ТЕМА 2. Моделі задач лінійного програмування та методи їх розв'язування

План

2.1. Постановка задач лінійного програмування, їх моделі та основні форми
2.2. Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування
2.3. Симплекс-метод розв'язування задач лінійного програмування

2.1. Постановка задач лінійного програмування, їх моделі та основні форми

Структурні складові економічної системи мають мету (ціль) свого розвитку та функціонування. Це може бути, наприклад, отримання максимально чистого прибутку чи валового випуску, мінімізація витрат чи відходів та інше. Ступінь досягнення мети, в більшості випадків, має кількісну характеристику, тобто її можна описати математично. Нехай Z - обрана ціль .

Загальну лінійну математичну модель формалізації економічних процесів і явищ, так звану *загальну задачу лінійного програмування (ЗЛП)*, можна подати у вигляді:

знайти максимум (мінімум) функції

$$Z = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n, \to \max(\min) \quad (2.1)$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \{\leq, =, \geq\} b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \{\leq, =, \geq\} b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \{\leq, =, \geq\} b_m, \end{cases} \quad (2.2)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \quad (2.3)$$

Функцію Z називають *цільовою функцією або функцією мети*. Для економічної системи це є функція ефективності її функціонування та розвитку.

Сформулюємо загальне визначення задачі лінійного програмування таким чином:

Необхідно знайти такі значення керованих змінних x_j, щоб цільова функція при цих значеннях набувала екстремального (мінімального чи максимального) значення за виконання певної множини умов.

Отже, потрібно знайти значення змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, які задовольняють умови (2.2) і (2.3), при яких цільова функція (2.1) набуває екстремального (максимального чи мінімального) значення. Набір символів $\{\leq,=,\geq\}$ в (2.2) означає, що для деяких значень індексу і ($i=\overline{1,n}$) виконуються нерівності «≤», для інших-рівності (=), а для решти - нерівності типу «≥».

Система (2.2)-(2.3) називається ***системою обмежень*** або *системою умов* задачі. Вона описує внутрішні технологічні та економічні процеси функціонування і розвитку виробничо-економічної системи, а також процеси зовнішнього середовища, які пливають на результат діяльності системи. Для економічних систем змінні x_j мають бути невід'ємними.

Формалізований запис задачі (2.1)-(2.3) є загальною економіко-математичною моделлю функціонування умовної економічної системи. Розробляючи окреслену модель, потрібно керуватися такими правилами:

1) модель має адекватно описувати реальні економічні та технологічні процеси;

2) у моделі потрібно враховувати все істотне, суттєве в досліджуваному явищі чи процесі, відкидаючи все другорядне, неістотне;

3) модель має бути зрозумілою для користувача;

4) треба забезпечити, щоб множина наборів x_j була непустою. Для цього в економіко-математичних моделях потрібно якнайменше використовувати обмеження-рівності, а також суперечливі обмеження.

Будь-який набір змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, що задовольняє умови (2.2) та (2.3), називають ***допустимим планом*** **або** ***планом***. Очевидно, що кожний допустимий план є відповідною стратегією економічної системи, програмою дій. Кожному допустимому плану відповідає значення цільової функції, яке обчислюється за формулою (2.1).

Сукупність усіх розв'язків систем обмежень (2.2) та (2.3), тобто множина всіх допустимих планів, становить *область існування планів*.

План, за якого цільова функція набуває екстремального значення, називається *оптимальним*. Оптимальний план є розв'язком задачі математичного програмування (2.1)-(2.3).

Слід відзначити, що в задачі математичного програмування передбачається одна цільова функція, яка кількісно виражена. В реальних економічних системах на роль критерію оптимальності (ефективності) претендують багато показників. Наприклад, максимум чистого доходу від виготовленої продукції чи максимум рентабельності, мінімум собівартості виготовленої продукції або мінімум витрат дефіцитних ресурсів і т.д. Хоча загальна задача математичного програмування передбачає одну цільову функцію, але існують математичні методи побудови компромісних планів, тобто методи багатокритеріальної оптимізації.

Розглянемо найпростіші математичні моделі задач лінійного програмування (ЛП):

1) Задача про використання ресурсів (сировини).

Для виготовлення двох видів продукції ***П₁*** та ***П₂*** використовуються три види сировини ***S₁, S₂ , S₃***. Запаси сировини, норми витрат сировини на виготовлення одиниці продукції кожного виду та дохід від одиниці продукції кожного виду наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на виготовлення одиниці продукції	
		П₁	**П₂**
S₁	b_1	a_{11}	a_{12}
S₂	b_2	a_{21}	a_{22}
S₃	b_3	a_{31}	a_{32}
Дохід від одиниці продукції		c_1	c_2

Необхідно знайти такий план виробництва продукції, який забезпечить найбільший сумарний дохід.

