8:30-9:50 ІКС в АУТП АТ-26м аудит.8 від 11.09.2021р.

# Лабораторна робота №3

# ВИВЧЕННЯ СТАТИСТИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК

ЦИФРОВИХ ГЕНЕРАТОРІВ ШУМУ

## Мета роботи: теоретична підготовка до дослідження залежності статистичних характеристик генерованого “білого” шуму від методів реалізації алгоритмів генерації.

**Теоретичні відомості**

При проведенні експериментальних досліджень САУ та інших технічних приладів, при моделюванні таких систем і розв'язанні задач ідентифікації широко використовують випадкові сигнали (процеси) з заданими статистичними характеристиками.

Як відомо, найбільш повними статистичними характеристиками випадкових процесів є диференціальний закон розподілу ймовірностей (щільність розподілу ймовірностей) та інтегральний закон (функція ймовірності).

При вивченні стаціонарних і ергодичних процесів звичайну обмежуються розглядом перших двох моментів цих законів (кореляційна теорія випадкових процесів).

Незалежно від стаціонарної або нестаціонарної природи випадкового сигналу з заданими характеристиками найбільш часто такі сигнали одержують з допомогою відповідних фільтрів (моделей сигналів) генерованого білого шуму.

Білий шум - це гіпотетичний стаціонарний випадковий процес, що не має місця в дійсності, і у якого будь-які два значення, роздільні скільки завгодно малими інтервалами часу, статистично незалежні. В силу цього кореляційна функція шуму дорівнює дельта-функції

, (2.1)

а спектральна щільність

. (2.2)

На практиці зустрічаються випадкові процеси, спектральні щільності яких постійні в деякій обмеженій смузі частот. Якщо ця смуга частот по величині перевищує смугу пропускання формуючого фільтру, тобто моделі сигналу (в інших випадках перевищує смугу пропускання досліджуємої САУ) і спектральна щільність приблизно постійна, то такий процес наближено може вважатися білим шумом. Щоб відрізняти реальний (наближений) білий шум від гіпотетичного (математичної абстракції), будемо брати прикметник в лапки, тобто "білий" шум - це наближений випадковий процес, що можна генерувати за допомогою технічних або алгоритмічних засобів.

В практиці експериментальних досліджень виникає необхідність знати не тільки спектральний склад випадкових сигналів, але і розподіл ймовірностей миттєвих значень цих сигналів. При цьому заданий розподіл миттєвих значень випадкового сигналу краще всього одержувати за допомогою спеціальних функціональних перетворювачів "білого" шуму, що має рівномірний розподіл в деякому інтервалі значень.

Типовим прикладом дискретного "білого" шуму може служити помилка квантування сигналів по рівню, що виконується в АЦП. Як відомо, квантування сигналів по рівню може бути ототожнене з їхнім проходженням через перетворювач з нелінійною статистичною характеристикою, показаною на рис. 2.1.



Рис. 2.1. Нелінійна статистична характеристика

Якщо вважати, що в ідеальному випадку (перетворювач не вносить помилок в сигнали що передаються) вихідний сигнал повинен мати значення

 (2.3)

(*k* – коефіцієнт перетворення пристрою, ), то під помилкою квантування розуміють різницю двох сигналів, утворених на виході ідеального перетворювача з характеристикою, що показана на рис. 2.1. Процес формування помилки можна відобразити блок-схемою, зображеною на рис. 2.2.



Рис. 2.2. Процес формування помилки

Оскільки

 (2.4)

то графік (осцилограма) зміни помилки квантування має вигляд, показаний на рис. 2.3, а.

Графік щільності розподілу імовірностей випадкової помилки квантування сигналів по рівню зображений на рис. 2.3, б. Аналітично щільність розподілу записується наступним чином:

 (2.5)



Рис. 2.3. Помилки квантування сигналів по рівню

Існує три методи генерування випадкових чисел: табличний, фізичний, аналітичний (алгоритмічний). В різних генераторах випадкових чисел (ГВЧ) має місце послідовне, паралельне або змішане формування двійкових розрядів числа. Недоліком послідовних ГВЧ є низька швидкодія. Паралельні ГВЧ забезпечують високу швидкодію, але потребують значних апаратних засобів. Змішані ГВЧ використовують переваги двох попередніх типів ГВЧ і тому є найбільш поширеними.

