Динамічні характеристики пружних систем з одним ступенем вільності

Визначення законів руху ланок механізму за заданими характеристиками зовнішніх сил вирішують за допомогою диференціальних рівнянь руху механічної системи (тіла, машини)

За законами Ньютона – сили в рівнянні рівноваги статичні:

$$m\vec{a} = \vec{R} = \overrightarrow{F_{\text{зовн}}} + \overrightarrow{F_{\text{опор}}} + \overrightarrow{F_{\text{пруж}}}$$

Згідно принципу Даламбера в динамічних задачах можна скласти рівняння рівноваги, якщо вважати прикладені динамічні навантаження статичними. І далі, щоб врахувати динамічний характер навантаження, до механічної системі прикладаються додатково сили інерції, рівні $m\vec{a}$, але протилежні за напрямком: $m\vec{a} = -\vec{F}_{\text{ІН}}$ Вони теж беруть участь в рівняннях рівноваги. Тоді

$$\vec{F}_{\text{ІН}} = -m\vec{a} = -\vec{R} = -(\overrightarrow{F_{\text{зовн}}} + \overrightarrow{F_{\text{опор}}} + \overrightarrow{F_{\text{пруж}}})$$

Або $$(-\overrightarrow{ma}) + \overrightarrow{F_{\text{зовн}}} + \overrightarrow{F_{\text{опор}}} + \overrightarrow{F_{\text{пруж}}} = 0$$

$$\vec{F}_{\text{ІН}} + \overrightarrow{F_{\text{зовн}}} + \overrightarrow{F_{\text{опор}}} + \overrightarrow{F_{\text{пруж}}} = 0$$

Вважаючи диференціальне рівняння руху тіла по одній координаті лінійним, отримуємо:

$$ma + F_{\text{опор}} + F_{\text{пружн}} = F_{\text{зовн}}$$

або $$ma + hV + cy = F_{\text{зовн}}$$

або $$my'' + hy' + cy = F_{\text{зовн}}$$

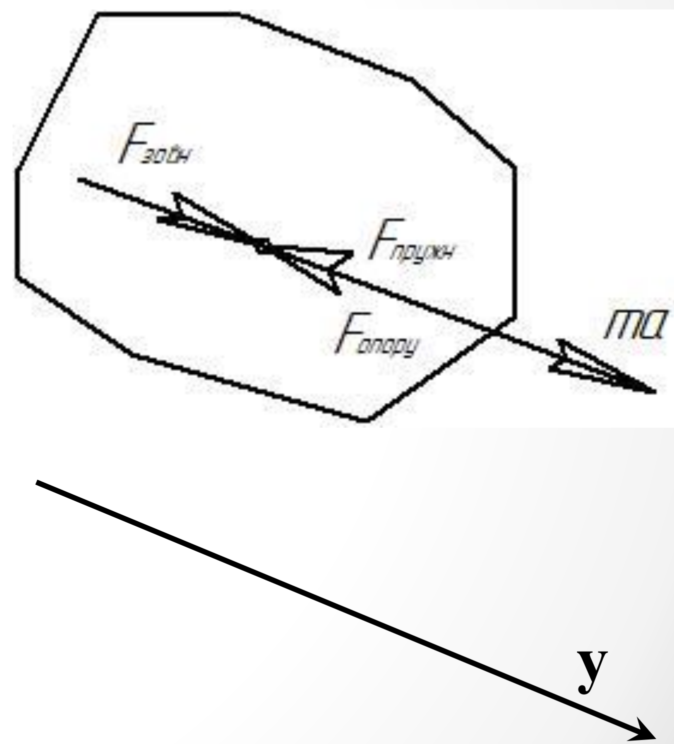


Рис. 4.1.

Динамічні характеристики пружних систем з одним ступенем вільності

Для спрощення опису руху системи (тіла) с одним ступенем вільності диференціальне рівняння руху приймається лінійним зі сталими коефіцієнтами:

- сила інерції пропорційна прискоренню тіла (маса – коефіцієнт);
- сила опору пропорційна швидкості руху тіла;
- сила пружності пропорційна переміщенню тіла (зміщенню) від нейтрального положення (жорсткість – коефіцієнт);

змінна у та її похідні в рівнянні присутні в першому степені (коефіцієнти при змінній постійні – лінійна коливальна система).