Побудуємо математичну модель задачі. Позначимо:

x_1, x_2 – загальна кількість продукції $П_1$ та $П_2$;

Z – сумарний дохід, який отримаємо від реалізації всієї продукції $П_1$ та $П_2$.

Напишемо цільову функцію задачі. Дохід від реалізації одиниці продукції $П_1$ становить c_1, а всього цієї продукції плануємо випустити x_1 одиниць, тому перемноживши c_1 на x_1, отримаємо весь дохід, який матимемо від реалізації всієї продукції. Аналогічно дохід від реалізації продукції $П_2$ становитиме c_2x_2. Додамо ці два доданки ($c_1x_1+c_2x_2$) і отримаємо весь дохід від реалізації всієї продукції $П_1$ та $П_2$. Оскільки ми хочемо отримати найбільший дохід, то будемо знаходити максимальне значення цільової функції:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max$$

Тепер потрібно записати обмеження задачі. Нам відомо, скільки ресурсів кожного виду витрачається на виготовлення одиниці продукції кожного виду. Так, на виготовлення одиниці продукції $П_1$ ресурсу (сировини) S_1 витрачаємо a_{11}, всього продукції $П_1$ плануємо виготовити x_1 одиниць. Перемножимо a_{11} на x_1 і отримаємо ту кількість ресурсу S_1, яка піде на виготовлення всієї продукції $П_1$. Цього ж ресурсу S_1 на виготовлення одиниці продукції $П_2$ витрачаємо a_{12}, а плануємо виготовити x_2 одиниць продукції $П_2$, тому, коли перемножимо a_{12} на x_2, будемо мати кількість ресурсу S_1, витраченого на виготовлення всієї продукції $П_2$. Якщо додамо $a_{11}x_1$ та $a_{12}x_2$, то отримаємо сумарні витрати ресурсу S_1 на виготовлення всієї продукції $П_1$ та $П_2$.Але запас кожного виду ресурсу обмежений і використати більше, ніж ми маємо не можемо. Запас ресурсу S_1

становить b_1. Тому обмеження з використання ресурсу S_1 матиме вигляд: $a_{11}x_1+a_{12}x_2 \leq b_1$. Аналогічно напишемо обмеження з використання ресурсів S_2 та S_3:

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \leq b_3.$$

Очевидно, що невідомі x_1, x_2 не можуть бути від'ємними. Причому рівність нулю однієї з них означає, що даний вид продукції виготовляти недоцільно.

Ми отримали таку задачу лінійного програмування:

$$Z=c_1x_1+c_2x_2, \to \max \tag{2.4}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \leq b_3, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Функція (2.4) – це цільова функція або функція мети, (2.5) – система обмежень нашої задачі, причому перші три обмеження (2.5) називають основними обмеженнями, а останні два (обмеження на знак змінних x_1 та x_2) – природними чи економічними.

2) Узагальнена модель оптимального планування

Розглянемо загальну модель оптимального планування. Припустимо, що планується організувати випуск продукції r видів за допомогою m можливих технологій. Для цього використовується n видів виробничих ресурсів (матеріалів, обладнання, праці, сировини тощо).

Введемо позначення: i – індекс ресурсу, $i = \overline{1,n}$; j – індекс технології, $j = \overline{1,m}$; l – індекс виду продукції, $l = \overline{1,r}$; a_{ij} – витрати ресурсу i-го виду на одиницю часу роботи технологічної лінії виду j; b_{lj} – вихід продукції виду l за одиницю часу роботи технологічної лінії виду j; A_i – обсяг запасів ресурсів i-го виду; K_l – коефіцієнт, який відображає частку продукції виду l в загальному обсязі кінцевої продукції; x_j – час роботи технологічної лінії виду j; Z – загальний обсяг кінцевої продукції. Тоді узагальнена модель оптимального планування матиме вигляд: знайти такий план $\{x_j \geq 0;\ j = \overline{1,m}; Z \geq 0\}$, який забезпечить

$$Z \to \max$$

при виконанні обмежень:

а) за обсягом ресурсів

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m \le A_1, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m \le A_n; \end{array}\right\} \qquad (2.6)$$

б) за структурою кінцевої продукції

$$\left.\begin{array}{l} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1m}x_m \ge K_1 Z, \\ \vdots \\ b_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_m \ge K_r Z. \end{array}\right\} \qquad (2.7)$$

3) Задача про складання кормового раціону

В кормовий раціон для відгодівлі великої рогатої худоби (ВРХ) входять п'ять видів кормів K_1, K_2, K_3, K_4 та K_5. Для забезпечення заданого приросту ваги тварини повинні споживати поживні речовин P_1, P_2, P_3. Мінімальна кількість поживних речовин, потрібних тваринам, а також вміст кількості одиниць поживних речовин в 1 кг корму та вартість 1 кг корму наведені в таблиці.

