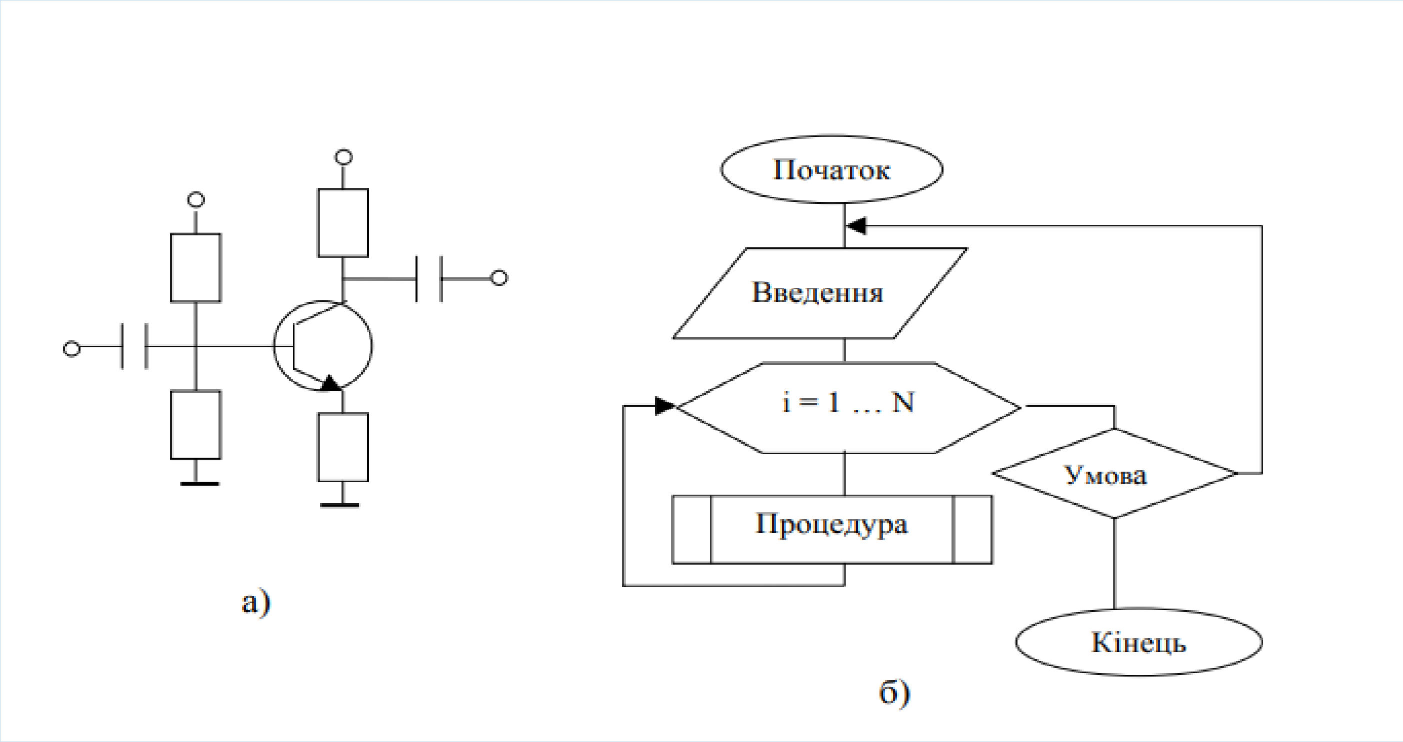
Лекція 9.Структурні моделі. Графи.

