

ТЕМА 4. Транспортна задача

План

4.1. Постановка транспортної задачі та її математичні моделі	1
4.2. Відкрита транспортна задача	5
4.3. Методи побудови початкового опорного плану	5
4.4. Метод потенціалів	6
4.5. Економічні задачі, що зводяться до задач транспортного типу	8

4.1. Постановка транспортної задачі та її математичні моделі

Транспортна задача полягає у пошуку найбільш вигідного плану перевезення однорідного продукту з пунктів виробництва (чи зберігання) до пунктів споживання, тобто від постачальників до споживачів, ефективність якого будемо оцінювати за критерієм найменшої вартості перевезення. Транспортна задача – це специфічна задача лінійного програмування.

Сформулюємо визначення транспортної задачі. Деяку однорідну продукцію, яка знаходиться в m постачальників $A_1, A_2, \dots, A_m$ кількістю $a_1, a_2, \dots, a_m$ одиниць відповідно, потрібно перевезти n споживачам $B_1, B_2, \dots, B_n$ в кількостях $b_1, b_2, \dots, b_n$ одиниць. Відомі вартості перевезень одиниці продукції від i -го постачальника до j -го споживача c_{ij} ($i=1, \dots, m; j=1, \dots, n$), яку можна записати у вигляді матриці вартостей перевезення одиниці:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

Необхідно скласти такий план перевезення, щоб сумарна вартість перевезення була мінімальною.

Вантаж, що перевозиться має бути однорідним (пісок, вугілля, цегла, метал та ін.), а одиниці виміру кількості продукції (вантажу) можуть бути різноманітними (т, м³, шт., л і т.ін.). Вартість перевезень вимірюється в грошових одиницях (гр. од.); передбачається, що вартість перевезень продукції пропорційна його кількості. Постачальниками можуть бути підприємства, бази, склади, а споживачами – підприємства, магазини, будівельні об'єкти, тощо.

Відповідно до умови задачі невідомою величиною є кількість одиниць продукції (об'єкти постачання) x_{ij} , що перевозяться від i -го постачальника до j -го споживача.

Умову транспортної задачі можна записати у вигляді таблиці 4.1:

Ми розглянули найбільш поширену постановку транспортної задачі з мінімізації загальної вартості перевезень. В деяких задачах практичної

діяльності може мінімізуватись час перевезень, визначатись найкоротша відстань за заданої мережі доріг та ін.

Таблиця 4.1

Постачальники	Споживачі	B_1	B_2	...	B_n
	Потреби	b_1	b_2	...	b_n
	Запаси				
A_1	a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}
A_2	a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}
...	...	...	...	...	...
A_m	a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}

Побудуємо математичну модель транспортної задачі. Оскільки наперед невідомо, скільки продукції потрібно перевезти з пункту A_i до пункту B_j , щоб план перевезень був оптимальним, то позначимо його через x_{ij} . Вартість перевезення всього вантажу від постачальників до споживачів позначимо Z .

Тоді цільова функція матиме вигляд:

$$Z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \dots + c_{2n}x_{2n} + \dots + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \dots + c_{mn}x_{mn} \rightarrow (\min)$$

$$\text{або } Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij} \rightarrow (\min) \quad (4.1)$$

Для формалізації обмежень в транспортній задачі скористаємось наступними міркуваннями.

На практиці при перевезенні продукції можлива одна з трьох ситуацій:

Ситуація 1. Кількість одиниць вантажу в постачальників відповідає попиту з боку споживачів, що відображається в умові балансу як виконання рівності загальної суми запасу продукції загальній сумі потреб в ньому, тобто

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (4.2).$$

Якщо в транспортній задачі умова (4.2) виконується, то таку транспортну задачу називають *закритою* (з правильним балансом) або *збалансованою*. Якщо ж рівність (4.2) не виконується, то транспортну задачу називають *відкритою* (з неправильним балансом) або *незбалансованою*.