Рівняння руху такої системи матиме вигляд:

$$my'' + hy' + cy = F_{зовніш} \qquad (4.4)$$

Перший член лівої частини рівняння (4.4) являє собою силу інерції, другий – силу демпфування, третій – силу пружності.

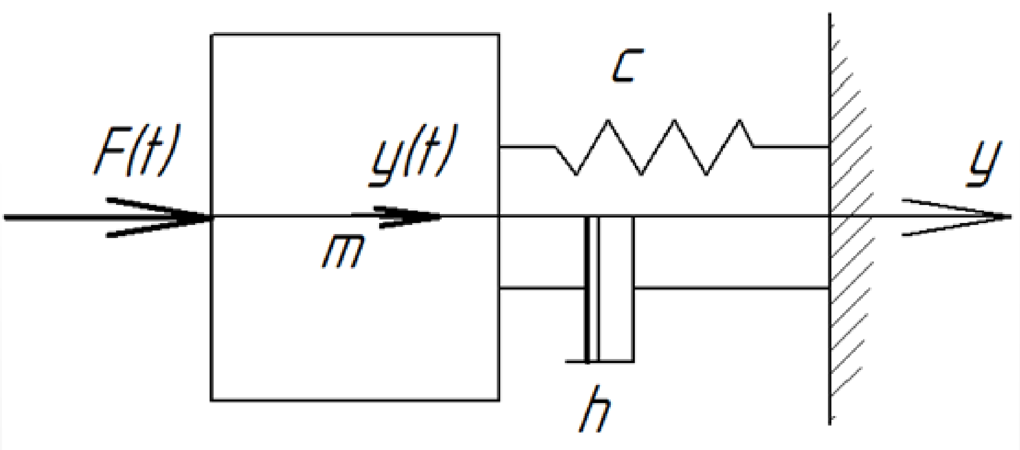


Рис. 4.2.