Табличний метод формування випадкових чисел полягає у занесенні в запам'ятовуючий пристрій ЕОМ таблиць випадкових чисел і зчитуванні їх в міру необхідності. Цей метод може використовуватися при малому обсязі статистичних випробувань, так як для зберігання таблиць потрібний великий обсяг пам'яті ЕОМ.

Фізичний генератор складається з джерела шуму, підсилювача і формувача випадкових чисел. В якості джерела шуму використовуються *р-n* переходи діодів і транзисторів, газорозрядні прилади, вугільні стовпчики тощо. Формувач випадкових чисел може бути виконаний у вигляді обмежувача і лічильника, що підраховує кількість перевищень шумовим коливанням встановленого рівня обмеження за фіксований інтервал часу . Якщо кількість підрахованих перевищень парна, то записується нуль, якщо непарна - то одиниця. Найбільш поширеним є метод побудови ГВЧ, в якому кожний розряд вихідного числа формується незалежно за допомогою ймовірнісних блоків, в яких джерелом шуму є фізичні генератори. Отримані нулі і одиниці записуються в спеціальну комірку пам'яті. В будь-який момент можна звернутися до цієї комірки і взяти звідти значення випадкового числа.

Недоліками цього метода формування випадкових чисел є:

1. Складність перевірки якості отриманих випадкових чисел. Ці перевірки потрібно робити періодично, так як через коливання напруги живлення, температури тощо може виникнути так званий "дрейф розподілу".

Досить часто розрахунки на ЕОМ потрібно перепровіряти, щоб виключити можливість випадкового збою. Але відтворити ті самі випадкові числа неможливо, якщо по ходу експерименту їх не запам'ятовувати. Якщо їх запам'ятовувати, то знову отримуємо табличний метод**.**

Досить поширеними є також ГВЧ, побудовані на основі регістра зсуву. Ці ГВЧ формують так звані *М*-послідовності, тобто послідовності максимальної довжини, які містять  чисел, що не повторюються, де *m* - число розрядів регістра зсуву.

Аналітичний метод дозволяє отримати випадкові числа шляхом реалізації на ЕОМ математичного алгоритму, що складається із послідовності математичних і логічних операцій, які реалізують рекурсивні співвідношення. Аналітичні методи не дозволяють отримати випадковий процес в його суворо математичному визначенні, так як числа, отримані за допомогою формули неможливо вважати випадковими, хоча формула і може бути досить складна. Найчастіше застосовується рекурсивний алгоритм розрахунку, який визначає всі інші числа по першому заданому числу. При цьому можливі цикли, що повторюються. Крім того, через обмежену розрядність ЕОМ неможливо отримати суворо рівномірний розподіл в заданому інтервалі значень. Тому такий випадковий процес називають псевдовипадковим. Однак, випадкові процеси, що формуються за цим методом, доволі придатні для технічних задач.

Розглянемо деякі аналітичні методи генерування випадкових чисел**.**

Найпростішим є алгоритм Дж. Неймана. Береться довільне число , що складається з  двійкових цифр, і обчислюється його квадрат. Отримуємо , що складається вже з  двійкових цифр. Далі вибирається число , що складається з  середніх двійкових цифр, шляхом відкидання старших і молодших  розрядів. Далі процес обчислень повторюється для  і так далі.

Перевагою цього алгоритму є його простота. Для отримання кожного випадкового числа потрібно лише декілька простих операцій. Програма займає лише декілька комірок пам'яті ЕОМ. Будь-яке число можна легко відтворити для перевірки якості послідовності випадкових чисел. Недоліком даного алгоритму є те, що розподіл випадкових чисел дещо відхиляється відрівномірного, так як дає більше малих значень.

Також відомі і інші алгоритми генерації випадкових чисел: модифікований метод Неймана, алгоритми на основі рекурентного співвідношення, метод порівнянь, запропонований Д. Лемером.