Для складання обмежень транспортної задачі скористаємось такими міркуваннями:

а) кількість вантажу, який потрібно перевезти до пункту B_j з усіх пунктів постачання, дорівнює $x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{mj}$, а споживачеві B_j потрібно b_j одиниць вантажу, тому, враховуючи те, що всі потреби повинні бути задоволеними, можемо записати обмеження стосовно потреб:

$$x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{mj} = b_j, \quad j = \overline{1, n};$$

б) кількість вантажу, який треба вивезти з пункту постачання A_i до всіх споживачів, дорівнює $x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in}$, а постачальник має a_i одиниць вантажу і всі вантажі мають бути вивезені, тому обмеження стосовно запасів матимуть вигляд:

$$x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in} = a_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

В загальному випадку систему обмежень запишемо таким чином:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} = b_n, \\ x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} = a_2, \\ \dots\dots\dots \\ x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} = a_m, \\ x_{ij} \geq 0; \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}, \end{array} \right. \quad (4.3)$$

або

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, & j = \overline{1, n}; \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, & i = \overline{1, m}; \\ x_{ij} \geq 0, & i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (4.3)$$

Ми отримали математичну модель транспортної задачі (4.1)-(4.3),

де x_{ij} – кількість продукції, що перевозиться від i -го постачальника до j -го споживача;

c_{ij} – вартість перевезення одиниці продукції від i -го постачальника до j -го споживача;

a_i – запаси продукції i -го постачальника;

b_j – попит на продукцію j -го споживача.

Враховуючи заявлене вище, щодо виконання умови (4.2) математична модель транспортної задачі (4.1) та (4.3) є *закритою*, а задача – *збалансованою*.

Тепер, виходячи з економічної постановки транспортної задачі, можемо сформулювати її математичну задачу: *серед всіх невід’ємних розв’язків системи рівнянь (4.3) знайти такий, при якому оптимізуюча форма (4.1) набуде найменшого значення.*

Ситуація 2. Кількість вантажу в усіх постачальників більша за попит у цьому вантажу споживачів:

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j, \quad (4.4)$$

Тому частина вантажу в постачальників залишиться, а споживачі отримають увесь необхідний вантаж. Обмеження першої групи матимуть вигляд « $\leq$ », а модель транспортної задачі буде такою:

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &\leq a_i, \quad i = \overline{1, m}; \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= b_j, \quad j = \overline{1, n}; \\ x_{ij} &\geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ситуація 3. Кількість вантажу в усіх постачальників менша від потреби в ньому всіх споживачів:

$$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j, \quad (4.6).$$

Тому кожен постачальник увесь свій вантаж вивезе, а частина споживачів отримує вантажу в меншій кількості, ніж необхідно, обмеження другої групи набудуть вигляду « $\geq$ ». Тоді модель транспортної задачі буде такою:

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &= a_i, \quad i = \overline{1, m}; \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &\leq b_j, \quad j = \overline{1, n}; \\ x_{ij} &\geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Враховуючи заявлене вище, щодо виконання умови (4.2) математичні моделі транспортної задачі (4.5) та (4.7) є *відкритими*, а задачі – *незбалансованими*.

Найбільш простою і поширеною є закрыта модель (ситуація 1), на основі якої розглядаємо розв’язок транспортної задачі.

4.2. Відкрита транспортна задача

Відомо, що транспортна задача, для якої сума запасів постачальників не дорівнює сумі потреб споживачів, тобто $\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j$, називається відкритою.

Якщо під час розв’язання транспортної задачі з’ясувалося, що транспортна задача відкрита, то її необхідно звести до закрытого типу, оскільки ми можемо знайти оптимальний план тільки транспортної задачі закрытого типу.

У разі перевищення попиту над запасами ($\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$) вводимо

фіктивного постачальника $A_\phi = A_{m+1}$ з запасом $a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$, якщо ж запаси

постачальників перевищують потреби споживачів ($\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$), то вводимо

фіктивного споживача $B_\phi = B_{n+1}$ з потребою $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$. Вартість

перевезення одиниці продукції від фіктивного постачальника чи до фіктивного споживача вважається рівною нулю, оскільки насправді цей вантаж перевозитись не буде і це не вплине на значення цільової функції.

Слід звернути увагу на те, що при побудові початкового опорного плану транспортної задачі методом найменшої вартості клітинки з нульовими вартостями перевезення одиниці вантажу потрібно заповнювати в останню чергу.

