

оптимізаційних розрахунків

План

3.1. Двоїстість в задачах лінійного програмування: правила побудови двоїстих задач та їх основні класи	1
3.2. Основні теореми двоїстості	3
3.3. Економіко-математичний аналіз оптимальних розрахунків	4

3.1. Двоїстість в задачах лінійного програмування: правила побудови двоїстих задач та їх основні класи

Кожній задачі лінійного програмування відповідає двоїста, яка формується за допомогою певних правил безпосередньо з умов прямої задачі. Нехай задача лінійного програмування має вигляд:

знайти максимум функції

$$Z = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n, \rightarrow \max \quad (3.1)$$

За умов

[illegible]

Побудова двоїстої задачі лінійного програмування здійснюється за такими правилами:

1. Кожному основному обмеженню початкової задачі ставимо у відповідність двоїсту змінну: першому обмеженню - y_1 , другому - y_2 , m -му - y_m . Кількість невідомих двоїстої задачі дорівнює кількості основних обмежень прямої задачі лінійного програмування:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m, \end{array} \right| y_i$$

2. Щоб записати цільову функцію двоїстої задачі, потрібно праві частини основних обмежень початкової задачі почленно перемножити на двоїсті змінні,

що відповідають кожному з цих обмежень і додати. Отже, коефіцієнтами при невідомих в цільовій функції двоїстої задачі є праві частини основних обмежень прямої задачі. Вільний член цільової функції прямої задачі переноситься без змін в цільову функцію двоїстої.

3. Напрямок оптимізації двоїстої задачі змінюється на протилежний. Якщо цільова функція початкової задачі досліджується на максимум, то двоїстої – на мінімум, і навпаки.

Таким чином, отримуємо наступний вигляд цільової функції двоїстої задачі:

$$Z^* = c_0 + b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m, \rightarrow \min$$

4. Обмеження двоїстої задачі формуємо таким чином: коефіцієнти при невідомій кожного основного обмеження системи (3.2) почленно множимо на відповідні двоїсті змінні і додаємо. В результаті отримуємо ліві частини обмежень двоїстої задачі: $a_{1j} y_1 + a_{2j} y_2 + \dots + a_{mj} y_m$. Правими частинами обмежень двоїстої задачі є коефіцієнти при невідомій x_j в цільовій функції початкової задачі (c_j). Отже, кількість змінних прямої задачі дорівнює кількості основних обмежень двоїстої.

5. Знак в обмеженнях міняється на протилежний. Тобто, враховуючи, що в основних обмеженнях початкової задачі знак нерівності « $\leq$ », то в обмеженнях двоїстої задачі знак нерівності буде « $\geq$ ».

6. Матриця

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

що складається із коефіцієнтів при невідомих в системі обмежень прямої задачі, і матриця коефіцієнтів при невідомих системи обмежень двоїстої задачі лінійного програмування

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

утворюються одна з одної транспонуванням, тобто заміною рядків стовпчиками, а стовпчиків – рядками.

Цільова функція:

за умов:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \geq c_2, \\ \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \geq c_n, \\ y_i \geq 0, i = \overline{1, m}. \end{array} \right.$$

Економічний зміст першої теореми двоїстості такий: план виробництва X та набір цін (оцінок) ресурсів Y будуть оптимальними тоді і тільки тоді, коли загальний дохід (прибуток) від реалізації продукції збігається із затратами на ресурси за «внутрішніми» цінами, що визначені під час розв'язку задачі на ресурси.

Цей зміст можна інтерпретувати і таким чином: підприємству байдуже, чи виробляти продукцію за оптимальним планом $X=(x_1, \dots, x_n)$ і отримати максимальний дохід (прибуток), чи продати ресурси виробництва за оптимальним планом (ціною на ресурси) $Y=(y_1, \dots, y_m)$.

Друга теорема двоїстості. Якщо в результаті підстановки оптимального плану прямої задачі в систему обмежень цієї задачі i -те обмеження виконується як строга нерівність, то відповідний i -ий компонент оптимального плану двоїстої задачі дорівнює нулю.

Якщо i -ий компонент оптимального плану однієї з пари двоїстих задач додатний, то відповідне i -те обмеження другої задачі виконується для оптимального плану як рівняння.