В особливу групу виділяють специфічний дискретний випадковий процес, що отримав назву «випадкові числа» (потік випадкових чисел). Цей процес являє собою аперіодичну послідовність біполярних прямокутних імпульсів напруги, що відповідає аперіодичній виборці обмежених по значенню чисел в тій або іншій системі числення, наприклад в інтервалі значень від 0 до (), де *m* - основа системи лічби, що використовується;  -кількість розрядів числа. В ряді випадків використовують періодичну послідовність випадкових чисел.

Інколи виявляється зручним пронормувати числа діленням їх на найбільше число, тобто на (). При цьому випадкові числа розподілені в інтервалі 0... 1.

Пристрій (або алгоритм), що формує послідовність (аперіодичну або періодичну) випадкових чисел, називають, генератором випадкових чисел (ГВЧ). За допомогою -розрядного генератора можна отримати  різноманітних чисел.

Найбільш розповсюджені генератори двійкових чисел (). Фіксація отриманої цифри в кожному з п розрядів здійснюється за допомогою бістабільних елементів (один стан фіксує одиницю, а інший - нуль). Побудова ГВЧ, що використовують системи лічби, кратні двом, тобто 4, 8, 16, ..., виконується об'єднанням декількох ГВЧ з двійковою системою лічби (при вісімковій системі використовується три двійкових каналу тощо).

Будь-яке випадкове двійкове число  можна уявити у вигляді

, (2.6)

де  – випадкова величина, що приймає в кожному з N розрядів двійкового числа значення 0 або 1.

Поява нулів і одиниць в кожному розряді числа – події єдино можливі і несумісні, тому сума імовірностей цих подій

. (2.7)

Що генеруються числа можуть бути корельованими і некорельованими. При цьому умова некорельованості послідовності випадкових чисел має вигляд

 (2.8)

де  - математичне очікування чисел;

 - дисперсія чисел.

Як вже відзначалося, найбільший інтерес представляє генерація випадкових рівно ймовірних десяткових чисел. В цьому випадку кожне з  чисел повинно з'являтися на виході ГСЧ з імовірністю

. (2.9)

Як видно з наведеної формули, розподіл чисел є дискретним і, отже, квазірівномірним в інтервалі 0… (2n-1) або 0…1.

Щоб випадкові числа, що генеруються підкорялися рівномірному розподілу, необхідно виконання, принаймні, двох умов:

1) Рівність імовірностей появи нулів і одиниць в кожному з розрядів N - розрядного числа

; (2.10)

2) Відсутність статистичного або детермінованого зв'язку між розрядами чисел, що генеруються.

В найпростішому випадку генерування  - розрядних рівно ймовірних чисел зводиться до отримання  однорозрядних рівно ймовірних двійкових чисел з наступним їхнім об'єднанням з урахуванням ваги кожного розряду

 (2.11)

де i – номер розряду.

По засобу формування розрядів випадкових двійкових чисел ГСЧ можна поділити на наступні типи:

1). З використанням принципу випадкового чергування в часі одного з двох тривких станів рівноваги;

2). З переліченням імпульсів випадкової послідовності за фіксований інтервал часу;

3). З переліченням періодичних імпульсів, що надходять на лічильник за випадковий інтервал часу.

Крім того, в окрему групу виділяють ГВЧ, у яких для формування одного розряду двійкового числа використовується аналізатор знаку випадкового процесу  е у фіксовані моменти , де 0,1,2,…;  – тактовий період роботи ГВЧ.

Якщо , те генерується одиниця; якщо , генерується нуль.

ГВЧ з переліченням випадкових, по моментам появи, імпульсів за фіксований інтервал часу  і ГВЧ з переліченням періодичних імпульсів за випадковий інтервал  містить загальний елемент – лічильник імпульсів.

Число тригерів у лічильнику визначає розрядність одержуваних чисел і може змінюватися від 1 до .

Якщо вимагається отримати  – розрядне випадкове число і у лічильнику міститься  ступенів лічби, то ГВЧ називають однотактовим з переліченням імпульсів по модулю .