Необхідно скласти добовий раціон споживання поживних речовин таким чином, щоб затрати на нього були мінімальними.

Поживні речовини	Мінімальна кількість поживних речовин	Кількість одиниць поживних речовин в 1 кг корму				
		K1	***K2***	***K3***	***K4***	***K5***
P1	b_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
P2	b_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}
P3	b_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}
Вартість 1 кг корму		c_1	c_2	c_3	c_4	c_5

Побудуємо математичну модель задачі.

Введемо позначення: x_i – кількість корму (кг) K_i в раціоні (i=1, 2, 3, 4, 5); Z – вартість добового раціону.

Оскільки вартість одного кілограма корму становить c_i, а загальна кількість корму i-го виду, що потрібна для відгодівлі ВРХ становить x_i *кг* (i=1, 2, 3, 4, 5), то перемноживши c_i на x_i і додавши ці добутки, отримаємо вартість добового раціону відгодівлі ВРХ: $Z=c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+c_4x_4+c_5x_5$. Для побудови обмежень задачі перемножимо a_{11} – кількість поживних речовин P_1, що містяться в 1кг корму K_1 на загальну кількість цього корму x_1, a_{12} – кількість поживних речовин P_1, що містяться в 1 кг корму K_2 на загальну кількість цього корму x_2, a_{13} на x_3, a_{14} на x_4, a_{15} на x_5 і додаймо ці добутки. В результаті отримаємо загальну кількість поживних речовин P_1, отриманих від усіх п'яти кормів, а мінімальна кількість поживних речовин P_1 повинна становити b_1, тому обмеження з першого виду поживних речовин матиме вигляд:

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4+a_{15}x_5 \geq b_1$. Аналогічно записуються обмеження з мінімальної кількості споживання речовин P_2 та P_3.

Ми отримали математичну модель задачі про кормовий раціон:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + c_5x_5 \to \min, \qquad (2.8)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{33}x_3 + a_{44}x_4 + a_{55}x_5 \geq b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{44}x_4 + a_{55}x_5 \geq b_3, \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,5}. \end{cases} \qquad (2.9)$$

4) Задача про раціональний розкрій матеріалів

Розглянемо умови задачі. Значна частина матеріалів надходить на підприємство певними одиницями стандартних розмірів. Для його використання доводиться розрізати на частини, щоб отримати заготовки потрібних розмірів. Виникає проблема мінімізації відходів матеріалів.

Для побудови математичної моделі задачі введемо позначення.

Нехай:

m - кількість різних заготовок;

B_i -план випуску заготовок i-го виду;

n - кількість різних способів (варіантів) розкрою стандартного матеріалу;

a_{ij} - число заготовок i-го виду, одержаних за допомогою j-го способу розкрою;

c_j - величина відходів при j-му варіанті розкрою.

Схематично задачу можна представити у вигляді таблиці:

Варіант (спосіб) розкрою	Вихід заготовок з одиниці матеріалу				Відходи
	1-го виду	2-го виду	…	m-го виду	
1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1m}	c_1
2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2m}	c_2
…	…	…	…	…	…
n	a_{n1}	a_{n2}	…	a_{nm}	c_n
План випуску заготовок	B_1	B_2	…	B_m	

Через невідому x_j позначимо кількість одиниць вихідного матеріалу, які потрібно розрізати j-тим способом, а через Z - загальну кількість відходів.

Кількість заготовок i-го виду, одержана за всіма варіантами розкрою становитиме $a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + ... + a_{ni}x_n$, а нам потрібно цих заготовок в кількості B_i одиниць. Тому в якості обмеження з i-того виду заготовок буде рівність:

$$a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + ... + a_{ni}x_n = B_i$$

В загальному випадку математична модель задачі раціонального розкрою матеріалу матиме вигляд:

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \to \min, \tag{2.10}$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + ... + a_n x_n = B_1 \\ a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{n2} x_n = B_2 \\ ..... \\ a_{1m} x_1 + a_{2m} x_2 + ... + a_{nm} x_n = B_m \\ x_j \geq 0, \qquad j = 1, n. \end{cases} \tag{2.11}$$

Існуючі методи розв'язання задач лінійного програмування, які передбачають певні вимого до системи основних обмежень (2.2), тому розрізняють дві стандартні форми запису задач лінійного програмування:

І-ша – з обмеженнями-рівняннями;

ІІ-га з обмеженнями-нерівностями.

