

## Лабораторна робота 1.

### 1. Розв'язування транспортних задач

#### 1.1. Загальна постановка транспортних задач

Транспортні задачі є одними із найбільш розповсюджених задач та знаходять широке практичне застосування. Під **транспортними задачами** розуміють цілий ряд задач, що мають певну специфічну структуру. Найбільш простими транспортними задачами є задачі про перевезення деякого продукту з пунктів відправлення до пунктів призначення при мінімальних витратах на перевезення.

В загальній постановці транспортні задачі є наступними.

Деякий однорідний продукт, що зосереджений у  $m$  постачальників  $A_i$  в кількості  $a_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) одиниць, необхідно доставити  $n$  споживачам  $B_j$  в кількості  $b_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) одиниць. Відома вартість  $c_{ij}$  перевезення одиниці вантажу від  $i$ -го постачальника до  $j$ -го споживача.

Необхідно знайти схему (або план) оптимальних перевезень із мінімальними транспортними витратами для вивезення всіх вантажів та повного забезпечення потреб у вантажі всіх споживачів.

#### 1.2. Короткі теоретичні відомості та математичне моделювання транспортних задач

Існує три типи транспортних задач:

**I тип** – так звані **транспортні задачі закритого типу**, в яких передбачається, що **сумарні запаси**  $\sum_{i=1}^m a_i$  дорівнюють **сумарним потребам**

$\sum_{j=1}^n b_j$  всіх споживачів:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j ;$$

**II тип** – так звані **транспортні задачі відкритого типу**, в яких передбачається, що **сумарні запаси**  $\sum_{i=1}^m a_i$  можуть перевищувати **сумарні**

**потреби**  $\sum_{j=1}^n b_j$  всіх споживачів:

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^m b_j ;$$

**III тип** – так звані **транспортні задачі відкритого типу** в яких передбачається, що **сумарні потреби**  $\sum_{j=1}^m b_j$  всіх споживачів можуть

перевищувати **сумарні запаси**  $\sum_{i=1}^m a_i$  :

$$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^m b_j .$$

Відкриті транспортні задачі розв'язуються шляхом приведення їх до закритих.

Цільова функція задач – мінімальна вартість плану перевезень, може бути записана наступним виразом:

$$f(x) = \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \right) \rightarrow \min , \quad (1.1)$$

де  $x_{ij}$  – кількість одиниць вантажу, запланованого до перевезення від  $i$ -го постачальника до  $j$ -го споживача;

$c_{ij}$  – витрати на перевезення одиниці вантажу від  $i$ -го постачальника до  $j$ -го споживача;

$c_{ij} \cdot x_{ij}$  – вартість перевезення  $x_{ij}$  одиниць вантажу від  $i$ -го постачальника до  $j$ -го споживача.

Система обмежень отримується із наступних умов задачі:

1. всі вантажі повинні бути перевезені, тобто

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = \overline{1, m}, \quad (1.2)$$

де  $a_i$  – кількість одиниць продукції, що зосереджений у  $i$ -го постачальника;

2. всі вимоги споживачів повинні бути задоволені, тобто

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = \overline{1, n}, \quad (1.3)$$

де  $b_j$  – кількість одиниць продукції, яку необхідно доставити  $j$ -му споживачу.

Таким чином, загальний формалізований опис задачі може бути представлений виразами (1.1) – (1.3), а її короткий зміст сформульований наступним чином:

знайти мінімальне значення цільової функції за виразом (1.1) при обмеженнях на перевезення вантажів за виразом (1.2) та обмеженнях на задоволення вимог споживачів за виразом (1.3) з врахуванням типу транспортної задачі.

Так для транспортної задачі **I типу**, в якій передбачається, що сумарні запаси дорівнюють сумарним потребам всіх споживачів  $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{i=1}^m b_j$ , загальна математична модель має вигляд:

$$f(x) = \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \right) \rightarrow \min ;$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = \overline{1, m}; \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = \overline{1, n}; \\ x_{ij} \geq 0, i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (1.4)$$

Для транспортної задачі **II типу**, в якій передбачається, що сумарні запаси можуть перевищувати сумарні потреби всіх споживачів  $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{i=1}^m b_j$ , загальна математична модель має вигляд:

$$f(x) = \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \right) \rightarrow \min ;$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, i = \overline{1, m}; \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = \overline{1, n}; \\ x_{ij} \geq 0, i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (1.5)$$

Для вирішення задачі цього типу необхідно додатково ввести одного фіктивного споживача  $B_{n+1}$ , потреби якого становлять  $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$ . При цьому вартість перевезення одиниці вантажу до фіктивного споживача дорівнює нулю, тому що вантаж насправді не перевозиться.