4.3. Методи побудови початкового опорного плану

Як і в симплексному методі розв’язування задач лінійного програмування, при розв’язуванні транспортної задачі потрібно мати початковий опорний план.

Розглянемо методи заходження цього плану:

1. *Діагональний метод (північно-західного кута).*

Розглянемо алгоритм побудови початкового опорного плану транспортної задачі методом північно-західного кута:

1. Перевірка транспортної задачі на закритість. Якщо вона відкрита, то приводимо її до задачі закрытого типу (див. п. 4.2).

2. Побудову початкового опорного плану за методом північного-західного кута починають із заповнення лівої верхньої клітинки таблиці A_1B_1 (x_{11}), в яку записують менше з двох чисел a_1 та b_1 . Далі переходять до наступної клітинки в рядку або стовпчику і заповнюють її і т. д., закінчуючи останньою правою клітинкою таблиці A_mB_n (x_{mn}).

Таким чином, першою заповнюємо верхню ліву клітинку.

Заповнення клітинки A_iB_j таблиці здійснюємо за такими правилами:

а) Якщо $a_i < b_j$, тобто запаси менші від потреб, то в цю клітинку записуємо весь об'єм запасу вантажу a_i , перераховуємо потреби споживача B_j , постачальника A_i вилучаємо з розгляду (наприклад, поставивши у всіх клітинках рядочка, крім заповненої, прочерки) і переходимо до заповнення наступної клітинки $A_{i+1}B_j$;

б) якщо $a_i > b_j$, тобто запаси більші від потреб, то в цю клітинку записуємо весь об'єм потреб вантажу b_j , перераховуємо запаси постачальника A_i , вилучаємо з розгляду споживача B_j (ставимо у всіх клітинках стовпчика, крім заповненої, прочерки) і переходимо до заповнення наступної клітинки A_iB_{j+1} ;

в) якщо $a_i = b_j$, тобто запаси рівні потребам, то в цю клітинку записуємо весь об'єм потреб чи запасів, вилучаємо з розгляду постачальника A_i і споживача B_j (ставимо в усіх клітинках стовпчика і рядка, крім заповненої, прочерки) і переходимо до заповнення наступної клітинки $A_{i+1}B_{j+1}$.

3. Серед незаповнених клітинок (без обсягу вантажу і прочерків) знову вибираємо верхню ліву клітинку таблиці і заповнюємо її за правилами, поданими в п. 2. Так продовжуємо до тих пір, доки не заповнимо всі клітинки таблиці.

4. З одержаної таблиці виписуємо початковий опорний план транспортної задачі та обчислюємо значення цільової функції при цьому плані.

2. Метод найменшої вартості

Правила знаходження початкового опорного плану транспортної задачі методом найменшої вартості відрізняються від правил знаходження такого плану діагональним методом тільки послідовністю вибору клітинки, яку потрібно заповнювати. Згідно з методом найменшої вартості першою вибирається клітинка з найменшою вартістю перевезення одиниці вантажу від постачальника до споживача. Якщо таких клітинок декілька, то вибираємо ту, якої кількість вантажу, що можна перевезти, найбільша.

4.4. Метод потенціалів

Транспортна задача є задачею лінійного програмування, яку можна розв'язати симплекс-методом, але при розв'язуванні транспортної задачі симплексним методом ми б отримали симплекс-таблиці великих розмірів,

оскільки число невідомих дорівнює $m \times n$. Специфічна структура цієї задачі дозволяє використати для її розв'язання ефективніший метод – метод потенціалів.

Критерій оптимальності опорного плану за методом потенціалів

Ми вже знаємо методи знаходження початкових опорних планів транспортної задачі, але чи ці опорні плани є оптимальними, тобто такими, що дають найменшу загальну вартість перевезення всього вантажу від постачальників до споживачів, ми не знаємо. Опорний план перевіряють на оптимальність за допомогою потенціалів. Відповідно до кожного постачальника A_i ставимо потенціал u_i , а кожному споживачеві $B_j - v_j$.

Критерій оптимальності опорного плану транспортної задачі:

якщо для деякого опорного плану (x_{ij}) транспортної задачі існують такі числа-потенціали u_i та v_j , що для базисних клітинок виконуються рівності $u_i + v_j = c_{ij}$, а для не базисних клітинок виконуються нерівності $u_i + v_j \leq c_{ij}$ для всіх $i=1, \dots, m$ $j=1, \dots, n$, то такий опорний план є оптимальним.