Запишемо задачу лінійного програмування *в першій стандартній або канонічній формі*:

$$Z = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \to extr \tag{2.12}$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + ... + a_{1n} x_n = b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{2n} x_n = b_2, \\ ..... \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + ... + a_{mn} x_n = b_m, \\ x_i \geq 0 \qquad (i = \overline{1,n}). \end{cases} \tag{2.13}$$

Розв'язати задачу (2.12)-(2.13) – означає знайти такі розв'язки системи рівнянь (2.13), при яких цільова функція (2.12) набуває екстремального значення.

Задача лінійного програмування записана *в другій стандартній формі* в загальному випадку матиме вигляд:

$$F = s_0 + s_1 x_1 + s_2 x_2 + ... + s_k x \to extr \tag{2.14}$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + ... + a_{1k} x_k \leq \beta_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{2k} x_k \leq \beta_2, \\ ..... \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + ... + a_{mk} x_k \leq \beta_m, \\ x_i \geq 0 \qquad (\mathrm{i} = \overline{1,\mathrm{k}}). \end{cases} \tag{2.15}$$

Знайти розв'язок задачі лінійного програмування, записаної в другій стандартній формі, - означає знайти такі розв'язки системи нерівностей (2.15), при яких цільова функція (2.14) набуватиме екстремального значення.

В системі обмежень (2.15) ставимо знак нерівності «≤» системи (2.15) оскільки цього можна завжди домогтися, помноживши праву і ліву частини нерівності на (-1).

Оскільки деякі методи розв'язування задач лінійного програмування вимагають, щоб задача була написана в певній стандартній формі, покажемо, як можна перейти від першої до другої стандартної форми запису задач лінійного програмування і, навпаки, від другої до першої.

Перехід від II-ої стандартної форми до I-ої.

Щоб перейти від другої стандартної форми до першої, достатньо до лівої частини кожного обмеження типу «≤» системи (2.15) додати додаткову додану невідому, яка рівна різниці між правою та лівою частинами нерівності. Здійснимо це і в результаті отримаємо:

$$F = s_0 + s_1 x_1 + s_2 x_2 + ... + s_k x \to extr, \tag{2.16}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1k}x_k + x_{k+1} = \beta_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2k}x_k + x_{k+2} = \beta_2, \\ ..... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mk}x_k + x_{k+m} = \beta_m, \\ x_i \geq 0 \qquad (\mathrm{i} = \overline{1, \mathrm{k}+\mathrm{l}}). \end{cases} \tag{2.17}$$

Задача (2.16)-(2.17) записана в першій стандартній формі.

Перехід від I-ої стандартної форми до II-ої.

Розглянемо задачу лінійного програмування з обмеженнями-рівностями (2.12)-(2.13).

Нехай $x_1, x_2, ..., x_k$ - вільні змінні. Тоді $x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n$ - базисні змінні. Виразимо значення базисних змінних через вільні, використовуючи перетворення Жордана-Гауса:

$$\begin{cases} x_{k+1} = d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + ... + d_{1k}x_k + d_{1,} \\ x_{k+2} = d_{21}x_1 + d_{22}x_2 + ... + d_{2k}x_k + d_{2,} \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ x_n = d_{s1}x_1 + d_{s2}x_2 + ... + d_{sk}x_k + d_s. \end{cases}$$

Маємо s базисних змінних і k вільних $(s + k = n)$.

Оскільки $x_j \geq 0; j = \overline{1, n},$ то

$$\begin{cases} d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + ... + d_{1k}x_k + d_1 \geq 0, \\ d_{21}x_1 + d_{22}x_2 + ... + d_{2k}x_k + d_2 \geq 0 \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ d_{s1}x_1 + d_{s2}x_2 + ... + d_{sk}x_k + d_s \geq 0 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + ... + d_{1k}x_k \geq -d_1, \\ d_{21}x_1 + d_{22}x_2 + ... + d_{2k}x_k \geq -d_2 \\ ... \ ... \ ... \ ... \ ... \ ... \ ... \ ... \ ... \ ... \\ d_{s1}x_1 + d_{s2}x_2 + ... + d_{sk}x_k \geq -d_s \end{cases}$$

Помножимо всі нерівності на (-1), тоді знаки нерівностей стануть «≤». Змінні $x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n$. У результаті отримуємо задачу лінійного програмування з обмеженнями-нерівностями.

2.2. Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування

Для кращого розуміння основних властивостей задач лінійного програмування використаємо їх геометричне зображення. Введемо означення опуклих множин, які характерні для задач лінійного програмування.

Множина D в n-мірному евклідовому просторі називається *опуклою множиною*, якщо для будь-яких двох точок цієї множини $X^{(1)}, X^{(2)} \in D$ точки $X = \lambda X^{(1)} + (1-\lambda)X^{(2)}$ належать множині D для всіх значень λ, які належать відрізку $[0;1]$. Геометрично це означає, що якщо дві точки належать множині D, то й відрізок прямої, що їх з'єднує, також належить до множини D.

