

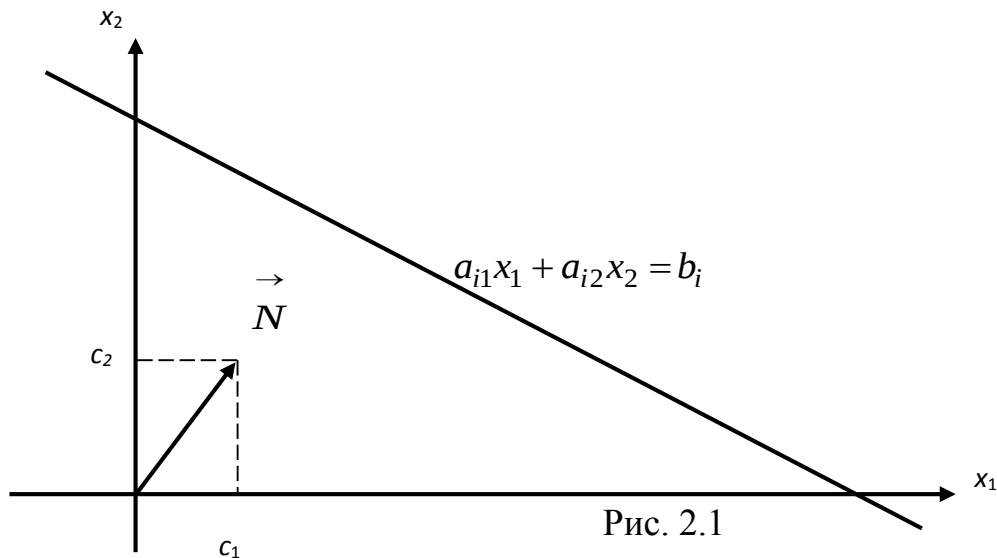
2.2. Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування (ЗЛП)

$$Z = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow extr$$

[illegible]

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

1.2) Визначаємо півплощини, які є розв'язками нерівностей. Для цього беремо координати точки з довільної півплощини і підставляємо в нерівність. Якщо нерівність справджується, то півплощина розв'язків направлена в сторону вибраної точки, якщо ж не справджується, то в протилежну сторону.



1.3) Знаходимо область, де перетинаються всі півплощини розв'язків – многокутник розв'язків. Якщо перетин – непорожня множина, то переходимо до наступного етапу. В протилежному випадку робимо висновок, що задача не має розв'язку.

2) Будуємо вектор нормалі $\vec{N}$, початок якого знаходиться в точці (0,0), а кінець в точці (c_1, c_2) (коефіцієнти при невідомих в цільовій функції). Вектор нормалі вказує напрямок зростання функції.

3) Перпендикулярно до вектору нормалі будуємо лінію рівнів $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const.}$ Для зручності знаходження оптимальних точок лінію рівнів будуємо так, щоб вона мала спільні точки з многокутником розв'язків перетинала многокутник розв'язків).

4) Визначаємо оптимальні точки. Для цього лінію рівнів паралельно переносимо в напрямку вектору нормалі. Остання вершина многокутника, яку перетне лінія рівнів, буде точкою максимуму. Потім лінію рівнів паралельно переносимо в напрямку, протилежному напрямку вектора нормалі. Остання вершина многокутника розв'язків, яку перетне лінія рівнів в цьому випадку, є точкою мінімуму.

5) Знаходимо найбільше та найменше значення функції Z . Для цього підставимо координати оптимальних точок, знайдених шляхом розв'язування систем рівнянь граничних прямих (перетином яких є оптимальна точка), в цільову функцію.

Приклад розв'язання ЗЛП графічним методом

Для виготовлення двох видів продукції P_1 і P_2 використовують 4 виду ресурсів: S_1, S_2, S_3, S_4 . Запаси ресурсів, число одиниць ресурсів, що витрачені на виготовлення одиниці продукції, наведені в таблиці 2.1:

Таблиця 2.1

Вихідні дані

Вид ресурсу	Запас ресурсу	Число одиниць ресурсу, витрачених на виготовлення одиниці продукції	
		P_1	P_2
S_1	18	1	3
S_2	16	2	1
S_3	5	0	1
S_4	21	3	0
Прибуток, одержуваний від продажу одиниці продукції, тис. грн		2	3

Необхідно скласти такий план виробництва продукції, за якого прибуток від її реалізації був б максимальним. Необхідно.