Потенціали опорного плану визначаються із системи $u_i + v_j = c_{ij}$, які записують для всіх заповнених клітинок таблиці транспортної задачі. За допомогою розрахованих потенціалів перевіряють умову оптимальності $u_i + v_j \leq c_{ij}$ для незаповнених клітинок таблиці. Якщо хоча б для однієї небазисної клітинки ця умова не виконується, тобто $u_i + v_j > c_{ij}$, то поточний план не є оптимальним і потрібно перейти до нового опорного плану.

Цикли перерахунку транспортної задачі.

Перехід від одного опорного плану до іншого виконують заповненням небазисної клітинки, для якої порушена умова оптимальності. Якщо окреслених клітинок кілька, то для заповнення вибирають таку, що має найбільше порушення, тобто $\max \{ \Delta_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij} \}$. Для вибраної порожньої клітинки будують цикл перерахунку.

Циклом у транспортній задачі називають замкнену ламану лінію, сторони якої проходять уздовж рядків і стовпчиків таблиці, і одна з вершин якої знаходиться в небазисній клітинці, для якої порушена умова оптимальності, а всі інші вершини – базисні клітинки.

Перерозподіл продукції в межах циклу здійснюють за такими правилами:

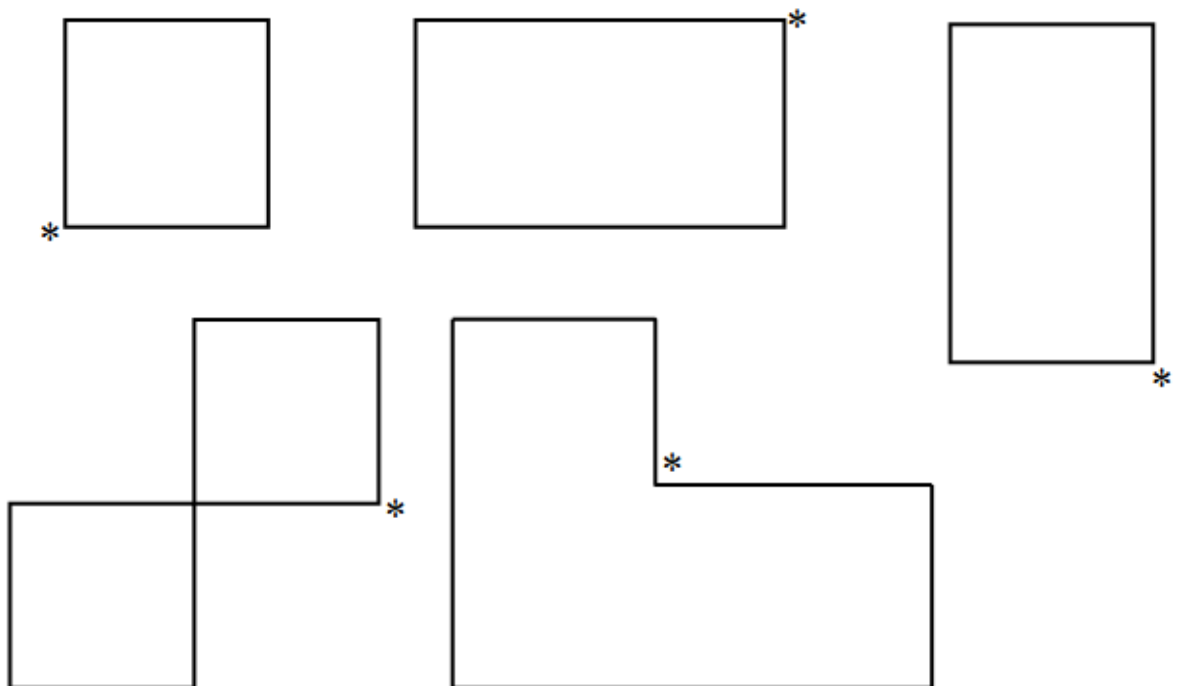
а) кожній вершині циклу приписують певний знак, причому незаповненій клітинці знак «+», а всім іншим по черзі знаки «-» та «+»;

б) у порожню клітинку заносять найменше з чисел, що стоять у клітинках зі знаком «-». Одночасно це число додають до відповідних чисел, що стоять у клітинках зі знаком «+» і віднімають від чисел, що розміщені у клітинках зі знаком «-».