Для транспортної задачі **III типу**, в якій передбачається, що сумарні потреби всіх споживачів можуть перевищувати сумарні запаси  $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{i=1}^m b_j$ , загальна математична модель має вигляд:

$$f(x) = \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \right) \rightarrow \min ;$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = \overline{1, m}; \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j, j = \overline{1, n}; \\ x_{ij} \geq 0, i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (1.6)$$

Для розв'язування задачі цього типу необхідно додатково ввести одного фіктивного постачальника  $A_{m+1}$ , запаси якого становлять  $a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$ . При цьому вартість перевезення одиниці вантажу від фіктивного постачальника дорівнює нулю, тому що вантаж насправді не перевозиться.

### 1.3. Приклад розв'язування транспортної задачі



Деякий однорідний вантаж перевозиться від чотирьох постачальників чотирьом споживачам із певними транспортними витратами. Необхідно знайти оптимальний план перевезень, тобто маршрут, який визначає, від якого постачальника яким споживачам і в якій кількості необхідно перевозити вантаж, щоб загальні транспортні витрати були мінімальними. При цьому передбачається, що сумарні запаси вантажу дорівнюють сумарним потребам споживачів.

Вихідні дані задачі приведені у табл.1.1.

Таблиця 1.1

## Вихідні дані для вирішення транспортної задачі

№ з/п поставальника	Об'єм вантажу у поставальника, тис. одиниць	№ з/п споживача				Сумарний об'єм вантажу, тис. одиниць
		1	2	3	4	
		Об'єм замовленого вантажу споживачем, тис. одиниць				
		250	100	150	50	550
1	80	6	6	1	4	Витрати на перевезення одиниці вантажу від <i>i</i> -го поставальника <i>j</i> -му споживачу, грн
2	320	8	30	6	5	
3	100	5	4	3	30	
4	50	9	9	9	9	
Сумарний об'єм вантажу у поставальників, тис. одиниць	550					

Розв'язок.

## 1. Математичне моделювання задачі

Вирішувана задача є транспортною задачею I типу, тому математична модель відповідає моделі (1.4).

1.1. Витрати кожного *i*-го поставальника на перевезення вантажу споживачам складають:

$$C_{\Sigma i} = \left( \sum_{j=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_j \right),$$

де  $C_{\Sigma i}$  – сумарні витрати перевезення одиниці вантажу від *i*-го поставальника до *j*-го споживача;

$x_j$  – кількість одиниць вантажу, запланованого до перевезення *j*-му споживачу;

$c_{ij}$  – витрати на перевезення одиниці вантажу від *i*-го поставальника до *j*-го споживача.

Витрати поставальника 1:

$$C_{\Sigma 1} = \sum_{j=1}^4 c_{1j} \cdot x_j = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + c_{14}x_4 = 6x_1 + 6x_2 + 1x_3 + 4x_4.$$

Витрати поставальника 2:

$$C_{\Sigma 2} = \sum_{j=1}^4 c_{2j} \cdot x_j = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + c_{24}x_4 = 8x_1 + 30x_2 + 6x_3 + 5x_4.$$

Витрати постачальника 3:

$$C_{\Sigma 3} = \sum_{j=1}^4 c_{3j} x_j = c_{31} x_1 + c_{32} x_2 + c_{33} x_3 + c_{34} x_4 = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 30x_4.$$

Витрати постачальника 4:

$$C_{\Sigma 4} = \sum_{j=1}^4 c_{4j} x_j = c_{41} x_1 + c_{42} x_2 + c_{43} x_3 + c_{44} x_4 = 9x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 9x_4.$$

1.2. Цільова функція задачі – мінімізація сумарних витрат перевезення вантажу споживачам – визначається із попередніх розрахунків сумарних витрат кожного постачальника:

$$f(x) = (C_{\Sigma 1} + C_{\Sigma 2} + C_{\Sigma 3} + C_{\Sigma 4}) = \left( \sum_{j=1}^4 (c_{1j} x_j + c_{2j} x_j + c_{3j} x_j + c_{4j} x_j) \right) \rightarrow \min$$

1.3. Формування функціональних обмежень здійснюється за виразами (1.2), (1.3).