Прикладами опуклих множин на площині є відрізок, пряма, круг, півплощина, квадрат і т.д.

Розглянемо основні властивості розв'язків задач лінійного програмування.

Вектор $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, координати якого задовольняють систему обмежень (2.2) і (2.3), називають *допустимим розв'язком (планом)* задачі. Сукупність допустимих розв'язків задачі утворює *область допустимих розв'язків.*

Опорним планом задачі лінійного програмування називається план, що утворений координатами вершин многогранника планів задачі. Отже, опорний план – це план, який задовольняє не менш ніж *n* лінійно незалежних обмежень (2.2) та обмеження (2.3) щодо знака у вигляді строгих рівностей.

Опорний план називається невиродженим, якщо він є вершиною многогранника планів задачі, що утворений перетином *n* гіперплощин, тобто задовольняє *n* лінійно незалежних обмежень – строгих рівностей. В протилежному випадку *опорний план є виродженим*.

Якщо задача лінійного програмування має розв'язок і серед її планів є опорні, то хоча б один з них буде оптимальним.

Сукупність усіх розв'язків задачі лінійного програмування є багатогранною опуклою множиною, яку називають *многогранником розв'язків*.

Теорема. Якщо задача лінійного програмування має оптимальний план, то екстремального значення цільова функція набуває в одній із вершин многогранника розв'язків. Якщо ж цільова функція набуває екстремального значення більш як в одній вершині цього многогранника, то вона досягає його і в будь-якій точці, що є лінійною комбінацією таких вершин.

Розглянемо ***алгоритм графічного методу*** розв'язування задач лінійного програмування. Слід зауважити, що окреслений метод використовується для розв'язування певного класу задач лінійного програмування, зокрема задач, число невідомих яких не перевищує 3. Хоча вже в трьохвимірному просторі важко побудувати многогранник допустимих розв'язків, а задачу лінійного програмування, яка містить більше трьох змінних графічно зобразити практично неможливо. Тому найчастіше *графічним методом розв'язують задачі лінійного програмування, які містять дві невідомі і записані в другій стандартній формі (з обмеженнями-нерівностями)*.

$$Z = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 \to extr$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 \le b_k, \\ a_{k+11}x_1 + a_{k+12}x_2 \le b_{k+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Розглянемо основні етапи знаходження розв'язку задач ЛП графічним методом:

1) Побудувати багатокутник допустимих розв'язків на підстав заданої системи обмежень:

1.1) На координатній площині $X_1 0 X_2$ будуємо граничні прямі (рис.2.1), які відповідають системі обмежень задачі:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i, \quad i = \overline{1,m}.$$

1.2) Визначаємо півплощини, які є розв'язками нерівностей. Для цього беремо координати точки з довільної півплощини і підставляємо в нерівність.

Якщо нерівність справджується, то півплощина розв’язків направлена в сторону вибраної точки, якщо ж не справджується, то в протилежну сторону.

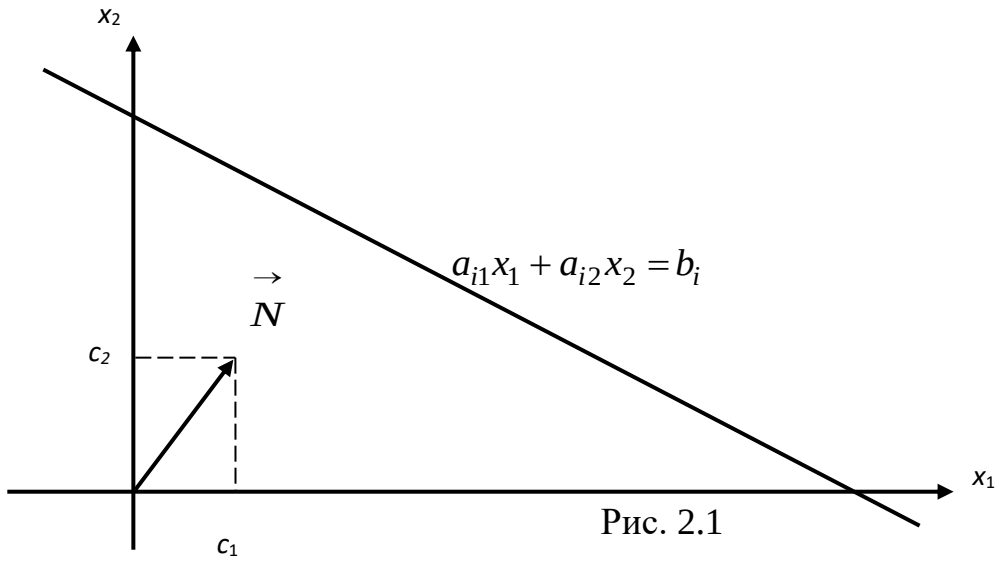

Рис. 2.1

1.3) Знаходимо область, де перетинаються всі півплощини розв’язків – многокутник розв’язків. Якщо перетин – непорожня множина, то переходимо до наступного етапу. В протилежному випадку робимо висновок, що задача не має розв’язку.