Отже, клітинка, що була вільною, стала заповненою, а відповідна клітинка, де знаходилося найменше число (у вершині з «—») стала незаповненою. В результаті такого перерозподілу продукції ми отримаємо новий опорний план транспортної задачі, який знову перевіряємо на оптимальність. Якщо розв'язок оптимальний, то обчислюємо мінімальне значення цільової функції (мінімальну вартість перевезення всього вантажу), а якщо неоптимальний, то знову будуємо цикл перерахунку і з допомогою зсуву по циклу переходимо до нового опорного плану. Процес повторюють до тих пір, доки не отримаємо оптимального розв'язку транспортної задачі. Значення базисних клітинок, які не брали участі в циклі перерахунку, в новій таблиці залишаються без змін. Якщо на деякому кроці потреби співпадають із запасами, то в потребах ставимо дійсний нуль, а в запасах – фіктивний (нуль з крапкою – 0). Тоді одразу будується повна система рівнянь для знаходження значень потенціалів.

У задачах з виродженим планом часто зсув стосовно циклу треба робити на 0. Тоді при переході до наступної таблиці значення базисних клітинок, що брали участь в циклі перерахунку, не змінилося. Тільки цей «базисний нуль» переводять у небазисну клітинку, для якої по суті робили цикл перерахунку, а клітинка, в якій знаходився цей 0, стає вільною.

Зобразимо можливі види циклів:



4.5. Економічні задачі, що зводяться до задач транспортного типу

Однопродуктова задача поточного перспективного планування

Найпростішими моделями галузевого планування є моделі оптимізації поточних і перспективних планових розрахунків виробництва та постачання

однорідної продукції.

Розглянемо одно продуктову модель поточного галузевого планування. У поточному періоді необхідно визначити оптимальний варіант закріплення споживачів за постачальниками таким чином, щоб транспортні витрати на перевезення всього обсягу однорідної продукції чи сировини були мінімальними.

Припустимо, що в структуру умовної галузі входить n підприємств, які є виробниками однорідної продукції кількістю $a_1, a_2, \dots, a_n$. Далі вироблена продукція розподіляється між m підприємствами-споживачами. Потреби відповідного споживача становлять $b_1, b_2, \dots, b_m$. Введемо позначення: i – індекс постачальника продукції; j – індекс споживача продукції; t_{ij} – вартість перевезення одиниці продукції від i -го постачальника до j -го споживача; a_i – наявність продукції від i -го постачальника; b_j – потреба в продукції j -го споживача; x_{ij} – шукана невідома величина обсягу перевезень продукції від i -го постачальника до j -го споживача.

Знайти такий план $\{x_{ij} \geq 0\}$, який забезпечить

$$Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m t_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

при виконанні умов:

1) з наявних виробничих потужностей постачальників

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} \leq a_i, i = \overline{1, n};$$

2) із забезпечення планової потреби в продукції споживачів

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \leq b_j, j = \overline{1, m}.$$

У лівій частині моделі повинна виконуватися додаткова умова, яка полягає в тому, що потреби не повинні перевищувати запасів:

$$\sum_{j=1}^m b_j \leq \sum_{i=1}^n a_i$$

Однак у практичній діяльності трапляються випадки, при яких потреба перевищує наявні виробничі потужності. Тоді виникає необхідність на перспективу розширювати наявні потужності за рахунок введення в дію нових об'єктів або реконструкції існуючих. Отже, переходимо до розгляду однопродуктової задачі перспективного планування.

Припустимо, що в деякій галузі функціонує k підприємств, які мають річну потужність $a_1, a_2, \dots, a_k$ одиниць продукції одного виду. Річна потреба m підприємств галузі в деякому виді продукції відповідно складає $b_1, b_2, \dots, b_m$. При цьому діючі підприємства не можуть забезпечити потреби споживачів в окресленій продукції на величину

$$a = \sum_{j=1}^m b_j - \sum_{i=1}^k a_i$$

Отже, на перспективу планується $(n-k)$ варіантів розширення та реконструкції, що діють на величину a .