1.3.1. Функціональні обмеження на перевезення всіх вантажів від постачальників за виразом (1.2) передбачає визначення об'єму перевезень:

– постачальника 1:

$$a_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 80 \text{ (тис. одиниць продукції);}$$

– постачальника 2:

$$a_2 = x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 320 \text{ (тис. одиниць продукції);}$$

– постачальника 3:

$$a_3 = x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 100 \text{ (тис. одиниць продукції);}$$

– постачальника 4:

$$a_4 = x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 50 \text{ (тис. одиниць продукції).}$$

1.3.2. Функціональні обмеження на задоволення потреб всіх споживачів за виразом (1.3) передбачає визначення об'єму постачання:

– споживачу 1:



	1	2	3	4	5	<b>запасів</b>
Постачальник 1	1	2	3	1	2	<b>70</b>
Постачальник 2	5	3	1	4	1	<b>80</b>
Постачальник 3	3	4	2	5	3	<b>250</b>
Постачальник 4	2	5	3	6	6	<b>180</b>
<b>Потреби</b>	<b>200</b>	<b>100</b>	<b>80</b>	<b>100</b>	<b>100</b>	
<b>Варіант 4</b>						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Споживач 5	<b>Об'єми запасів</b>
Постачальник 1	3	3	7	5	3	<b>170</b>
Постачальник 2	2	2	2	5	6	<b>180</b>
Постачальник 3	1	3	5	9	2	<b>70</b>
<b>Потреби</b>	<b>75</b>	<b>65</b>	<b>95</b>	<b>85</b>	<b>100</b>	



<b>Варіант 5</b>						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Споживач 5	Об'єми запасів
Постачальник 1	5	4	8	5	3	170
Постачальник 2	7	2	2	5	6	180
Постачальник 3	8	7	10	9	2	70
<b>Потреби</b>	<b>75</b>	<b>65</b>	<b>95</b>	<b>85</b>	<b>100</b>	
<b>Варіант 6</b>						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Споживач 5	Об'єми запасів
Постачальник 1	3	8	7	10	12	200
Постачальник 2	4	2	2	8	11	450
Постачальник 3	5	3	5	10	10	250
<b>Потреби</b>	<b>100</b>	<b>125</b>	<b>325</b>	<b>250</b>	<b>100</b>	
<b>Варіант 7</b>						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Споживач 5	Об'єми запасів
Постачальник 1	1	4	4	7	2	230
Постачальник 2	2	3	5	6	3	100
Постачальник 3	3	2	6	5	4	60
Постачальник 4	4	1	7	4	5	215
<b>Потреби</b>	<b>150</b>	<b>200</b>	<b>80</b>	<b>75</b>	<b>100</b>	
<b>Варіант 8</b>						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Споживач 5	Об'єми запасів
Постачальник 1	10	9	8	7	6	70
Постачальник 2	6	7	8	9	10	80
Постачальник 3	5	6	7	8	9	250
Постачальник 4	9	8	7	6	5	180
<b>Потреби</b>	<b>200</b>	<b>100</b>	<b>80</b>	<b>100</b>	<b>100</b>	
<b>Варіант 9</b>						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Споживач 5	Об'єми запасів
Постачальник 1	10	8	6	8	5	170
Постачальник 2	9	9	7	7	4	180
Постачальник 3	8	10	8	6	3	70
<b>Потреби</b>	<b>75</b>	<b>65</b>	<b>95</b>	<b>85</b>	<b>100</b>	