2) Будуємо вектор нормалі $\vec{N}$, початок якого знаходиться в точці (0,0), а кінець в точці (c_1, c_2) (коефіцієнти при невідомих в цільовій функції). Вектор нормалі вказує напрямок зростання функції.

3) Перпендикулярно до вектору нормалі будуємо лінію рівнів $c_1x_1 + c_2x_2 = const.$ Для зручності знаходження оптимальних точок лінію рівнів будуємо так, щоб вона мала спільні точки з многокутником розв’язків перетинала многокутник розв’язків).

4) Визначаємо оптимальні точки. Для цього лінію рівнів паралельно переносимо в напрямку вектору нормалі. Остання вершина многокутника, яку перетне лінія рівнів, буде точкою максимуму. Потім лінію рівнів паралельно переносимо в напрямку, протилежному напрямку вектору нормалі. Остання вершина многокутника розв’язків, яку перетне лінія рівнів в цьому випадку, є точкою мінімуму.

5) Знаходимо найбільше та найменше значення функції *Z*. Для цього підставимо координати оптимальних точок, знайдених шляхом розв’язування систем рівнянь граничних прямих (перетином яких є оптимальна точка), в цільову функцію.

2.3. Симплекс-метод розв'язування задач лінійного програмування

На відміну від графічного методу, який доцільно застосовувати лише для розв'язування задач лінійного програмування з двома змінними, за допомогою симплекс-методу можна знаходити розв'язки задач ЛП з більшою кількістю невідомих. Процес розв'язування задачі таким методом має ітераційний характер. Обчислювальні процедури (ітерації) одного й того самого типу повторюються в конкретній послідовності за певними правилами до тих пір, доки не буде отримано оптимальний план задачі або з'ясовано, що його не існує. Таким чином, *симплексний метод або симплекс-метод* є універсальним методом розв'язання ЗЛП.

Симплекс-метод – це поетапна обчислювальна процедура, в основу якої покладено принцип послідовного поліпшення значень цільової функції переходом від одного опорного плану задачі лінійного програмування до іншого.

Геометричний зміст симплексного методу полягає в послідовному переході по ребрам від однієї вершини многогранника розв'язку (опорного плану) до іншої в напрямі до вершини , в якій цільова функція досягає найбільшого (найменшого) значення (рис. 2.1).

Алгоритм симплекс-методу завжди починається з деякого опорного розв'язку (плану) і потім намагається знайти інший опорний план, який покращує значення цільової функції.

Симплексний метод дозволяє вирішувати задачі в тому випадку, коли постановка записана в одній з канонічних форм.

Цей метод можна використовувати для розв'язування задач ЛП, які записані в канонічній формі, тобто:

1) задача ЛП записана в першій стандартній формі (обмеження- рівності);

2) праві частини рівнянь-обмежень (вільні члени) невід'ємні;

3) система рівнянь-обмежень має чітко виділений базис, тобто в кожному рівнянні є невідома з коефіцієнтом 1 і ця невідома відсутня в усіх інших рівняннях системи обмежень. Ці невідомі називаються базисними, а всі інші - вільними;

4) цільова функція залежить тільки від вільних невідомих.