<u>Динамічні характеристики пружних систем з одним ступенем вільності</u>

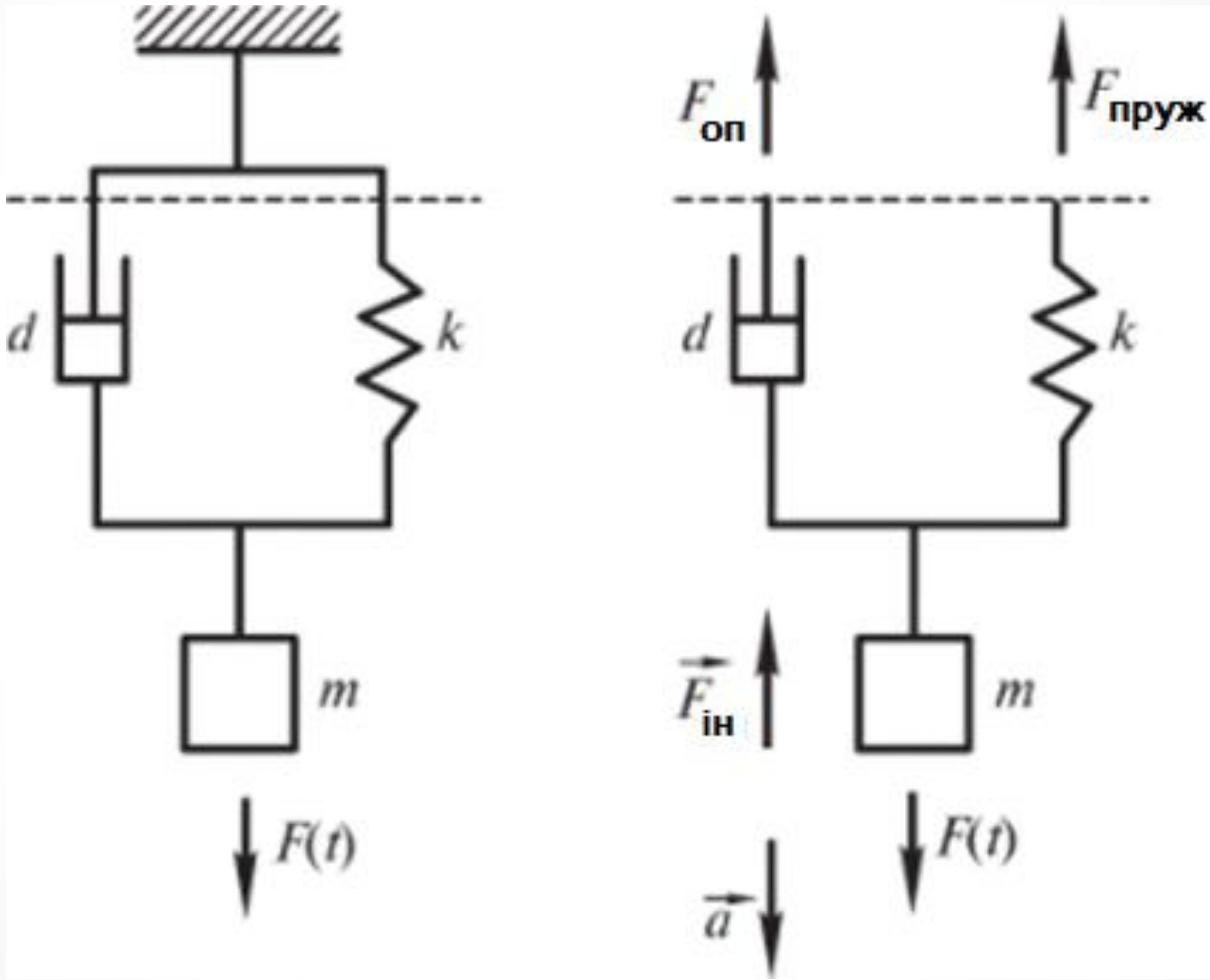


Рис. 4.3.

Динамічні характеристики пружних систем з одним ступенем вільності

Якщо розділити обидві частини рівняння (4.4) на *c* та позначити:
$m/c = T^2 = T_2^2$, $h/c = 2\xi T = T_1$, $1/c = K_{ст}$, тоді

$$T_2^2 y'' + T_1 y' + y = F\,(1/c) = FK_{ст} \qquad (4.5)$$

де $T = T_2 = 1/\omega_0 = (m/c)^{0,5}$ – інерційна постійна часу, с;
$\omega_0 = (c/m)^{0,5} = 2\pi f_0$ – колова власна частота коливань, $с^{-1}$;
f_0 – власна частота коливань системи, Гц;
$T_0 = 1/f_0 = 2\pi/\omega_0$ – період власних коливань системи, с;

T_1 – постійна часу демпфування, с;
$\xi = h/h_{крит}$ – відносний коефіцієнт демпфування;
$\lambda = 2\pi\xi$ – логарифмічний декремент затухання коливань - це фізична величина, зворотна числу коливань, після закінчення яких амплітуда А зменшується в е раз.
$K_{ст}$ – статична характеристика (податливість) системи, мм/Н;

Динамічні характеристики пружних систем з одним ступенем вільності

$$\lambda = ln\frac{A_n}{A_{n+1}} \approx \frac{1}{k} ln\frac{A_n}{A_{n+k}} \qquad T = T_2 = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{2\pi f_0}$$

$$T_1 = 2\xi T = \frac{\lambda}{2\pi^2 f_0} \qquad \xi = \frac{\lambda}{2\pi} \qquad h = cT_1$$

Після перетворення рівняння (4.5) матиме вигляд:

$$\mathrm{T}^2\mathrm{y}'' + 2\xi T y' + y = K_{\text{ст}}F \quad \text{або} \quad \mathrm{T}_2^2\mathrm{y}'' + \mathrm{T}_1 y' + y = K_{\text{ст}}F \qquad (4.6)$$

Перший варіант диференціального рівняння (4.6) може бути представлений у операторній формі введенням символів операції диференціювання по часу: d/dt ≡ p; d^2/dt^2 ≡ p^2.

Тоді: dy/dt ≡ yp; d^2y/dt^2 ≡ yp^2. Таке представлення дає можливість винести змінну з похідних:

$$\mathrm{y}(\mathrm{T}^2\mathrm{p}^2 + 2\xi T\mathrm{p} + 1) = K_{\text{ст}}F \qquad (4.7)$$

Динамічні характеристики пружних систем з одним ступенем вільності

В динаміці машин широко використовують поняття та математичний апарат теорії автоматичного управління та поняття «чорного ящика» (рис. 4.6). Фізичну величину, що характеризує вплив на пружну систему машини (силу), називають вхідною, а результат впливу – вихідною (координатою: деформацією, зміщенням).