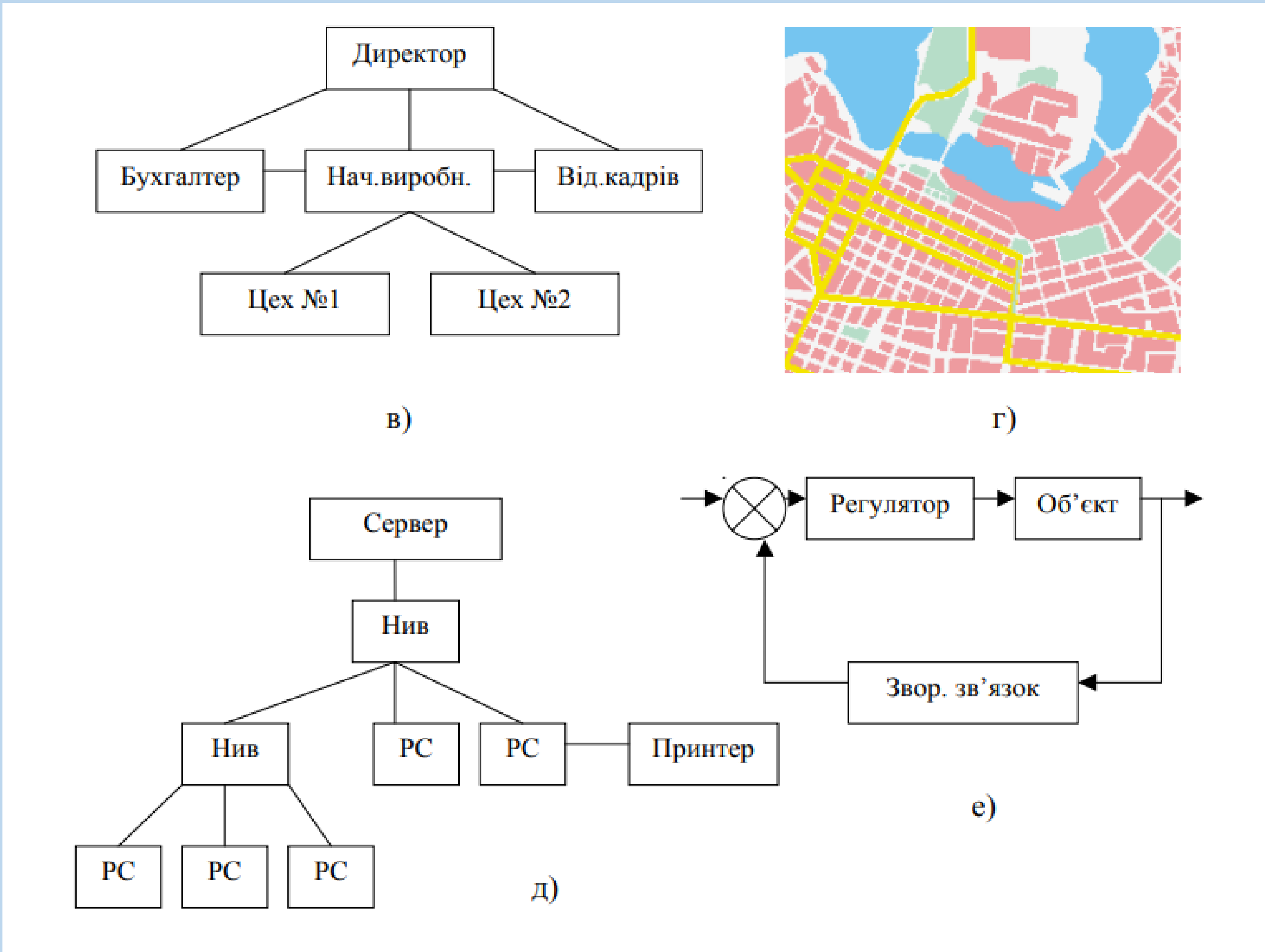
1. Графи і їх види.
2. Способи опису графів.
3. Операції над графами.

- Структурні моделі дуже поширені в практиці проектування та дослідження систем контролю і управління. Різноманітні функціональні, структурні і принципові схеми подаються графічними зображеннями, які показують склад та взаємозв'язки блоків системи, тобто є структурними моделями.



Приклади схем, що подають структурні моделі

Приклади схем, що подають структурні моделі



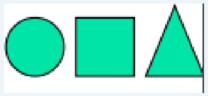
1. Графи і їх види.

Граф – це наочне графічне представлення взаємозв’язку елементів деякої множини об’єктів.

Поняття множини – це фундамент сучасної математики, а це означає, що практично будь-яка математична модель може бути подана у термінах графів.