Для побудови математичної моделі врахуємо попередні і введемо нові позначення: c_i – собівартість одиниці продукції на i -му підприємстві (як на діючому, так і на проектному); t_{ij} – вартість перевезення одиниці продукції від i -го постачальника до j -го споживача; E – нормативний коефіцієнт ефективності капітальних вкладень; k_i – капітальні вкладення для варіантів будівництва та реконструкції в розрахунку на одиницю річної продукції. Крім цього, необхідно ввести додаткового споживача з потребою $(n-k-1)a$ одиниць продукції, задавши для нього приведені витрати, що дорівнюють нулю. Тоді економіко-математична модель задачі набуває вигляду: знайти оптимальний план збільшення виробничих потужностей $\{x_{ij} \geq 0\}$, який забезпечить

$$Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m+1} (c_i + Ek_i + t_{ij}) \cdot x_{ij} \rightarrow \min$$

при виконанні умов:

1) із задоволення потреб підприємств галузі в продукції

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = b_j, j = \overline{1, m+1}$$

2) стосовно виробничих потужностей підприємств

$$\sum_{j=1}^{m+1} x_{ij} = a_i, i = \overline{1, n}$$

Приклад. Галузь складається з чотирьох підприємств, які виробляють однорідну продукцію. Виробничі потужності цих підприємств становлять 100, 150, 200, 150 одиниць виробів за добу. Щоденна потреба інших п'яти підприємств галузі у виробничій продукції становить 150, 100, 150, 200, 100. Транспортні витрати (грн.) за доставку одиниці продукції для діючих підприємств задані такою матрицею:

$$[t_{ij}] = \begin{bmatrix} 40 & 20 & 25 & 30 & 25 \\ 15 & 35 & 40 & 15 & 30 \\ 25 & 10 & 30 & 45 & 10 \\ 35 & 15 & 50 & 55 & 20 \end{bmatrix}.$$

Собівартість виробленої продукції на діючих підприємствах становлять: $c_i = (25; 30; 28; 20)$ грн.

Оскільки наявні виробничі потужності не можуть забезпечити своїх суміжників продукцією, то на перспективу планується збільшити потужності галузі на величину, що дорівнює 100 одиниць виробів за добу. Проектами передбачена реконструкція першого та третього підприємств та будівництво

нового. Собівартість одиниці продукції після реконструкції становить: $c_1^P = 22$ грн. і $c_3^P = 25$ грн., а на новому $c_n = 20$ грн. Питомі витрати на реконструкцію та будівництво підприємств дорівнюють $Ek_1 = 48; Ek_3 = 40; Ek_n = 50$ грн. Транспортні витрати на одиницю продукції для нового підприємства становлять $t_j^n = (30; 45; 50; 25; 35)$.

Визначити оптимальний варіант приросту потужностей галузі та ефективний план поставки виробів суміжникам, який забезпечить мінімальні витрати.

Розв'язування.

Знаходимо загальні витрати на одиницю продукції з урахуванням варіантів приросту продукції. Для діючих підприємств загальні витрати містять у собі t_{ij} і c_i , а для нового та реконструкції – також і капітальні вкладення (табл. 4).

Таблиця 4

	Загальні витрати на одиницю продукції, грн.						Потужність, тис. од.
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	
A_1	65	45	50	65	50	0	100
A_2	45	65	70	45	60	0	150
A_3	53	38	58	73	38	0	200
A_4	55	35	70	75	40	0	150
Реконструкція A_1	110	90	95	100	95	0	100
Реконструкція A_3	90	75	95	110	75	0	100
Будівництво нового	100	115	120	95	105	0	100
Потреба	150	100	150	200	100	200	

Невідомою величиною в задачі є x_{ij} – кількість продукції, яку постачає i -й виробник j -му споживачеві. Як бачимо, кількість споживачів збільшилася на одиницю, а потреби на 200 одиниць. Це пов'язано з тим, що модель містить три варіанти розширення потужностей обсягом 100 одиниць.