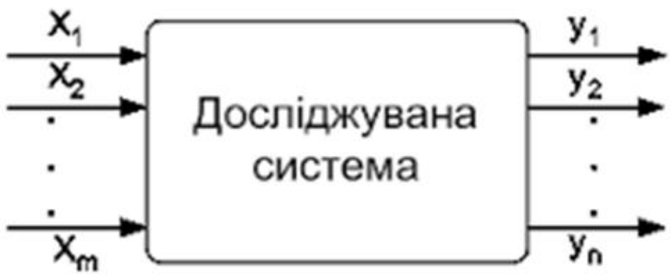


Рис. 4.4. Пружна система машини, як «чорний ящик»

Передаточна функція елемента або системи є відношення вихідної координати $x_{вих}$ до вхідної $x_{вхід}$, записане в операторній формі (для даного випадку пружного переміщення y до сили F):

$$W(p) = \frac{x_{\text{вих}}}{x_{\text{вхід}}} = \frac{y(p)}{F(p)} = \frac{K_{\text{ст}}}{T^2 \mathrm{p}^2 + 2\xi T \mathrm{p} + 1} \qquad (4.8)$$

В усталеному режимі (p=0) передаточна функція переходить у статичну характеристику (статичну податливість системи) $K_{ст} = y/F$.

Перехідна, або часова, функція характеризує перехідний процес, що виникає після миттєвого впливу на систему постійної сили *F*, і визначається рішенням рівняння (4.7). Загальне рішення цього рівняння отримують сумуванням рішення однорідного рівняння (без правої частини) і часткового рішення неоднорідного рівняння. Рішенням однорідного рівняння

$$\mathrm{T}^2\mathrm{y}'' + 2\xi T y' + y = 0 \quad \text{або} \quad \mathrm{y}(\mathrm{T}^2\mathrm{p}^2 + 2\xi T\mathrm{p} + 1) = 0$$

є вираз $y = Ce^{pt}$

Де корені характеристичного рівняння: $p_{1,2} = \frac{1}{T}(\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1})$

З врахуванням коренів характеристичного рівняння рішенням однорідного рівняння є: $y_{\text{одн}} = \mathrm{C}_1 e^{p_1 t} + \mathrm{C}_2 e^{p_2 t}$

де C_1, C_2 – постійні інтегрування, які визначаються з начальних умов.

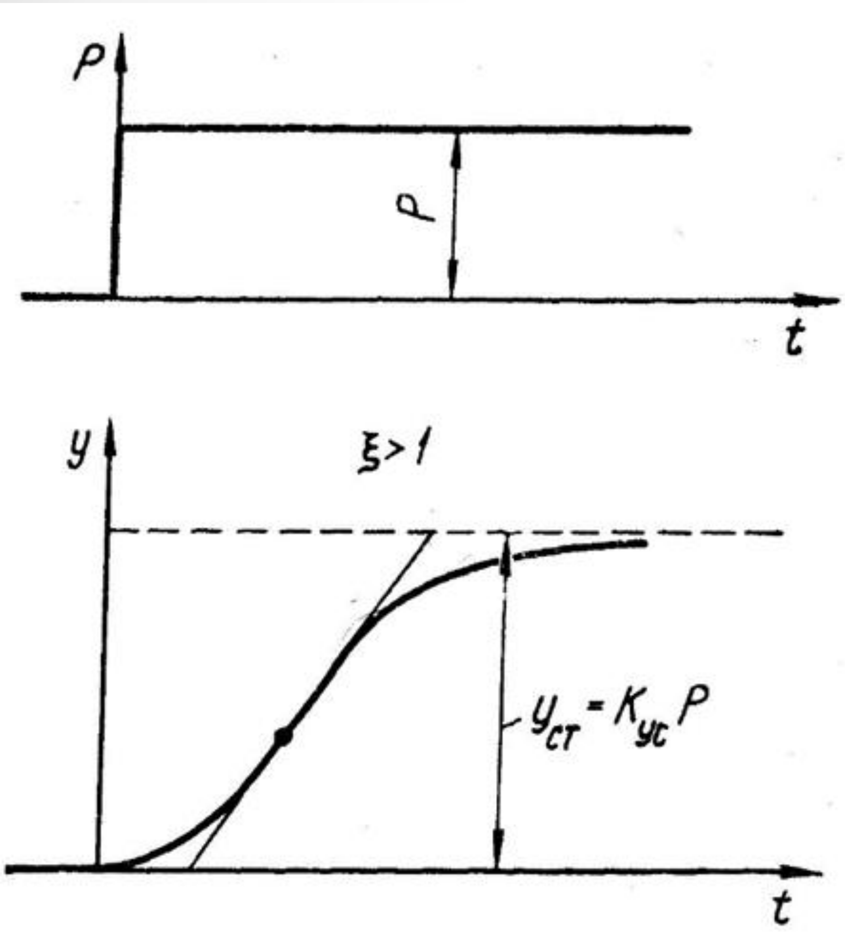
Часткове рішення лінійного неоднорідного рівняння (4.7) при $p = 0$:

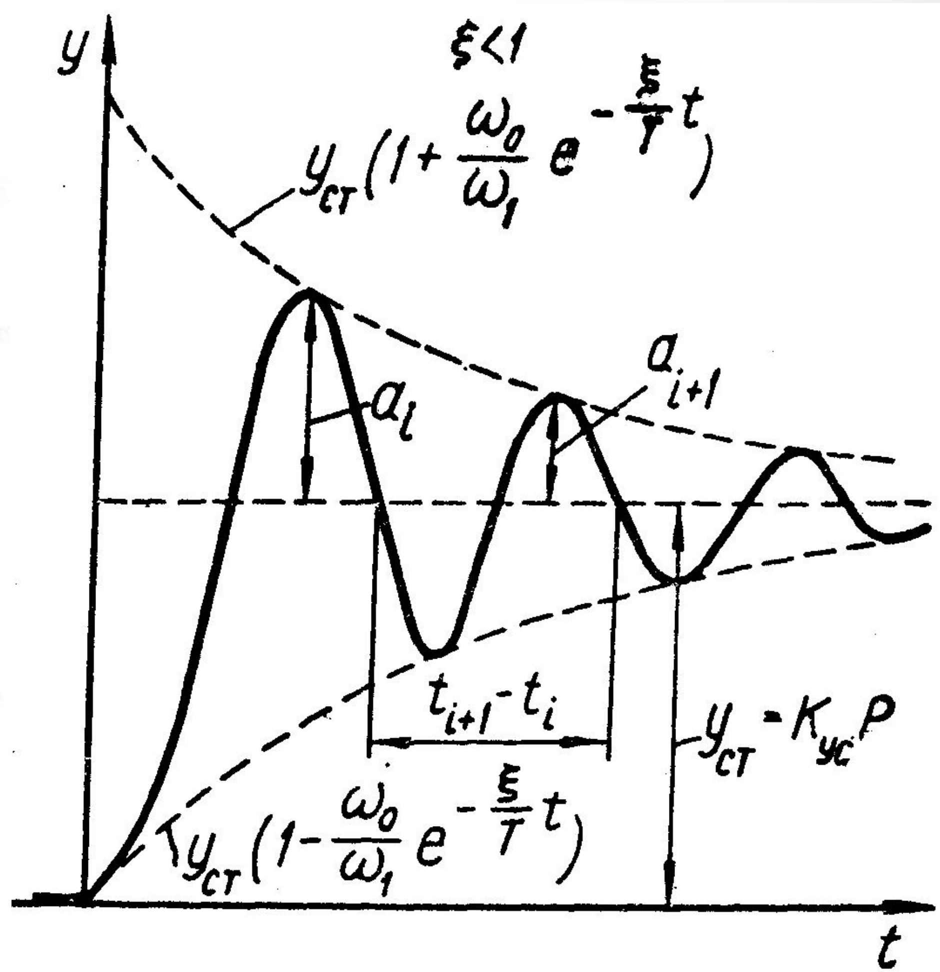
$y_ч = K_{ПС}F = y_{ст}$, де $y_{ст}$ усталене значення координати *y*.

Тоді загальне рішення диференційного рівняння (4.7):

$$y = y_{\text{ст}} + \mathrm{C}_1 e^{p_1 t} + \mathrm{C}_2 e^{p_2 t}$$

Динамічні характеристики пружних систем з одним ступенем вільності





а) б)

Рис. 4.5. Графіки перехідних процесів одномасової системи

Динамічні характеристики пружних систем з одним ступенем вільності

Після визначення з початкових умов значень *C_0* та *φ* перехідна функція прийме вигляд:

$$y = K_{ст}F(1 - \frac{\omega_0}{\omega_1}e^{-\frac{\xi t}{T}}\sin(\omega_1 t + arctg\frac{\omega_1 T}{\xi})) \quad (4.13)$$