Паралельний ГВЧ складається з  однорозрядних лічильників, що рахують імпульси, які надходять від автономних генераторів пакетів імпульсів. При цьому всі  однорозрядних лічильників з'єднуються колами зчитування.

Якщо ГВЧ складається з одного лічильника, а  - розрядне число формується за  послідовних циклів його роботи, то такий ГВЧ називають послідовним.

Послідовний ГВЧ містить вихідну пам'ять, куди через регістр зрушення заносяться значення чисел (0 або 1), отримані в кожному з  послідовних циклів.

Паралельні ГВЧ надто складні по виконанню, а послідовні ГВЧ мають низьку продуктивність. Компромісної є паралельно – послідовна структура ГВЧ.

Однім з варіантів побудови алгоритмічного ГВЧ (такі ГВЧ інколи називають «математичною моделлю ГВЧ») є завдання випадкової послідовності чисел з допомогою виразу

, , (2.12)

де , a та С – цілі числа, причому

. (2.13)

Умова  означає, що А та В співпадають по модулю N, тобто А та В мають однаковий залишок при діленні на С.

Записаний алгоритм отримання випадкових чисел  визначає, що при довільному початковому значенні  випадкові числа  являють собою результат множення а на  та нормування по модулю С. При цьому випадкові числа мають розподіл від 0 до С, . Отримана таким чином послідовність є періодичною. Правильним підбором чисел А, С та k цей період можна зробити достатньо великим.

Практичне використання випадкових чисел звичайно ускладнене. Так, не завжди вдається забезпечити необхідні по умовам експерименту характеристики послідовностей випадкових чисел. Для цього потрібні контроль, регулювання і стабілізація ГВЧ.

Тому випадкові числа замінюють так званими псевдовипадковими послідовностями чисел. Така заміна можлива, якщо характеристики псевдовипадкової послідовності близькі до характеристик випадкової послідовності.

Псевдовипадкова послідовність є регулярним періодичним сигналом, будь-які необхідні характеристики якого можна отримати по реалізації в один період. Такими сигналами успішно вдається замінити послідовність випадкових однорозрядних чисел - «бінарний шум».

Варіант псевдовипадкової послідовності показаний на рис. 2.4, де Т – тривалість двійкового сигналу (дискретна); Тn – період послідовності.



Рис. 2.4. Псевдовипадкова послідовність

Як «бінарний шум» найбільш широко застосовуються лінійні послідовності максимальної довжини (ПМД, або НПМД – послідовності), що генеруються з допомогою генераторів, які складаються з  – каскадних регістрів зсуву і суматорів по модулю . Спрощена блок – схема такого генератора зображена на рис. 2.5.

Згідно рис. 2.5 сигнали з одиничних виходів k–го і r–го тригерів складуться по  і надходять на вхід першого тригера. Схема з  тригерів може мати  різноманітних станів. Не можна використати лише один стан: коли в усіх тригерах зафіксовані нулі (генеруються тільки нулі). Тому період повторення, пойменований максимальним, буде визначатися наступним чином:

. (2.14)



Рис. 2.5. Блок – схема генератора

Оскільки стан тригера змінюється тільки через один такт (період) імпульсами зсуву, то при вступі «оператора затримки» на один такт сигнал на виході будь-якого тригера можна записати аналітично

. (2.15)

Тоді робота генератора (див. рис. 2.5) відбувається наступним чином. Якщо в тригері  на –му такті зафіксоване деяке число  (+1 або 0), то в результаті зсуву через один такт  виявиться зафіксуваним в , а в  переходить число з суматора по mod 2. Означені оператори з кожним черговим тактом повторюються.

У відповідності з цим для станів тригерів можна записати:

; ;...;. (2.16)

Сигнал на виході суматора по mod 2 одержуємо послідовною підстановкою:

. (2.17)

Для прикладу нехай N=3, k=2. Тоді для x0 запишемо

 (2.18)

або

. (2.19)

де , так як .

Якщо , а сумуються сигнали з виходів  і , то схема описується виразом

. (2.20)

Вираз

 (2.21)

називається характеристичним поліномом.