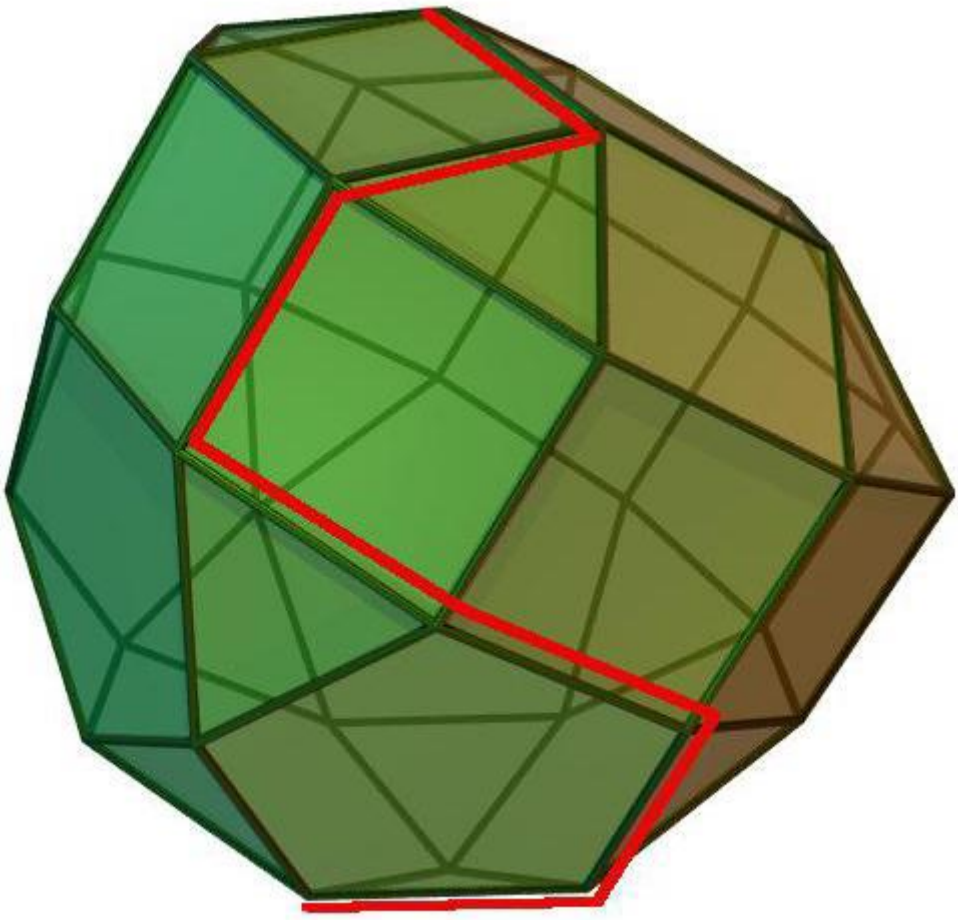

Рис. 2.2. Графічна інтерпретація симплекс-методу

Алгоритм симплексного методу розв'язування задач лінійного програмування складається з таких етапів:

1) Визначення початкового опорного плану задачі лінійного програмування.

Визначення початкового опорного плану починають із запису задачі лінійного програмування у канонічній формі. Якщо в системі обмежень є обмеження-нерівності, то до лівої частини обмежень типу «≤» додаємо додаткові невід'ємні невідомі, а від лівих частин обмежень типу «≥» віднімаємо додаткові невід'ємні невідомі. Якщо права частина обмеження від'ємна, то множимо все обмеження на (-1). Якщо цільова функція містить базисні невідомі, то виражаємо їх через вільні з системи обмежень і підставляємо в цільову функцію.

Після зведення задачі до канонічного виду перевіряємо, чи кількість базисних невідомих дорівнює кількості рівнянь системи обмежень. Якщо ця рівність виконується, то початковий опорний план визначається безпосередньо без додаткових дій. Для цього вільні невідомі прирівнюють до нуля і з кожного

рівняння-обмеження зразу отримують значення базисних невідомих, тобто таким чином отримаємо початковий опорний план задачі. Якщо ж кількість базисних невідомих менша від кількості рівнянь-обмежень задачі, то для побудови початкового опорного плану використовують метод штучного базису.

Нехай ЗЛП в канонічній формі має такий вигляд:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + 0x_{n+1} + \ldots + 0x_{n+m} \to extr$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \\ x_j \geq 0 \qquad\qquad (j = \overline{1, n+m}). \end{cases}$$

2) Побудова симплекс-таблиці.

Подальший обчислювальний процес та перевірку опорного плану на оптимальність здійснюють з допомогою симплекс-таблиць.

В першому стовпчику таблиці записуємо номер таблиці (ітерації), в другому стовпчику – номер рядка, в наступному – «Базис» (базисні невідомі), далі – «Опорний план» (значення базисних змінних), а у решті стовпчиків, кількість яких дорівнює кількості невідомих задачі, – відповідні коефіцієнти при невідомих кожного обмеження задачі лінійного програмування.

Для заповнення нульового рядка початкової симплекс-таблиці цільову функцію запишемо в такому ж вигляді, як обмеження задачі, тобто у вигляді рівняння

$$Z - c_1x_1 - c_2x_2 - ... - c_nx_n - 0x_{n+1} - \ldots - 0x_{n+m} = 0$$

Тобто, всі невідомі перенесемо в ліву частину, і в подальшому нульовий рядок будемо заповнювати так само, як і рядки 1-3, що відповідають обмеженням.