Математична модель задачі матиме вигляд:

знайти

$$Z = 65x_{11} + 45x_{12} + 50x_{13} + 65x_{14} + 50x_{15} + \dots + \\ + 105x_{71} + 150x_{72} + 135x_{73} + 110x_{74} + 120x_{75} \rightarrow \min$$

при виконанні умов:

1) з потреб підприємств у продукції:

першого – $x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} + x_{71} = 150$;

другого – $x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} + x_{62} + x_{72} = 100$;

... ..

шостого – $x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} + x_{66} + x_{76} = 200$;

2) стосовно виробничих потужностей:

першого – $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} = 100$;

другого – $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} = 150$;

... ..

нового – $x_{71} + x_{72} + x_{73} + x_{74} + x_{75} + x_{76} = 100$.

Розв'язавши задачу з допомогою оптимізаційного прикладного пакету EXCEL, бачимо, що оптимальним варіантом буде розширення потужностей першого підприємства. Крім цього, ми отримали оптимальний план забезпечення продукцією на перспективу:

$$[x_{ij}^{on}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 150 & 0 & 0 \\ 100 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 50 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 50 & 50 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Модель оптимального розподілу фінансових ресурсів банку

Обсяг фінансових ресурсів банку визначається наявністю певної кількості грошових коштів у тій або іншій валюті. При здійсненні кредитних операцій виникають ситуації, коли банк не має можливості задовольнити клієнта в конкретній валюті. Тому як альтернативні варіанти позичальнику пропонуються кредити в іншій валюті в поєднанні з наданням послуг відносно конвертації валюти кредиту у необхідну валюту. Разом з тим процентна ставка для кредиту в певній валюті кожному позичальнику встановлюється індивідуально, виходячи з існуючих відносин між банком і позичальником, ризикованості операції, конкурентної та рейтингової позицій банку і т.д.

При проведенні подібних операцій з великою кількістю клієнтів виникають певні труднощі у знаходженні оптимального варіанта серед множини існуючих, який забезпечив би потребу позичальників у кредитах і прибуток банку був би максимальним.

Для розв'язання поставленої проблеми можна побудувати економіко-математичну модель, яка зводиться до задачі транспортного типу, і далі використати математичний інструментарій або програмні продукти математичного програмування.

Припустимо, що банк має n видів вільних ресурсів (грошових коштів у різних видах валют), на які в конкретний час є попит, і планується їх розподілити між m позичальниками (юридичними чи фізичними особами).

Для побудови економіко-математичної моделі задачі введемо такі позначення: i – індекс виду валюти, $i = \overline{1, n}$; j – індекс позичальника, $j = \overline{1, m}$; b_j – обсяг кредиту у гривневому еквіваленті виділеного j -му позичальникові; c_{ij} – процентна ставка відносно кредиту для j -го позичальника у валюті i -го виду; a_i – обсяг вільних ресурсів банку в i -му виді валюти; x_{ij} – невідома величина, яка визначає обсяг кредиту виділеного для j -го позичальника в i -му виді валюти.

Необхідно знайти оптимальну стратегію розподілу наявних фінансових ресурсів, яка забезпечить максимальний прибуток банку від проведення кредитних операцій.

Враховуючи введені позначення, математична модель оптимального розподілу вільних фінансових ресурсів банку набуде вигляду.

Знайти такий план $\{x_{ij} \geq 0, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}\}$, який забезпечить

$$Z_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{c_{ij} x_{ij}}{100} \rightarrow \max$$

при виконанні умов:

1) з обсягу вільних ресурсів банку

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = a_i, i = \overline{1, n};$$

2) з обсягу виділених кредитів позичальникам

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = b_j, j = \overline{1, m};$$

3) рівноваги попиту та пропозиції

$$\sum_{j=1}^m b_j = \sum_{i=1}^n a_i.$$

Проте у повсякденній діяльності банку можуть виникнути ситуації, за яких попит перевищує наявні кредитні резерви, тобто має місце

$$\sum_{j=1}^m b_j > \sum_{i=1}^n a_i.$$

У випадку перевищення попиту над пропозицією стосовно кредитних резервів банк може додатково використати міжбанківський кредит обсягом d грошових одиниць за умови, якщо йому це економічно вигідно. Величина міжбанківського кредиту становитиме:

$$d = \sum_{j=1}^m b_j - \sum_{i=1}^n a_i.$$

Далі вводимо додаткові позначення: l - індекс банку, у якому взято кредит, $l \in L$ - множина банків-постачальників; y_{il} - обсяг міжбанківського кредиту взятого у l -му банку i -го виду валюти; P_{il} - процентна ставка відносно міжбанківського кредиту для l -го банку у валюті i -го виду; Q_{il} - максимально можливий обсяг взяття міжбанківського кредиту в l -му банку у валюті i -го виду.