Формально графова модель G(V,P) складається з двох множин - множини *V* об’єктів (вершин вузлів) і множини *P* зв’язків (ребер).

- **Вершина графа** – компоненти системи відображаються



- **Дуги** – направленні лінії (стрілки), що зв’язують компоненти між собою.

- **Ребра** – ненаправлені лінії, зо зв’язують компоненти між собою.

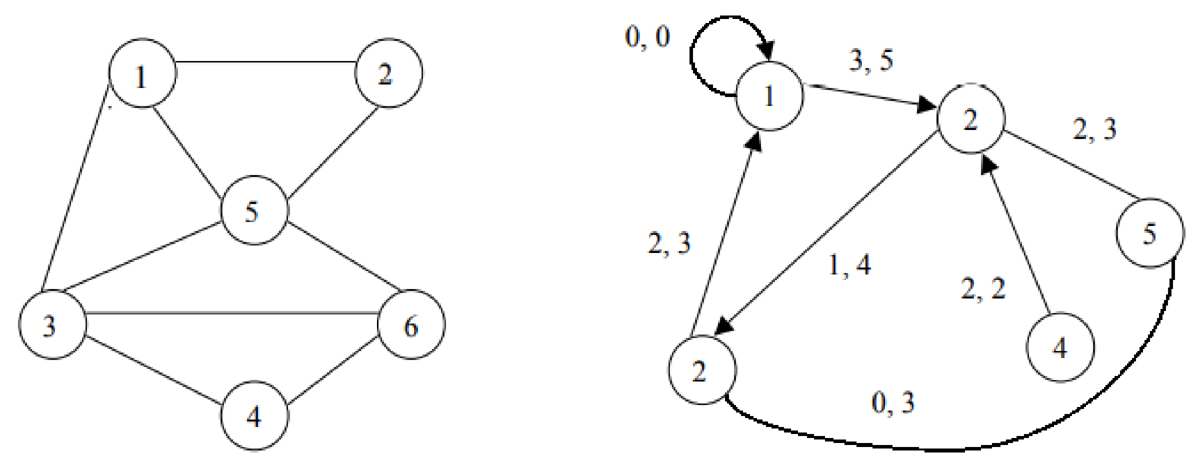
В залежності від природи елементів множини графів можуть розглядатися у різних просторах:

В **метричному просторі** – наприклад карта автомобільних доріг, план розташування комп’ютерів у мережі;

В **просторі станів** та перетворень (у часі) – наприклад, алгоритм (відображує зміну та зв’язок комп’ютера), мережний графік (відображує зміну та зв’язок станів технологічного процесу);

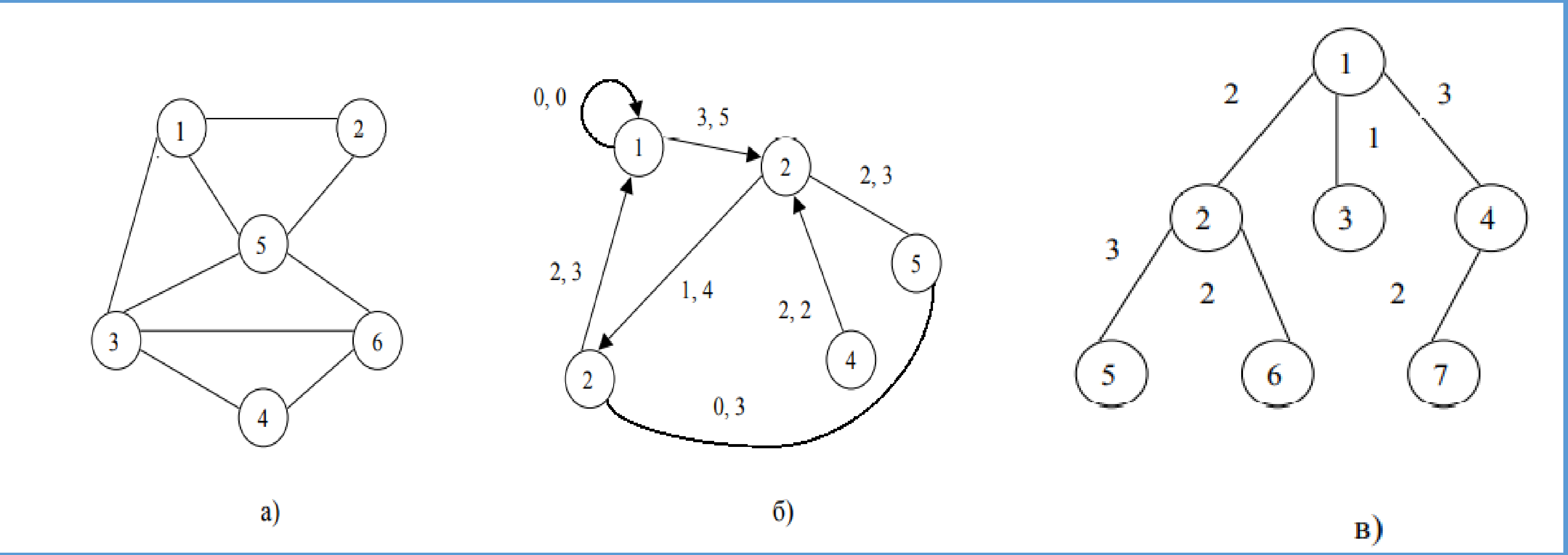
В **просторі відношень** – наприклад, комп’ютерна мережа, мережа логічного висновку.

