

1.4. Обробка результатів прямих вимірювань

Виробничі вимірювання, як правило, виконуються одноразово. Однак при цьому обчислення найвірогіднішого результату вимірювання та оцінка його точності утруднені.

Лабораторні вимірювання здійснюються багаторазово й дають деяку сукупність результатів спостережень, які слід відповідно математично опрацювати.

Відомо, що за достатньо великої кількості випадкових величин їх поява підпорядковується певному закону. Якщо по осі абсцис відкласти різні значення випадкових величин x_i , а по осі ординат —

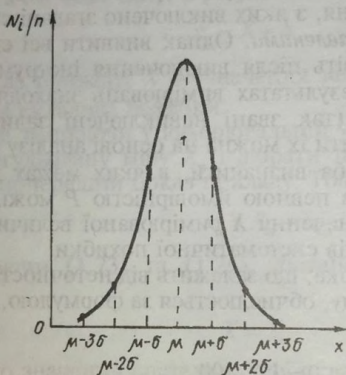


Рис. 1.9

відносну кількість величин даного значення (тобто кількість величин даного значення N_i , поділену на загальну їх кількість n), то при $n \rightarrow \infty$ дістанемо криву, зображену на рис. 1.9. Це так званий *нормальний закон розподілу випадкових величин*. Цю функцію для одного окремого випадку теорії імовірностей знайшов ще в 1730 р. англійський математик Абрахам де Муавр, потім узагальнив французький математик П'єр Симон Лаплас. У 1809 р. німецький математик Карл Фрідріх Гаусс застосував цей закон для аналізу випадкових величин. Аналітична форма нормального закону розподілу випадкових величин

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (1.31)$$

де μ — математичне сподівання випадкової величини (центр групування її значень; можна вважати, що μ збігається з істинним значенням величини X); σ^2 — дисперсія випадкової величини (розсіяння значень випадкової величини відносно центра групування); e — основа натуральних логарифмів.

Значення μ та σ можна виразити через x_i :

$$\mu(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad (1.32)$$

$$\sigma(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}. \quad (1.33)$$

Закон нормального розподілу випадкових величин, відображений формулою (1.31) та графіком рис. 1.9, дає змогу обчислити ймовірність перебування випадкової величини X у певних межах. Так, можна вважати: з імовірністю $P = 68,3\%$, що величина X не виходить за межі від $\mu - \sigma$ до $\mu + \sigma$ (тобто перебуває в межах $\mu \pm \sigma$); з імовірністю $P = 95,5\%$, що величина X перебуває в межах $\mu \pm 2\sigma$; з імовірністю $P = 99,7\%$, що величина X перебуває в межах $\mu \pm 3\sigma$.

Строго кажучи, нормальний закон розподілу може точно описувати лише нескінченно велику сукупність випадкових похибок (її називають *генеральною*). Однак його можна застосувати й для опису скінченних сукупностей, вважаючи, що вони випадково вибрані з генеральної (саме тому скінченні сукупності називають *вибірками*).

У вибірках зі скінченним n точне обчислення μ та σ неможливе; замість них приблизно обчислюють їхні статистичні оцінки $\tilde{\mu}$ та $\tilde{\sigma}$.

Для вибірки з n значень x_i оцінкою математичного сподівання випадкової величини (її найвірогіднішим значенням) є

$$\tilde{\mu}(X) \approx \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (1.34)$$

Вибіркове середньоквадратичне відхилення окремих результатів спостережень для цієї самої вибірки можна обчислити за формулою, яку запропонував німецький математик Фрідріх Вільгельм Бессель:

$$\tilde{\sigma}(X) \approx s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (1.35)$$

де $x_i - \bar{x}$ — випадкове відхилення i -го результату спостереження від знайденого значення \bar{x} .

Формула Бесселя справедлива для будь-якого закону розподілу похибок. За нормального розподілу похибок можна обчислювати s за спрощеною формулою (так званою формулою Петерса):

$$s_n = \sqrt{\frac{\pi}{2n(n-1)}} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}| \approx \frac{1,253\ 31}{n-0,5} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|. \quad (1.36)$$

Якщо значення s_n істотно відрізняється від s , добутого за формулою Бесселя, то можна вважати, що в даній вибірці дійсний закон розподілу похибок відрізняється від нормального, й цю вибірку обробляти за правилами для випадкових похибок не слід.

Оцінка \bar{x} математичного сподівання випадкової величини легко відрізняється від μ . Якщо закон розподілу похибок нормальний, то можна вважати, що відхилення \bar{x} від μ не перевищує

$$S_{\bar{x}} = s/\sqrt{n}, \quad (1.37)$$

де $S_{\bar{x}}$ — середньоквадратичне відхилення значення \bar{x} (від математичного сподівання μ).

Надійні межі, в яких при заданій ймовірності перебуває величина X , обчислюються за формулами $\bar{x} - t_{\gamma} S_{\bar{x}}$ (для нижньої межі) та $\bar{x} + t_{\gamma} S_{\bar{x}}$ (для верхньої), де t_{γ} — коефіцієнт надійності для ймовірності P . Для невеликих вибірок ($n < 30$) надійні межі залежать також і від кількості спостережень n (це уточнення запропонував англійський математик Уільям Госсет, відомий під псевдонімом Стьюдент):

n	$P = 86,3\%$	$P = 95,5\%$	$P = 99,7\%$
4	$\bar{x} \pm 1,20S_{\bar{x}}$	$\bar{x} \pm 3,2S_{\bar{x}}$	$\bar{x} \pm 9,2S_{\bar{x}}$
5	1,15	2,8	6,6
6	1,11	2,6	5,5
8	1,08	2,4	4,5
10	1,06	2,3	4,1
20	1,03	2,1	3,4
30	1,02	2,0	3,3

У технічних вимірюваннях (як лабораторних, так і виробничих) обчислення виконуються з ймовірністю $P = 95\%$; в окремих випадках, коли експеримент неможливо повторити, приймають $P = 99\%$. Тільки в особливо важливих випадках, якщо результати експерименту впливають на життя й здоров'я людей, слід брати $P = 99,9\%$.