Тоді цільова функція матиме вигляд:

$$Z_2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{c_{ij} x_{ij}}{100} - \sum_{i=1}^n \sum_{l \in L} \frac{P_{il} y_{il}}{100} \rightarrow \max$$

при виконанні умов:

1) з обсягу наявних вільних ресурсів банку з врахуванням міжбанківського кредиту

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = a_i + \sum_{l \in L} y_{il}, i = \overline{1, n};$$

2) з обсягу виділених кредитів позичальникам

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = b_j, j = \overline{1, m};$$

3) стосовно розмірів міжбанківських кредитів

$$y_{il} \leq Q_{il}, i = \overline{1, n}, l \in L;$$

4) стосовно невід'ємності змінних

$$y_{il} \geq 0, x_{ij} \geq 0, i = \overline{1, n}, l \in L, j = \overline{1, m}.$$

Побудовані цільові функції Z_1 та Z_2 відображають інтереси тільки основного банку і не враховують зацікавленості самих позичальників. Тому доцільно окреслену задачу розв'язати як багатокритеріальну і тим самим одержати компромісний план.

У менеджменті банківської діяльності можливі й інші не менш цікаві з практичної сторони проблемні ситуації, які можуть бути представлені як задачі транспортного типу. Як ситуаційні можна навести такі приклади:

– банківський портфель цінних паперів містить декілька пакетів акцій різних фінансових установ і на ринку банківської продукції є декілька покупців, зацікавлених у придбанні цих акцій;

– банківський портфель містить векселі однієї фінансової структури, але з різними термінами погашення та різною дохідністю, з однієї сторони, і потенційні клієнти кредитування векселів – з іншої.

Модель формування штатного розпису фірми

Припустимо, що деяка фірма здійснює процедуру формування штатного розпису. Позначимо: j – індекс посад, $j = \overline{1, m}$; i – індекс групи кандидатів на займані посади, $i = \overline{1, n}$. У цей момент часу фірма має n груп різних посад, у кожній із яких є b_j вільних. Претенденти на вакансії проходять тестування, за результатами якого їх ділять на n груп по a_i кандидатів у кожній групі. Для кожного кандидата з i -тої групи необхідні певні витрати c_{ij} на навчання для призначення його на j -ту посаду. Тут можливі випадки, за яких кандидат повністю відповідає посаді, якщо $c_{ij} = 0$; кандидат взагалі не може обіймати посаду, якщо $c_{ij} = \infty$.

Ставиться завдання про оптимальний розподіл кандидатів на відповідні посади, за умови мінімальних фінансових витрат на їхнє навчання.

Для знаходження оптимальної стратегії дій припустимо, що число претендентів відповідає числу запропонованих вакансій. У цьому випадку отримуємо транспортну задачу закритого типу. В протилежному випадку маємо справу з транспортною задачею відкритого типу. Тут постачальником виступає група претендентів на вакансії, а в ролі споживача виступають групи вакантних посад.

Витрати на навчання кандидатів c_{ij} будуть слугувати тарифними перевезеннями.

Невідомими величинами задачі будуть x_{ij} – кількість кандидатів i -тої групи, які призначаються на j -ту посаду.

З урахуванням введених позначень, економіко-математична модель задачі матиме вигляд:

Знайти такий розв'язок $\{x_{ij} \geq 0, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}\}$, який забезпечить

$$Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \min ,$$

при виконанні умов:

1) всі кандидати на посади повинні бути працевлаштованими

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = a_i, i = \overline{1, n} ;$$

2) всі вакантні посади повинні бути заповненими

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = b_j, j = \overline{1, m} ;$$

3) рівноваги попиту та пропозиції

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j .$$