В залежності від симетричності зв’язків між вершинами графи поділяють на ***напрямлені (а)*** і ***ненапрямлені (б)***

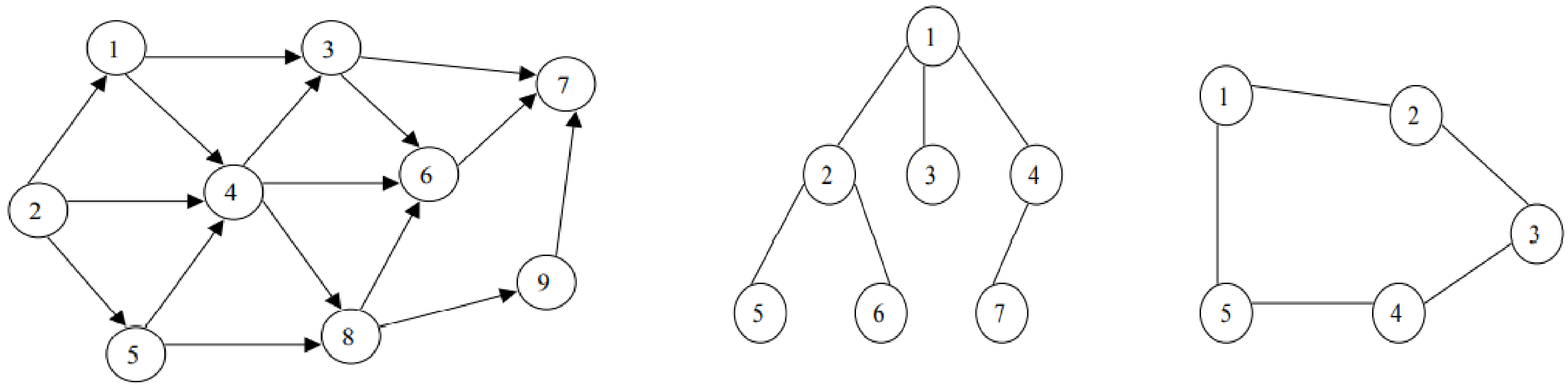


а) б)

В залежності від того, як характеризуються кожне ребро графа, графи поділяються на *зважені* (в) та незважені (а), *мережні* (б)



Спеціальні види графів: *дерева* (д), *циклічні графи* (е), *планарні суграфи* (г)



г) д) е)

2.Способи опису графів

Найпоширеніші:

- Матриці суміжності;
- Матриця інциденції;
- Списки пар веришин.