Економічний зміст другої теореми двоїстості щодо оптимального плану $X=(x_1, \dots, x_n)$ прямої задачі. Якщо для виготовлення усієї продукції в обсязі, що визначається оптимальним планом X , витрати i -го ресурсу строго менші, ніж його загальний обсяг b_i , то відповідна оцінка такого ресурсу y_i (змінна оптимального плану двоїстої задачі) дорівнюватиме нулю, тобто такий ресурс за даних умов для виробництва не є «цінним» («дефіцитним»). Якщо ж витрати ресурсу дорівнюють його наявному обсягові b_i , тобто його використано максимально, то він є «цінним» («дефіцитним») для виробництва, і його оцінка буде строго більшою за нуль.

Економічний зміст другої теореми двоїстості щодо оптимального плану $Y=(y_1, \dots, y_m)$ двоїстої задачі. У разі, коли деяке j -те обмеження виконується як нерівність, тобто усі витрати на виробництво одиниці j -го виду продукції перевищують її ціну c_j , виробництво такого виду продукції є недоцільним, і в оптимальному плані прямої задачі обсяг такої продукції x_j дорівнює нулю.

Якщо витрати на виробництво j -го виду продукції дорівнюють ціні одиниці продукції c_j , то її необхідно виготовляти в обсязі, який визначає оптимальний план прямої задачі $x_j > 0$.

Третя теорема двоїстості. Значення двоїстих змінних характеризує приріст цільової функції, який зумовлений малими змінами вільного члена відповідного обмеження.

Двоїсті оцінки є унікальним інструментом, який дає змогу зіставляти непорівнювані речі. Наприклад неможна зіставляти величини, що мають різні одиниці вимірювання. Як приклад можна взяти виробничу задачу, і спробувати з'ясувати як змінюватиметься значення цільової функції (може вимірюватися в грошових одиницях) за зміни обсягів різних ресурсів, які можуть вимірюватися в тонах, метрах, людино-годинах тощо.

3.3. Економіко-математичний аналіз оптимальних розрахунків

Для виробництва n видів продукції використовується m видів ресурсів, запаси яких обмежені значеннями $b_i (i = \overline{1, m})$. Норма витрат кожного виду ресурсу на одиницю продукції становить $a_{ij} (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$. Дохід від одиниці продукції j -го виду дорівнює $c_j (j = \overline{1, n})$. Знайти план виробництва продукції, що забезпечить максимальний сумарний дохід.

[illegible]

Двоїста задача до окресленої задачі матиме вигляд:

$$Z^* = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m, \rightarrow \min$$

[illegible]

Економічний зміст двоїстої задачі полягає в тому, щоб визначити таку оптимальну систему двоїстих оцінок y_i ресурсів, які використовуються для виробництва продукції, за яких загальна вартість усіх ресурсів буде найменшою. Оскільки двоїсті змінні означають цінність одиниці ресурсу, то їх інколи ще називають *тіньовою ціною відповідного ресурсу*.

За допомогою двоїстих оцінок можна визначити статус кожного ресурсу прямої задачі та рентабельність продукції, що виготовляється.

Ресурси, що використовуються для виробництва продукції, умовно можна поділити на дефіцитні та недефіцитні, залежно від того, повне чи часткове їх використання передбачено оптимальним планом прямої задачі. Якщо двоїста оцінка u_i в оптимальному плані двоїстої задачі дорівнює нулю, то відповідний i -тий ресурс при виробництві оптимальних обсягів продукції повністю не використовується і є **недефіцитним**. Якщо ж двоїста оцінка $u_i > 0$, то i -тий ресурс використовується повністю для оптимального плану виробництва продукції і називається **дефіцитним**. В цьому випадку величина двоїстої оцінки показує, наскільки збільшиться значення цільової функції Z , якщо запас відповідного ресурсу збільшити на одиницю.

Аналіз *рентабельності продукції*, що виготовляється, виконується за допомогою двоїстих оцінок і обмежень двоїстої задачі. Ліва частина кожного обмеження є вартістю всіх ресурсів, які використовуються для виробництва одиниці j -тої продукції. Якщо ця величина перевищує дохід від одиниці продукції (c_j), то виготовляти цю продукцію не вигідно, вона нерентабельна і в оптимальному плані прямої задачі відповідна $x_j = 0$. Якщо ж загальна оцінка всіх ресурсів дорівнює доходу від одиниці продукції, то виготовляти таку продукцію доцільно, вона рентабельна і в оптимальному плані прямої задачі відповідна змінна $x_j > 0$.