З рівняння (4.8) шляхом заміни оператора диференціювання *d/dt ≡ p* на *jω* також можна отримати частотну передаточну функцію (j = $\sqrt{-1}$, *j^2 = -1*):

$$W(\omega j) = \frac{K_{ст}}{1 - T^2\omega^2 + j2\xi T\omega} \quad (4.14)$$

Після перетворень це рівняння може бути представлено у вигляді:

$$W(\omega j) = Re(\omega) + jIm(\omega) \quad (4.15)$$

де

$$Re(\omega) = \frac{K_{ст}(1 - T^2\omega^2)}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2} \quad (4.16)$$

$$Im(\omega) = -\frac{K_{ст}(2\xi T\omega)}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2} \quad (4.17)$$

Динамічні характеристики пружних систем з одним ступенем вільності

Тоді відношення амплітуд вихідної координати до вхідної (динамічна податливість) визначається за формулою:

$$A(\omega) = \sqrt{Re^2 + Im^2} = \frac{K_{\text{ст}}}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}} \qquad (4.18)$$

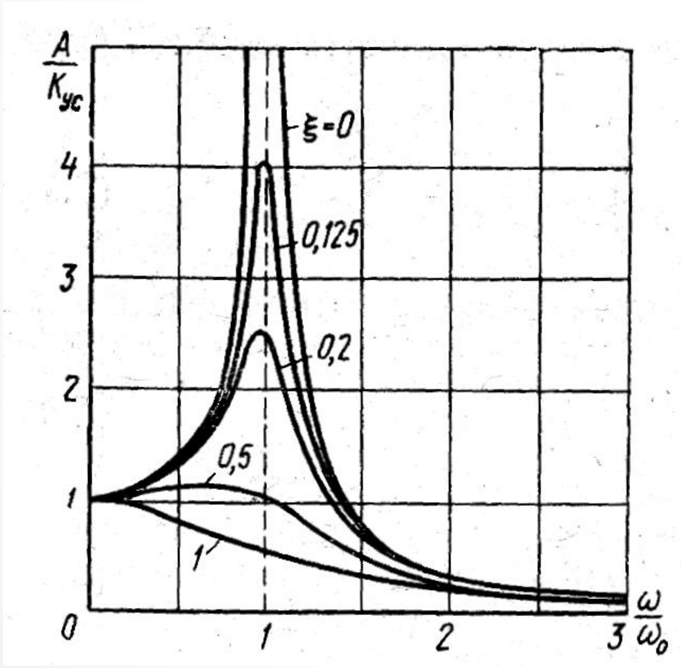
А фазовий кут:

$$\varphi(\omega) = arctg\frac{Im}{Re} = -arctg\frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2} \qquad (4.19)$$

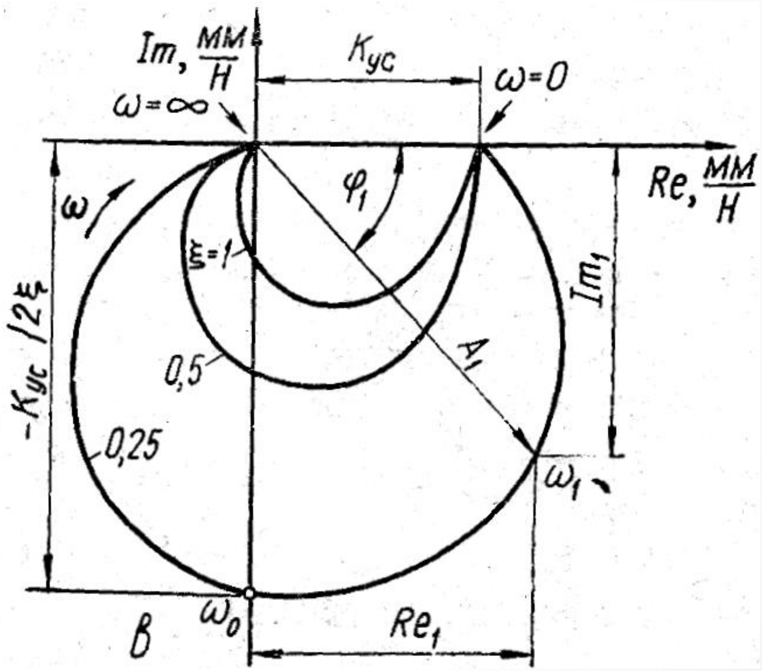
Наглядно їх зміну можна побачити на графіках частотних характеристик одномасової коливальної системи (4.6)

Динамічні характеристики пружних систем з одним ступенем вільності

На рис. 4.6. представлено графіки частотних характеристик одномасової коливальної системи: амплітудно-частотна характеристика (рис. 4.6., а) – залежність відношення $A/K_{ст}$ до відношення частот ω/ω_0 та амплітудно-фазова частотна характеристика (рис. 4.6., б) – залежність амплітуди та фази вихідної координати y від вхідної F при різних значеннях частоти ω.