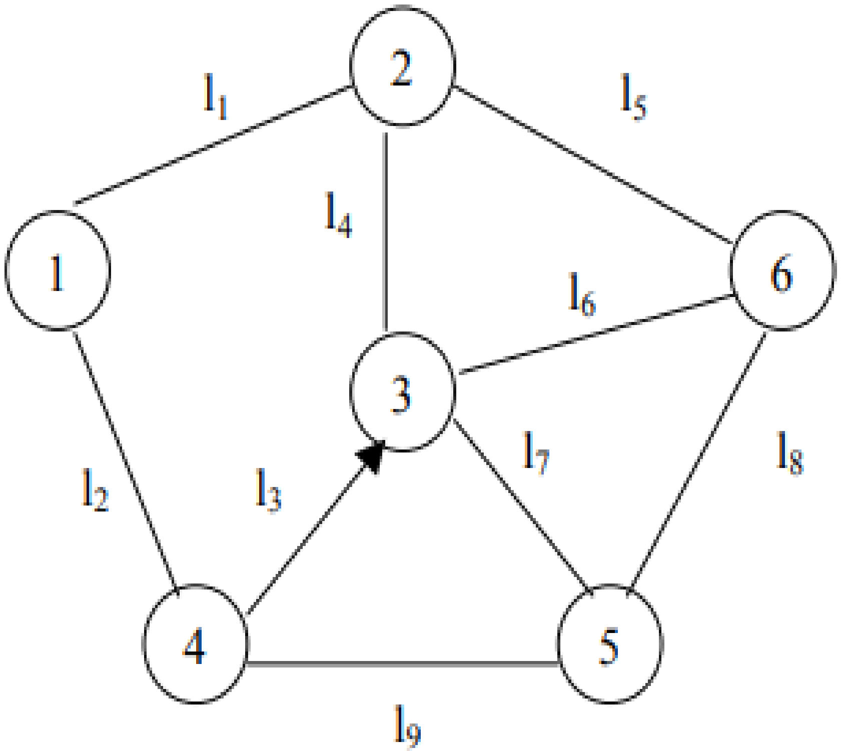


Рис. 2.3. Приклад графа

Матриця суміжності для графа, який має n вершин буде мати розмірність (nxn).

Елемент матриці A[i,j]=1, якщо є ребро або дуга з вершин і в верщину j, A[i,j]=0, якщо не має такого ребра.

Якщо A[i,j]= A[i,j]=1, то між вершинами і та j знаходиться ребро. Якщо A[i,j]≠ A[j,i], то між вершинами і та j є дуга.

- Матриці суміжності для графа 2.3:

$$
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
$$

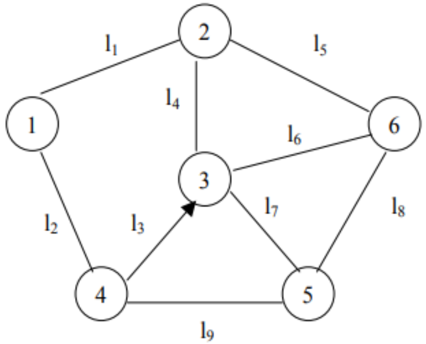


Рис. 2.3. Приклад графа

Матриці інденції для графа 2.3 показує зв’язок між вершинами і ребрами. Якщо граф не має n вершин і m ребер, то матриця інциденції I(nxm).

- Якщо ребро графа ненаправлене, відповідний елемент матриці дорівнює 1. Якщо ребро (дуга) виходить з вершини, відповідний елемент матрицы дорівнює 1.
- Якщо ребро (дуга) виходить в вершину, відповідний елемент матриці дорівнює -1.
- Якщо немає ребра, яке пов’язує дві вершини, відповідний елемент матриці дорівнює 0.