<b>Варіант 10</b>						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Споживач 5	Об'єми запасів
Постачальник 1	1	4	7	10	7	170
Постачальник 2	2	5	8	9	6	180
Постачальник 3	3	6	9	8	5	70
<b>Потреби</b>	<b>75</b>	<b>65</b>	<b>95</b>	<b>85</b>	<b>100</b>	
<b>Варіант 11</b>						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Споживач 5	Об'єми запасів
Постачальник 1	10	9	8	7	6	100
Постачальник 2	6	7	8	9	10	180
Постачальник 3	5	6	7	8	9	70
Постачальник 4	9	8	7	6	5	55
<b>Потреби</b>	<b>75</b>	<b>65</b>	<b>95</b>	<b>85</b>	<b>85</b>	
<b>Варіант 12</b>						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Споживач 5	Об'єми запасів
Постачальник 1	10	9	8	7	6	105
Постачальник 2	6	7	8	9	10	75
Постачальник 3	5	6	7	8	9	120
Постачальник 4	9	8	7	6	5	105
<b>Потреби</b>	<b>75</b>	<b>65</b>	<b>95</b>	<b>85</b>	<b>85</b>	
<b>Варіант 13</b>						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Споживач 5	Об'єми запасів
Постачальник 1	10	9	8	7	6	105
Постачальник 2	6	7	8	9	10	75
Постачальник 3	5	6	7	8	9	120
Постачальник 4	9	8	7	6	5	105
<b>Потреби</b>	<b>85</b>	<b>75</b>	<b>95</b>	<b>80</b>	<b>70</b>	
<b>Варіант 14</b>						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Споживач 5	Об'єми запасів
Постачальник 1	1	2	3	4	5	100
Постачальник 2	6	7	8	9	1	180
Постачальник 3	9	8	7	6	5	70
Постачальник 4	4	3	2	1	9	55
<b>Потреби</b>	<b>75</b>	<b>65</b>	<b>95</b>	<b>85</b>	<b>85</b>	

<b>Варіант 15</b>						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Споживач 5	Об'єми запасів
Постачальник 1	1	5	8	5	1	105
Постачальник 2	2	6	9	4	2	75
Постачальник 3	3	7	7	3	3	120
Постачальник 4	4	8	6	2	4	105
<b>Потреби</b>	<b>75</b>	<b>65</b>	<b>95</b>	<b>85</b>	<b>85</b>	
<b>Варіант 16</b>						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Споживач 5	Об'єми запасів
Постачальник 1	2	8	1	7	1	105
Постачальник 2	4	6	3	5	5	75
Постачальник 3	6	4	5	3	9	120
Постачальник 4	8	2	7	1	3	105
<b>Потреби</b>	<b>85</b>	<b>75</b>	<b>95</b>	<b>80</b>	<b>70</b>	
<b>Варіант 17</b>						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Споживач 5	Об'єми запасів
Постачальник 1	2	8	1	7	1	270
Постачальник 2	4	6	3	5	5	380
Постачальник 3	6	4	5	3	9	150
Постачальник 4	8	2	7	1	3	200
<b>Потреби</b>	<b>100</b>	<b>150</b>	<b>200</b>	<b>250</b>	<b>300</b>	
<b>Варіант 18</b>						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Споживач 5	Об'єми запасів
Постачальник 1	2	8	1	7	1	270
Постачальник 2	4	6	3	5	5	380
Постачальник 3	6	4	5	3	9	350
<b>Потреби</b>	<b>100</b>	<b>150</b>	<b>200</b>	<b>250</b>	<b>300</b>	
<b>Варіант 19</b>						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Споживач 5	Об'єми запасів
Постачальник 1	2	8	1	7	1	200
Постачальник 2	4	6	3	5	5	270
Постачальник 3	6	4	5	3	9	100
Постачальник 4	8	2	7	1	3	97
<b>Потреби</b>	<b>125</b>	<b>135</b>	<b>145</b>	<b>125</b>	<b>137</b>	

