

Стохастичні моделі

Однією з найважливіших характеристик перехрестя є довжина черги автомобілів, які очікують проїзду. Побудуємо просту модель утворення черги на перехресті зі світлофорним регулюванням. Розглянемо перетин двох доріг з одностороннім рухом. Нехай τ^+ – тривалість горіння зеленого світла, а τ – тривалість всього циклу світлофора. Припустимо, що коли для однієї смуги загорілося червоне світло, зелене світло для другої смуги загоряється через деякий час, щоб автомобілі що "проскочили" встигли проїхати.

Нехай потік автомобілів, що проходять через точку А (деяку точку на ділянці дороги перед перехрестям), є найпростіший потік з параметром λ , $\lambda > 0$. При накопиченні автомобілів в системі точка А зміщується вліво (рис. 4.3.3).

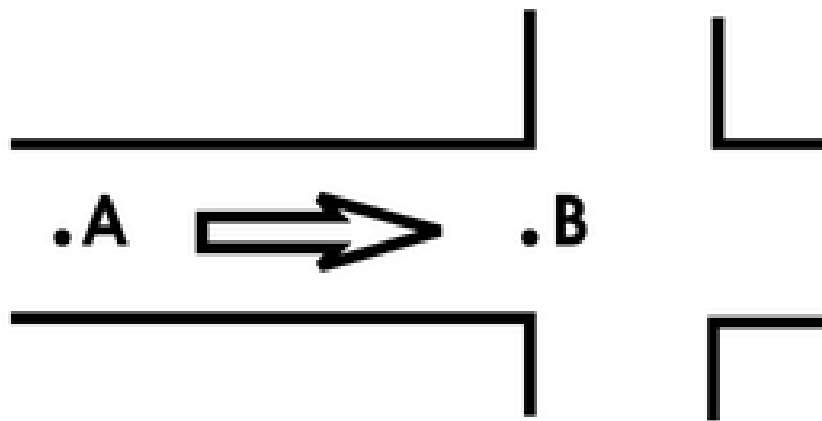


Рисунок 4.3.3 – Модель черги на перехресті

Автомобілі, що надходять в систему, або перетинають перехрестя (отримують обслуговування як запити), якщо проїзд вільний і горить зелене світло, або стають в чергу біля перехрестя. Припустимо, що водії не їдуть на червоне світло, навіть якщо на перетинаючій смузі порожньо.

Обслуговуванням одного автомобіля в рамках даної моделі є проїзд через точку В – початок перехрестя. Прийmemo час проїзду через точку В однаковим для всіх автомобілів і рівним T , $T > 0$. За цей час наступний автомобіль під'їжджає до перехрестя (точці В) і чекає свого обслуговування. Таким чином, поведінка перехрестя буде описуватися за допомогою однолінійної системи масового обслуговування (СМО) з очікуванням і буфером розміру M (максимальне число автомобілів, здатних поміститися на дорозі), $M \in \mathbb{N}$.

Будемо шукати середню довжину черги. Припустимо, що перед перехрестям може стояти не більше M автомобілів, $M \geq 1$. Кожен автомобіль займає одну клітинку (однакової довжини для всіх автомобілів). Коли перший автомобіль проїжджає через перехрестя, інші, які стоять в черзі, посуваються на одну клітинку вперед.

Підрахуємо, скільки автомобілів можуть проїхати перехрестя за період горіння зеленого світла. За одиницю часу через перехрестя можуть проїхати T^{-1}

автомобілів. Значить, на зелене світло через перехрестя можуть проїхати τ^+T^{-1} автомобілів. Таким чином, величина

$$N =$$

являє собою пропускну здатність перехрестя за час горіння зеленого світла, де $[\cdot]$ є ціла частина числа.

Розглянемо накопичення автомобілів в системі за час одного циклу світлофора. Будемо вивчати поведінку системи в моменти часу nT , $n = 0, \dots, N$, тобто моменти початку періоду зеленого світла і моменти закінчення обслуговування запитів (автомобілів). Позначимо через $\rho_i^{(n)}$ ймовірності того, що в момент часу $nT + 0$ (безпосередньо відразу після відходу автомобіля з черги) довжина черги становить i автомобілів, $n = 0, \dots, N$, $i = 0, \dots, M$. Позначимо також через $P_i(t)$ ймовірність того, що за час t в систему прийдуть i автомобілів, $i \geq 0$. Вираз для $P_i(t)$ має вигляд:

$$P_i(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!}, i \geq 0$$

Рівняння для ймовірностей $\rho_i^{(n)}$, $n = 0, \dots, N$, $i \geq 0$ мають вигляд:

$$\begin{aligned} \rho_i^{(0)} &= \sum_{k=0}^i \rho_k^{(N)} P_{i-k}(\tau), \quad i = 0, \dots, M, \\ \rho_M^{(0)} &= \sum_{k=0}^M \rho_k^{(N)} \sum_{l=M-k}^{\infty} P_l(\tau), \quad \tau = \tau - NT \\ \rho_i^{(n)} &= \sum_{k=1}^{i+1} \rho_k^{(n-1)} P_{i-k+1}(T), \quad i = 0, \dots, M-1, \\ \rho_M^{(n)} &= \sum_{k=0}^M \rho_k^{(n-1)} \sum_{l=M-k+1}^{\infty} P_l(T), \quad n = 1, \dots, N, \end{aligned} \tag{4.3.41}$$

причому кожна група ймовірностей $\rho_i^{(n)}$, $i = 0, \dots, M$ задовольняє умовам нормування

$$\sum_{i=0}^M \rho_i^{(n)} = 1, \quad n = 0, \dots, N. \tag{4.3.42}$$

Позначимо через $A_i = P_i(\tau)$, $\dot{A}_i = \sum_{l=i}^{\infty} P_l(\tau)$, $B_i = P_i(T)$, $\dot{B}_i = \sum_{l=i}^{\infty} P_l(T)$, $i \geq 0$ і розпишемо систему (4.3.41) більш детально:

$$\begin{aligned} \rho_0^{(0)} &= \rho_0^{(N)} A_0 \\ \rho_1^{(0)} &= \rho_0^{(N)} A_1 + \rho_1^{(N)} A_0 \\ \rho_M^{(0)} &= \rho_0^{(N)} A_M + \rho_1^{(N)} A_{M-1} + \dots + \rho_M^{(N)} A_0 \end{aligned} \tag{4.3.43}$$

де $A_i = P_i(\tau)$, $B_i = P_i(T)$.

$$\begin{aligned} \rho_0^{(n)} &= \rho_0^{(n-1)} B_1 + \rho_1^{(n-1)} B_0 \\ \rho_1^{(n)} &= \rho_0^{(n-1)} B_2 + \rho_1^{(n-1)} B_1 + \rho_2^{(n-1)} B_0 \end{aligned} \tag{4.3.44}$$

$$\rho_M^{(n)} = \rho_0^{(n-1)} \dot{B}_{M+1} + \rho_1^{(n-1)} \dot{B}_M + \dots + \rho_M^{(n-1)} \dot{B}_1, \quad n = 1, \dots, N$$

Запишемо системи (4.3.43) і (4.3.44) у матричному вигляді

$$\begin{aligned}\vec{\rho}^{(0)} &= \vec{\rho}^{(N)} \hat{A}, \\ \vec{\rho}^{(1)} &= \vec{\rho}^{(0)} \hat{B}, \\ \vec{\rho}^{(2)} &= \vec{\rho}^{(1)} \hat{B}, \\ \vec{\rho}^{(N)} &= \vec{\rho}^{(N-1)} \hat{B},\end{aligned}\tag{4.3.45}$$

де

$$\vec{\rho}^{(n)} = (\rho_0^{(n)}, \rho_1^{(n)}, \dots, \rho_M^{(n)}), \quad n = 0, N,$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & \dots & \dot{A}_{M-1} \\ 0 & A_0 & A_1 & \dots & \dot{A}_{M-2} \\ 0 & 0 & A_0 & \dots & \dot{A}_{M-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dot{A}_0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_M & \dot{B}_{M+1} \\ B_0 & B_1 & \dots & B_{M-1} & \dot{B}_M \\ 0 & B_0 & \dots & B_{M-2} & \dot{B}_{M-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_0 & \dot{B}_1 \end{bmatrix}.$$

Із системи (4.3.45) і умов нормування (42) при $n = 0$ знаходимо значення для вектора $\vec{\rho}^{(0)}$

$$\begin{cases} \vec{\rho}^{(0)} = \vec{\rho}^{(0)} B^N A, \\ \vec{\rho}^{(0)} \mathbf{1} = 1, \end{cases}$$

де $\mathbf{i} = (1, 1, \dots, 1)^T$

Інші вектори ймовірностей знаходимо за допомогою рівностей

$$\vec{\rho}^{(n)} = \vec{\rho}^{(n-1)} \hat{B}, \quad n = 1, N.$$

Тоді середня довжина черги на перехресті до моменту початку періоду зеленого світла дорівнює:

$$L = \sum_{i=0}^M i \rho_i^{(0)}.$$