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7	l_8	l_9
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	1	1	0	0	0	0
3	0	0	-1	1	0	1	1	0	0
4	0	1	1	0	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0	0	1	1	1
6	0	0	0	0	1	1	0	1	0

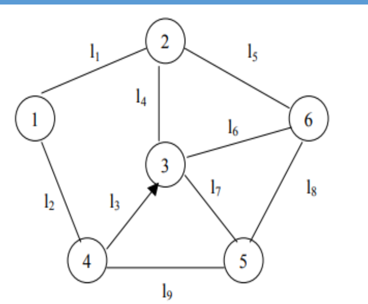


Рис. 2.3. Приклад графа

Список пар вершин – для кожного ребра записується пара вершин: 1- та, з якої ребро виходить, 2 – та, в яку ребро входить.

l_1 : 1-2; l_2 : 1-4; l_3 : 4-3; l_4 : 2-3; l_5 : 2-6; l_6 : 3-6; l_7 : 3-5; l_8 : 5-6; l_9 : 4-5

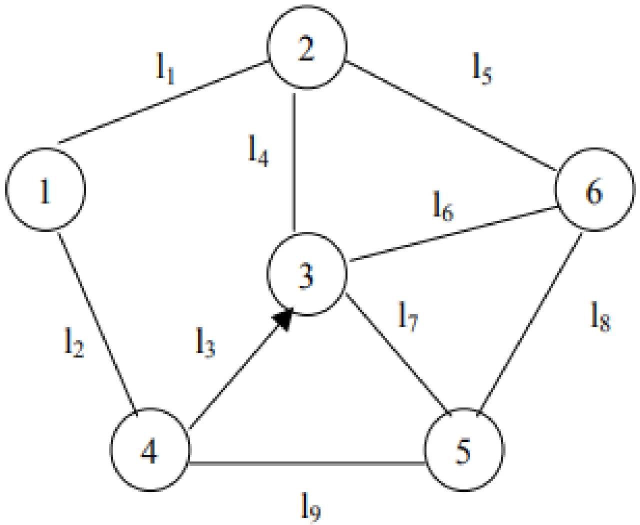


Рис. 2.3. Приклад графа

3. Операції над графами.

Зі структурними моделями, які зображуються графами, можуть виконуватися алгебраїчні перетворення. Спосіб виконання цих перетворень визначається тим, що граф за означенням є сукупністю множин вершин і ребер. Відповідно, до графів можуть застосовуватися всі операції над множинами.

1. *Доповнення графа.* Якщо дано граф $G_1(V_1, P_1)$ і повний граф $G(V, P)$, то доповнення графа $\overline{G}_1 = G \setminus G_1 = \overline{G}_1(V \setminus V_1, P \setminus P_1)$.

2. *Об'єднання графів.* Якщо дано граф $G_1(V_1, P_1)$ і граф $G_2(V_2, P_2)$, то об'єднаний граф $G = G_1 \cup G_2 = G(V_1 \cup V_2, P_1 \cup P_2)$.

3. *З'єднання графів.* Якщо дано граф $G_1(V_1, P_1)$ і граф $G_2(V_2, P_2)$, то з'єднаний граф

$$G = G_1 \,\overline{\cup}\, G_2 = G(V_1 \cup V_2, P_1 \cup P_2 \cup \{P(v_1, v_2) : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}).$$

Операція з'єднання графів неоднозначна, якщо $|P(v_1, v_2)| < |V_1| \cdot |V_2|$.

4. *Перетин графів.* Якщо дано граф $G_1(V_1, P_1)$ і граф $G_2(V_2, P_2)$, то перетин графів $G = G_1 \cap G_2 = G(V_1 \cap V_2, P_1 \cap P_2)$.

Крім того використовуються додаткові пари протилежних операцій:

5. *Додавання вершини* v_0 до графа $G_1(V_1, P_1)$ зводиться до з'єднання графів $G(V,P) = G_1(V_1, P_1) \overline{\cup}\, G_0(\{v_0\}, \phi)$;

Видалення вершини v_0 з графа $G(V,P)$ зводиться до знаходження доповнення графа $G_1(V_1, P_1) = G(V,P) \setminus G_0\left(\{v_0\}, \left\{\forall_i [p_{i0}, p_{0i}]\right\}\right)$.

6. *Видалення ребра* $G(V, P \setminus \{p_0\})$;

Додавання ребра $G(V, P \cup \{p_0\})$.

7. *Стягування підграфа у вершину* та *розмноження вершини*.

Операції над графами змінюють розмір матриць, що подають графи, тому вони є нелінійними з точки зору перетворень матриць. Використовують також ізоморфні перетворення графів, які змінюють тільки нумерацію вершин.