<b>Варіант 20</b>						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Об'єми запасів	
Постачальник 1	1	2	3	1	200	
Постачальник 2	5	3	1	4	100	
Постачальник 3	3	4	2	5	130	
Постачальник 4	2	5	3	6	100	
<b>Потреби</b>	<b>125</b>	<b>135</b>	<b>145</b>	<b>125</b>		
<b>Варіант 21</b>						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Споживач 5	Об'єми запасів
Постачальник 1	10	11	12	9	8	270
Постачальник 2	9	12	11	10	9	380
Постачальник 3	8	7	9	10	11	350
<b>Потреби</b>	<b>100</b>	<b>150</b>	<b>200</b>	<b>250</b>	<b>300</b>	
<b>Варіант 22</b>						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Об'єми запасів	
Постачальник 1	1	3	5	7	200	
Постачальник 2	2	5	9	3	165	
Постачальник 3	4	7	7	1	130	
Постачальник 4	6	9	5	3	100	
<b>Потреби</b>	<b>100</b>	<b>225</b>	<b>145</b>	<b>125</b>		
<b>Варіант 23</b>						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Споживач 5	Об'єми запасів
Постачальник 1	1	5	1	8	1	200
Постачальник 2	2	6	3	4	4	270
Постачальник 3	3	7	5	2	7	100
Постачальник 4	4	8	7	6	5	97
<b>Потреби</b>	<b>125</b>	<b>135</b>	<b>145</b>	<b>125</b>	<b>137</b>	
<b>Варіант 24</b>						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Об'єми запасів	
Постачальник 1	11	4	5	6	200	
Постачальник 2	3	3	3	11	100	
Постачальник 3	11	5	5	6	130	
Постачальник 4	3	7	3	11	100	
<b>Потреби</b>	<b>125</b>	<b>135</b>	<b>145</b>	<b>125</b>		

Продовж. табл. 1.2

<b>Варіант 25</b>						
	Споживач	Споживач	Споживач	Споживач	Споживач	Об'єми запасів
	1	2	3	4	5	
Постачальник 1	1	8	2	1	5	270
Постачальник 2	3	5	3	3	6	380
Постачальник 3	7	3	1	5	7	350
<b>Потреби</b>	<b>100</b>	<b>150</b>	<b>200</b>	<b>250</b>	<b>300</b>	
<b>Варіант 26</b>						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Об'єми запасів	
Постачальник 1	9	5	1	5	200	
Постачальник 2	8	4	2	6	165	
Постачальник 3	7	3	3	7	130	
Постачальник 4	6	2	4	8	100	
<b>Потреби</b>	<b>100</b>	<b>225</b>	<b>145</b>	<b>125</b>		
<b>Варіант 27</b>						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Об'єми запасів	
Постачальник 1	9	5	1	5	300	
Постачальник 2	8	4	2	6	350	
Постачальник 3	7	3	3	7	420	
<b>Потреби</b>	<b>300</b>	<b>350</b>	<b>270</b>	<b>150</b>		
<b>Варіант 28</b>						
	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3	Споживач 4	Об'єми запасів	
Постачальник 1	1	2	1	6	500	
Постачальник 2	4	5	2	7	450	
Постачальник 3	7	8	3	8	300	
Постачальник 4	9	2	4	9	150	
Постачальник 5	1	6	5	1	317	
<b>Потреби</b>	<b>147</b>	<b>700</b>	<b>530</b>	<b>190</b>		
<b>Варіант 29</b>						
	Споживач	Споживач	Споживач	Споживач	Споживач	Об'єми запасів
	1	2	3	4	5	
Постачальник 1	1	5	9	4	3	500
Постачальник 2	2	6	8	3	5	750
Постачальник 3	3	7	7	2	7	830
Постачальник 4	4	8	6	1	9	180
Постачальник 5	5	9	5	3	7	107
<b>Потреби</b>	<b>147</b>	<b>700</b>	<b>530</b>	<b>190</b>	<b>800</b>	

Закінчення табл. 1.2

<b>Варіант 30</b>						
	Споживач	Споживач	Споживач	Споживач	Споживач	<b>Об'єми запасів</b>
	1	2	3	4	5	
Постачальник 1	3	5	4	4	3	<b>500</b>
Постачальник 2	5	6	3	3	5	<b>750</b>
Постачальник 3	7	7	5	2	7	<b>830</b>
Постачальник 4	9	8	1	1	9	<b>180</b>
Постачальник 5	7	9	7	3	7	<b>107</b>
<b>Потреби</b>	<b>147</b>	<b>700</b>	<b>530</b>	<b>190</b>	<b>800</b>	