1. Записати математичну модель прямої задачі.
2. Розв'язати задачу графічним методом

Розв'язок

1) Формалізована математична модель прямої задачі:

x_1 і x_2 – число одиниць продукції видів P_1 и P_2 відповідно, запланованих до випуску	
а) $z=2x_1+3x_2 \rightarrow \max$	
б)	$\begin{cases} x_1+3x_2 \leq 18 \\ 2x_1+x_2 \leq 16 \\ x_2 \leq 5 \\ 3x_1 \leq 21 \end{cases}$
в) $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$	

Розв'язання

б)	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ x_2 \leq 5 \\ 3x_1 \leq 21 \end{cases}$
в)	$\begin{aligned} x_1 &\geq 0, \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$

$$x_1 + 3x_2 = 18 \text{ (I)}$$

$$2x_1 + x_2 = 16 \text{ (II)}$$

$$x_2 = 5 \text{ (III)}$$

$$3x_1 = 21 \text{ (IV)}$$

$$x_1 = 0 \text{ (V)}$$

$$x_2 = 0 \text{ (VI)}$$

ЗЛП зводиться до розв'язку задачі, у якому кожній лінійній нерівності відповідає якась півплощина. Перетинання цих півплощин є опуклий багатокутник. Область припустимих розв'язків визначимо, побудувавши граничні прямі:

І). Потім будуємо лінію нульового рівня $2x_1 + 3x_2 = 0$ і градієнт $N = \{2; 3\}$. Направлення градієнта вказує на направлення зростання цільової функції.

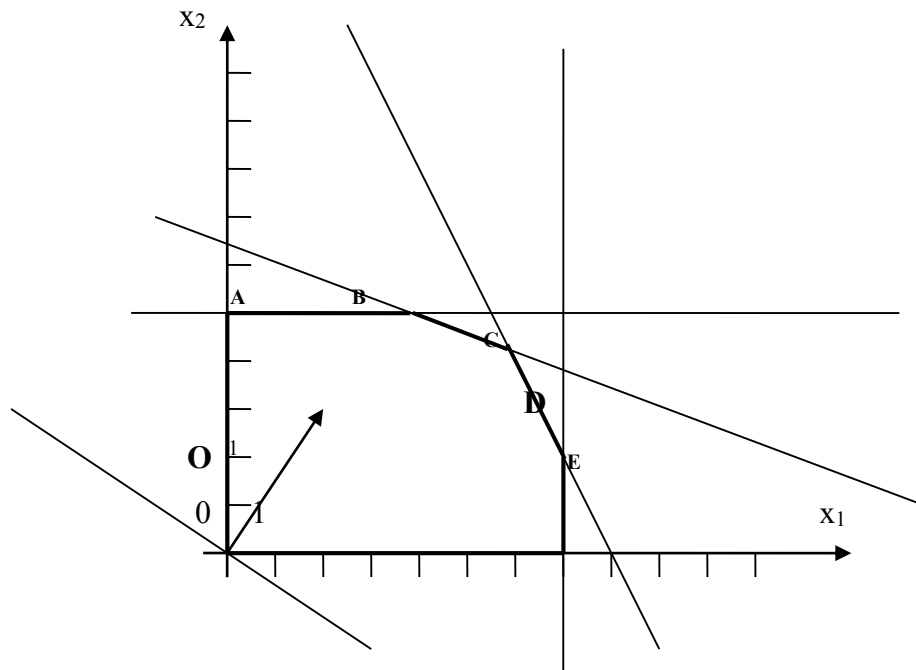


Рис. 2.2.

$Z_{\max} = Z(C)$, де C – точка перетинання прямих I и II.

Координати точки C знайдемо, розв'язавши систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 18 \\ 2x_1 + x_2 = 16; C(6; 4) \end{cases}$$

$$Z(C) = 2 \times 6 + 3 \times 4 = 24; Z_{\max} = 24.$$

$Z_{\min} = Z(O)$, где O – початок системи координат.

$$Z(O) = 2 \times 0 + 3 \times 0 = 0; Z_{\min} = 0.$$

Отже, при оптимальному розв'язанні (плані) $x_1 = 6$, $x_2 = 4$, $Z_{\max} = 24$, а при оптимальному розв'язанні (плані) $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $Z_{\min} = 0$.