а)



б)

Рис. 4.6. Частотні характеристики одномасової системи

Поняття про коефіцієнт динамічності

Внаслідок динамічних процесів, що відбуваються при роботі механізмів машини, деформація пружних елементів $y_{дин}$, викликані динамічним навантаженням, відрізняється від деформації $y_{стат}$, що виникла б у випадку прикладення статичного навантаження тієї ж величини.

Відношення $y_{дин}$ / $y_{стат}$ називають коефіцієнтом динамічності.

Для одномасової пружної системи відношення амплітуди $y_{дин}$ усталених коливань до переміщення $y_{стат}$, викликане статичним прикладенням сили F_0 тієї ж величини, є коефіцієнт динамічності системи:

$$К_{дин} = \frac{y_{дин}}{y_{стат}} = \frac{A(\omega)}{К_{ПС}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{\omega}{\omega_0^2}^2)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega}{\omega_0^2}^2}} \qquad (4.20)$$

де ω_0 – колова власна частота коливань., рад; ξ – відносний коефіцієнт демпфування.;

Під час резонансу ($\omega=\omega_0$): $К_{дин} = 1/(2\xi)=\pi/\lambda$;

Динамічні характеристики пружних систем з одним ступенем вільності

Для випадку крутильних коливань в системі з одним ступенем вільності (рис. 4.7) диференціальне рівняння руху коливальної системи (з малим демпфуванням: $\xi \ll 1$) на яку діє зовнішній змінний крутний момент M (t) матиме вигляд:

$$\mathrm{I}\varphi'' + h'\varphi^{'} + c\varphi = M(t) \qquad (4.21)$$

де *I* – момент інерції диска (момент інерції вала відносно центральної осі становить $mR^2/2$); *h* – коефіцієнт демпфування коливань (розсіювання енергії) *φ* – кут закручування валу, *φ’* – кутова швидкість *ω* диску, *φ″* – кутове прискорення маси диску, спрямоване завжди в сторону нейтрального положення, $\mathrm{c} = G\frac{\mathrm{I_p}}{L}$. I_p – полярний момент інерції перерізу вала. Для вільних коливань валу без демпфування (ω_0 – частота вільних крутних коливань валу):

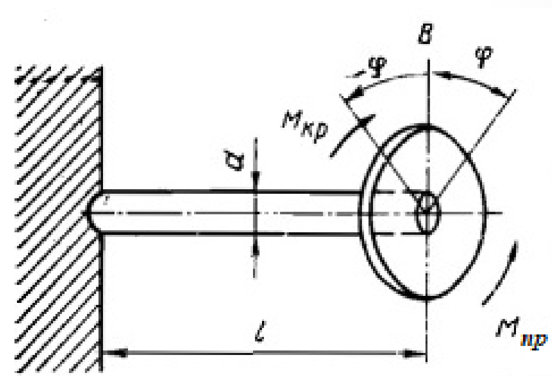
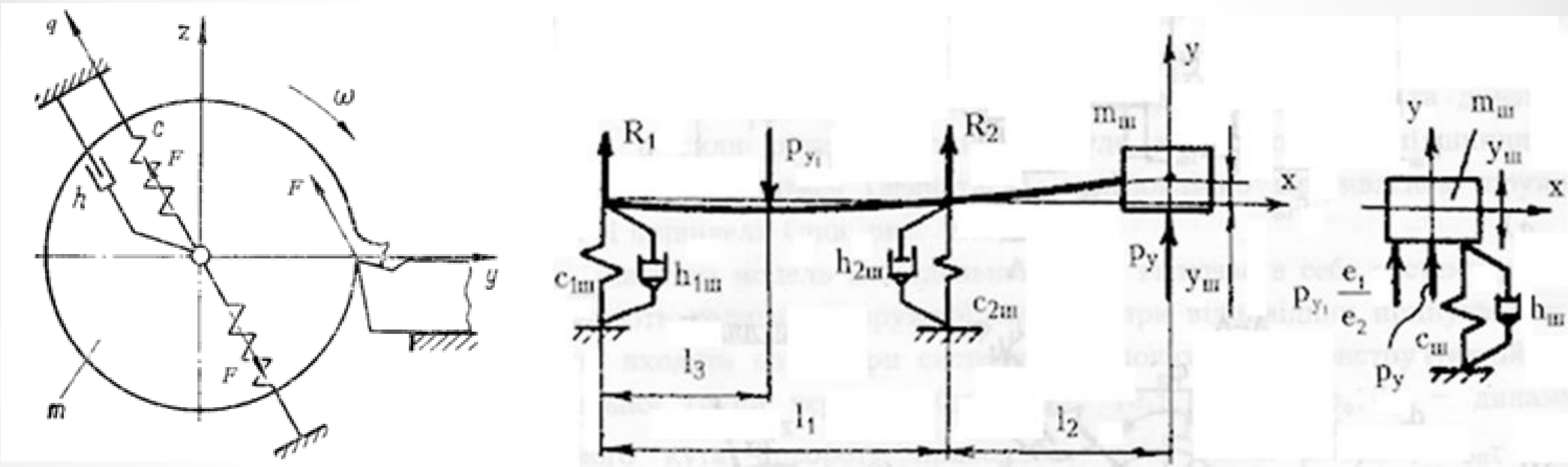