Таблиця 2

№ таблиці	№ рядка, i	Базис	Опорний план	Коефіцієнти при невідомих							
1				X_1	X_2	…	X_n	X_{n+1}	X_{n+2}	…	X_{n+m}
	0	Z	0	$-c_1$	$-c_2$	…	$-c_n$	0	0	…	0
	1	X_{n+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	1	0	…	0
	2	X_{n+2}	b_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	0	1	…	0
	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
	m	X_{n+m}	b_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	0	0	…	1

В стовпчику «Базис» записуємо базисні невідомі з системи обмежень, а для нульового рядка базисною невідомою є *Z*. В стовпчику «Опорний план» записуємо значення базисних невідомих, коли вільні невідомі дорівнюють нулю (праві частини рівнянь-обмежень та цільової функції). В наступних стовпчиках записуємо коефіцієнти при невідомих в цільовій функції та системі обмежень.

Звернемо увагу на те, що в нульовому рядочку симплекс-таблиці записуємо дані з цільової функції.

3) Перевірка опорного плану на оптимальність за допомогою чисел нульового рядка симплекс-таблиці. Якщо умова оптимальності виконується, то визначений опорний план є оптимальним, якщо ж не виконується, то переходять до нового опорного плану або встановлюють, що оптимального плану задачі не існує.

Перевіряємо опорний план на оптимальність згідно з теоремою.

Теорема (*критерій оптимальності симплекс-методу*). *Якщо цільова функція максимізується (мінімізується) і в нульовому рядку відсутні від'ємні (додатні) числа, за винятком стовпчика «Опорний план», то опорний план є оптимальним.*

У процесі перевірки умови оптимальності можливі такі випадки:

а) умова оптимальності виконується, а значить опорний план є оптимальним;

б) умова оптимальності не виконується, тоді потрібно перейти до нового опорного плану.

4) Перехід від одного опорного плану до іншого виконується зміною базису, тобто виключенням з базису деякої змінної та введенням замість неї нової з числа вільних невідомих задачі.

Змінну, яку потрібно ввести в базис, визначаємо за елементами нульового рядка. Якщо цільова функція досліджується на мінімум і в нульовому рядку симплекс-таблиці є додатні числа (за винятком стовпчика «Опорний план»), то вибираємо найбільше з цих чисел і невідому, що відповідає цьому числу, вводимо в базис. Якщо ж цільова функція досліджується на максимум і в нульовому рядку симплекс-таблиці є від'ємні числа (за винятком стовпчика «Опорний план»), то вибираємо найменше з них (найбільше по модулю) і невідому, що йому відповідає, вводимо в базис. *Стовпець*, який відповідає невідомій, що вводиться в базис, називається *ключовим*. Нехай це буде змінна x_k .

Для визначення змінної, яка має бути виведена з базису, знаходять відношення елементів стовпця «Опорний план» до відповідних додатних елементів ключового стовпця (нульовий рядок не розглядаємо) і вибираємо

найменше з цих відношень. Невідому, яка відповідає цьому відношенню, виключаємо з базису. Рядок, який відповідає цьому найменшому відношенню, називається *ключовим рядком*. Нехай це буде змінна x_l .

На перетині ключового рядка і ключового стовпця знаходиться *ключовий* (генеральний) *елемент*. За допомогою генерального елемента і методу Жордана-Гауса переходимо до нової симплекс-таблиці.

Перерахунок всіх елементів симплекс-таблиці по формулам Жордана-Гаусса здійснюється наступним чином:

- елементи нового опорного плану та нове значення цільової функції розраховується за формулами:

$$b_i' = \begin{cases} \dfrac{b_l}{a_{lk}}, i = l \\ b_i - \dfrac{b_l a_{ik}}{a_{lk}}, i \neq l \end{cases}$$

- інші елементи за формулами:

$$a_{ij}' = \begin{cases} \dfrac{a_{ij}}{a_{lk}}, i = l \\ a_{ij} - \dfrac{a_{lj} a_{ik}}{a_{lk}}, i \neq l \end{cases}$$

Далі ітераційний процес повторюють доти, поки не буде знайдено оптимальний план задачі лінійного програмування.

При застосуванні симплекс-методу для розв’язування задач лінійного програмування можливі такі випадки:

1) Якщо ми отримали оптимальний план задачі ЛП і в нульовому рядку останньої симплекс-таблиці вільній невідомій відповідає коефіцієнт, рівний нулю, то це свідчить про те, що існує неєдиний розв’язок задачі. Альтернативний оптимальний план можна отримати, якщо ввести цю невідому в базис і здійснити ще одну ітерацію.

2) Якщо при переході від однієї симплекс-таблиці до іншої в ключовому стовпчику немає додатних чисел, тобто не можна жодну з базисних невідомих вивести з базису, то це означає, що цільова функція задачі лінійного програмування необмежена і оптимальних розв’язків не існує.