В ланцюзі зворотного зв'язку генератора може бути один або декілька суматорів по mod 2. Тому характеристичний многочлен може містити велике число операторів затримки D в відповідних степенях.

Вибір числа суматорів і точок підключення їхніх входів визначається тим, який сигнал потрібно отримати від генератора. Для отримання послідовності з максимальним періодом достатньої мати один суматор на два входи.

Якщо в схемі визначається і початок першого періоду, то вихідний сигнал буде суворо детермінованим. При цьому статистичні характеристики реалізації двійкових випадкових чисел і описаних ПМД тим не менше будуть співпадати.

Порівняємо ці послідовності. В випадковій послідовності зміна знаків сигналу відбувається в моменти . При рівній імовірності появи символів можна передбачити, що після  з імовірністю  з'явитися або нуль, або одиниця.

В послідовності максимальної довжини, оскільки вона включає всі можливі  числа (окрім 00…0), буде  одиниць і  нулів.

Імовірності появи нулів і одиниць в псевдовипадковій послідовності (в середньому):

; (2.22)

. (2.23)

З формул (2.22), (2.23) видно, що при 

 (2.24)

Однакові також імовірності появи серій з нулів і одиниць, що йдуть одне за одним.

Так, в випадковій послідовності серія з  одиниць (нулів) буде зустрічатися з імовірністю

. (2.25)

В ПМД серії з однієї одиниці будуть зустрічатися  раз, з двох одиниць –  раз і так далі до серії з  одиниць, що зустрітися 1 раз. Тоді для серії з двох нулів (одиниць) ліворуч і праворуч можна записати

; (2.26)

; (2.27)

і т. д.

Автокореляціні функції (АКФ) випадкових вибірок з послідовностей максимальної довжини і «бінарного шуму» будуть відрізнятися одне від іншого зміщенням по осі ординат на величину

. (2.28)

Це зв'язано з тим, що в ПМД будуть відсутні числа вигляду 00…0 математичне очікування не дорівнює нулю. Вираз для АКФ має вигляд

 (2.29)

Графіки АКФ і спектральної щільності ПМД показані на рис. 2.6 а, б.



Рис. 2.6. Графіки АКФ і спектральної щільності ПМД

Спектральна щільність ПМД

 (2.30)

З формул і графіків (див. рис. 2.6, б) видно, що спектральна щільність лінійчата з огинаючую вигляду .

Перший нуль відповідає частоті роботи тактового генератора . Таким чином, ширина спектру  визначається тривалістю окремого символу і не залежить від тактового періоду генератора, а інтервал між елементами спектра , де , по шкалі частот дорівнює

.

Він залежить від періоду послідовності ** і швидко спадає з зростанням числа каскадів регістра зсуву . При  спектр прагне до суцільного, тобто ПМД зі зростанням  по своїм характеристикам швидко наближається до характеристик «бінарного шуму». При підвищенні частоти генератора імпульсів зсуву (зменшення *Т*) спектр сигналу поширюється, наближаючись до спектру білого шуму. Саме ця обставина дозволяє використати псевдовипадкові послідовності як заміну сигналів з суцільним рівномірним спектром в заданому діапазоні частот.

Характеристичні поліноми дозволяють створювати генератори, що реалізуються у вигляді моделі на ЕОМ.

**Порядок виконання роботи**

1. Ознайомитись з теоретичними відомостями, необхідними для виконання досліджень роботи.

**Зміст звіту**

1. Найменування і мета роботи.

2. Основні теоретичні відомості для виконання дослідження (стисло).

**Контрольні питання**

1. Назвіть засоби отримання випадкових чисел.

2. Які умови необхідно виконати для отримання випадкових чисел з рівномірним розподілом?

3. Назвіть основні засоби формування розрядів випадкових двійкових чисел в ГВЧ.

4. Проведіть порівняльний аналіз паралельних і послідовних ГВЧ.

5. Назвіть основні алгоритми отримання випадкових чисел на ЕОМ.

6. Чим викликана необхідність переходу від випадкових чисел до псевдовипадкових послідовностей? Які умови при цьому необхідно виконати?