Рис. 4.7. Крутильні коливання пружного валу з масивним диском

$$\varphi'' + \omega_0^2\varphi = 0 \qquad (4.\ 22)$$

Динамічні характеристики пружних систем з одним ступенем вільності



а) б)

Рис. 4.8. Спрощені схеми обробної системи з одним ступенем вільності

Динамічні характеристики пружних систем з одним ступенем вільності

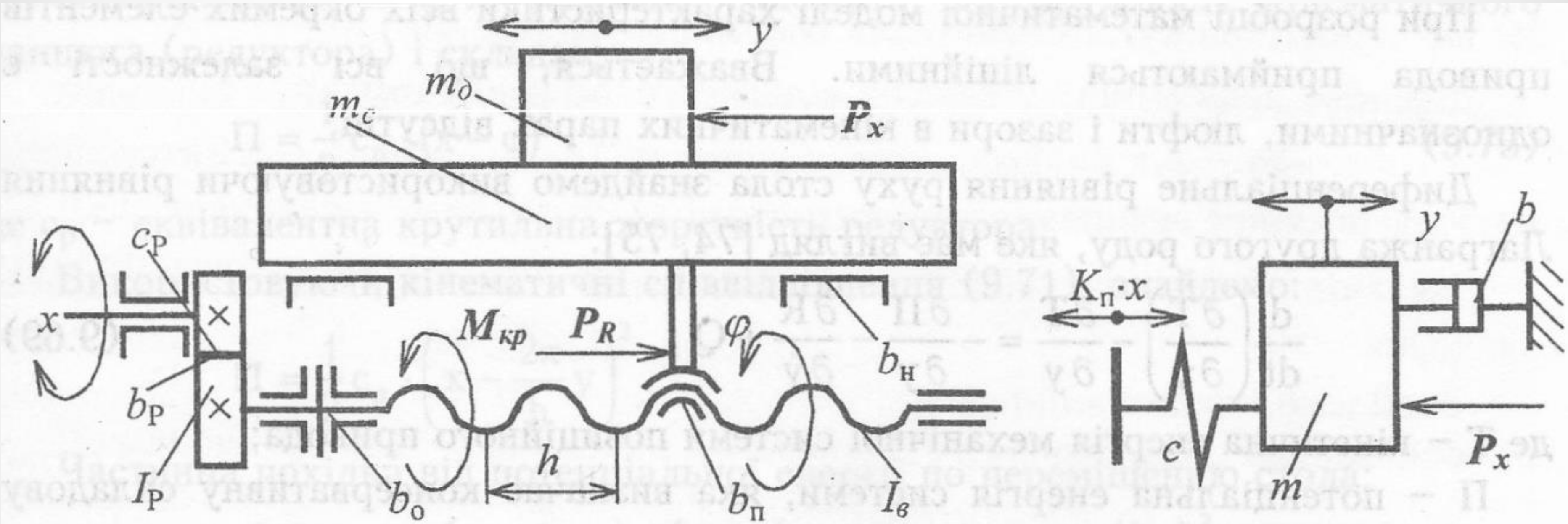


Рис. 4.9. Схема позиційного приводу з передачею гвинт-гайка (а) та його динамічна модель (б).