієнтів цільової функції. Блок «*Ячейки переменных*» містить наступні поля:

- *Ячейка* – адреса клітинки табличної моделі (електронної таблиці), виділеної під змінну моделі і її позначення;
- *Имя* – ім'я змінної, якщо воно їй присвоєно;
- *Окончательное Значение* – значення змінних після пошуку оптимального розв'язку задачі;
- *Приведенн. Стоимость* – величина збільшення значення цільової функції при збільшенні значення змінної моделі на одну одиницю при незмінності значення усіх інших змінних;
- *Целевая функция Коэффициент* – коефіцієнт при змінній в цільовій функції;
- *Допустимое Увеличение* – величина, яка показує на скільки одиниць можна збільшити значення коефіцієнта при змінній у цільовій функції, залишивши незмінними усі інші параметри задачі, щоб оптимальний план залишився без змін;
- *Допустимое Уменьшение* – величина, яка показує на скільки одиниць можна зменшити значення коефіцієнта при змінній у цільовій функції, залишивши незмінними усі інші параметри задачі, щоб оптимальний план залишився без змін.

➤ Другий блок «*Ограничения*» містить інформацію стосовно чутливості оптимального розв'язку задачі до зміни значення правих частин обмежень задачі. Блок містить наступні поля:

- *Ячейка* – адреса клітинки, у якій обчислюється ліва частина деякого обмеження задачі, або адреса клітинки, виділеної в табличній формі для деякої шуканої невідомої задачі;
- *Имя* – назва лівої частини кожного обмеження, яка переноситься у звіт з табличної моделі;
- *Окончательное Значение* – значення правої частини обмеження;
- *Тень Цена* – двоїста оцінка, яка характеризує збільшення значення цільової функції при збільшенні значення правої частини обмеження на одну одиницю за умови, що усі інші параметри задачі залишаються без змін;

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-19.08- 05.01/051.00.2/Б/ПП 2- 2020
	Екземпляр № 1	Арк 17/ 19

- *Ограничение Правая сторона* – числове значення правої частини обмеження, яке фігурує у моделі;
 - *Допустимое Увеличение* – допустиме збільшення значення правої частини обмеження, при якому незмінним залишається значення тіньової ціни і структура оптимального плану (тобто набір змінних в оптимальному плані) за умови, що праві частини усіх інших обмежень і усі інші параметри задачі залишаються без змін;
 - *Допустимое Уменьшение* – допустиме зменшення значення правої частини обмеження, при якому незмінним залишається значення тіньової ціни і структура оптимального плану (тобто набір змінних в оптимальному плані) за умови, що праві частини усіх інших обмежень і усі інші параметри задачі залишаються без змін.
- перевезення.

Додаток А.3

Звіт про межі представлений на рис. 10.

- Перший блок містить наступні поля:
 - *Ячейка* – адреса клітинки табличної моделі (електронної таблиці), виділеної під цільову функцію;
 - *Имя* – ім'я комірки цільової функції, якщо воно їй було присвоєно;
 - *Значение* – значення цільової функції після пошуку оптимального розв'язку задачі.
- Другий блок містить наступні поля:
 - *Ячейка* – адреса клітинки табличної моделі (електронної таблиці), виділеної під змінну моделі і її позначення;
 - *Имя* – ім'я змінної, якщо воно їй присвоєно;
 - *Значение* – оптимальне значення змінної;
 - *Нижний предел* – найменше можливе значення змінної моделі, при якому структура оптимального плану залишається без змін, якщо усі інші змінні моделі мають оптимальні значення, тобто залишаються без змін;
 - *Целевой результат* – значення цільової функції при найменшому значенні змінної;
 - *Верхний предел* – найбільше можливе значення змінної моделі, при якому структура оптимального плану залишається без змін, якщо усі інші змінні моделі мають оптимальні значення, тобто залишаються без змін;
 - *Целевой результат* – значення цільової функції при найбільшому значенні змінної.